ロバスト安定性を保証するハイゲイン フィードバックシステムの設計†

野上 博志*・前田 肇*・M. VIDYASAGAR**・児玉 慎三*

Design of High Gain Feedback System with Robust Stability

Hiroshi NOGAMI*, Hajime MAEDA*, M. VIDYASAGAR** and Shinzo KODAMA*

This paper discusses the problem of designing high gain feedback systems with robust stability.

Concerned with disturbance attenuation and/or transient response, it is known that a high gain feedback control is of great worth. However, to make a high gain feedback scheme more reliable, it is important to consider the robust stability problem against plant perturbation.

In this paper we suppose that the feedback system has a nonlinear feedback gain $k(y)/y \geq 1$ as a high gain element, and has the SISO plant with uncertainty of the class of $M(p_0, r) := \{p: p = (1+l)p_0, |L(j\omega)| \leq |r(j\omega)|, \forall \omega \in \mathbb{R}, l \text{ does not change the number of unstable poles}\}$, where p_0 and l denote the nominal plant and perturbation, respectively, and are proper real rational functions.

We call a triple (p_0, c, r) is robustly positive real if $pc/(1+pc)$ is stable and positive real for all plant in $M(p_0, r)$. It is obvious, from passivity theorem, that the robust positive reality of (p_0, c, r) guarantees the stability of the feedback system for all nonlinear gain $k(y)/y \geq 1$ and for all perturbation in $M(p_0, r)$. Hence we only deal with the problem of designing a compensator which achieves robust positive realness.

The main results of this paper are essentially stated as follows. A given triple (p_0, c, r) is

robustly positive real if and only if the following conditions hold.

- 1) c stabilizes p_0 ,
- 2) $|r(j\omega)| |a_0(j\omega)| < 1, \forall \omega \in \mathbb{R}$ and
- 3) $|r(j\omega)| |t_0(j\omega)| + |1 - t_0(j\omega)| \leq 1, \forall \omega \in \mathbb{R}$,

where $a_0 := p_0 c / (1 + p_0 c)$, $t_0 := 2p_0 c / (1 + 2p_0 c)$.

As for the realizability of compensators, we show the following result. Suppose that the roots of $|r(j\omega)|^2 - 1 = 0$ are finitely many and are with multiplicities ≤ 2 . Then for a given pair (p_0, r) there exists a compensator that attains robust positive realness if and only if the followings are satisfied:

- 1) p_0 has neither finite zeros in the open right-half plane nor, multiple $j\omega$ -axis zeros (including $j\infty$),
- 2) $|r(j\omega)| \begin{cases} = 0, & \text{for } j\omega\text{-axis zero of } p_0, \\ < 1, & \text{for } j\omega\text{-axis pole of } p_0, \\ \leq 1, & \text{elsewhere.} \end{cases}$

It should be noted that the modeling error must be less than or equal to 100% and, in particular, must be zero at the $j\omega$ -axis zeros of p_0 for achieving the robust positive realness.

Key Words: high gain feedback system, robust stability, robust positive-realness

1. はじめに

本論文ではプラントの変動に対し、ロバスト安定性を保証するハイゲインフィードバックシステムの設計問題を論じている。

制御系設計の目的は、安定化のみならず、外乱除去性能ならびに入力信号への追従性能の向上などさまざまなことである。たとえば、外乱除去性、追従性などは、そのシステムの感度関数を小さくすることにより性能向上を図ることができる。これを達成する一つの方法として、ループゲインを高くすることがあげられる。そ

† 第30回システムと制御研究発表講演会で発表(昭61・5)

* 大阪大学工学部 吹田市山田丘 2-1

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita

** Department of Electrical Engineering, University of Waterloo, Waterloo, Canada

(Received March 17, 1986)

(Revised June 25, 1986)

ここで、ゲインをいくらでも高くできないかという問題がでてくるが、この点に関しては、一部無限大ゲイン余有問題として考察されている¹⁾⁻³⁾。

ところで、実際に信頼性の高いシステムを設計するためには、たとえば、同定誤差、モデルの簡略化、経年変化または環境変化によるパラメータ変動などに帰因するプラント特性の変動を考慮する必要がある。すなわち、場合によっては、ハイゲインが原因でプラントの微小な変動でさえもシステムが不安定に陥る可能性があるということである⁴⁾。

この点に対処すべく、本論文ではつぎのような問題を考察する。プラントの変動を考慮したハイゲインフィードバックシステムが設計できるための条件は何か？ また、もしそれが可能ならば、その補償器はどのように設計すればよいか？ という問題である。

まず、2章でシステムの記述と数学的な準備を与え、問題を定式化する。対象とする SISO システムは実用面から非線形ゲインをもつとし、また、プラント変動は乗算的なものとする。安定条件として受動定理を採用し、伝達関数の正実性がプラントの特性変動に対して保存されるかというロバスト正実性問題を定式化する。つぎに、3章でこのロバスト正実性問題について詳しく調べ、さらに、4章でその解すなわち目的の補償器が存在するための条件を導出するとともに、その設計方法を示す。

2. 問題の定式化と準備

本論文を通じ、 $R(s)$ はプロパーな実有理関数の集合、 $\mathcal{S}$ は C_+ に極をもたない $R(s)$ の部分集合とする。ここで、 C_+ は拡張右半平面 $\{s: \operatorname{Re} s \geq 0\} \cup \{\infty\}$ を表わす。

いま、Fig. 1 に示されるフィードバックシステムを考える。 $p(s), c(s) \in R(s)$ はそれぞれ、プラント、補償器の伝達関数であり、 k は

$$\infty > k(y)/y \geq 1 \quad (2.1)$$

を満足する時不変の非線形ゲインである。

すでに知られているように、 c が p を安定化し、かつ、 $a := pc(1+pc)^{-1} \in \mathcal{P}$ であれば、Fig. 1 のシステムは (2.1) を満足するすべてのゲイン $k(\cdot)$ に対し安定である⁵⁾。ただし、 $\mathcal{P}$ は正実関数の集合を表わす。

さて、本論文で考えるプラント変動は乗算的なもの

とし、つぎのプラント集合を定義しておく。

$$M(p_0, r) := \{p: p = (1+l)p_0, l \in R(s), |l(j\omega)| \leq |r(j\omega)|, \forall \omega \in R, p \text{ と } p_0 \text{ の不安定極の数は一致}\}$$

ここで、 $p_0 \in R(s)$ は公称プラント、 r はプラント変動の許容幅を示すものであり、 $r \in \mathcal{S}$ と仮定する。

ここで、つぎの定義をしておく。

【定義】 すべての $p \in M(p_0, r)$ に対して

c が p を安定化し、かつ

$$a := pc(1+pc)^{-1} \in \mathcal{P}$$

が成立するとき、 (p_0, c, r) はロバスト正実性をもつと定義する。

ロバスト正実性をもつシステムを設計できれば、信頼性のあるハイゲインフィードバック制御が達成できたことになる。そこで、本論文ではロバスト正実性を実現する c を設計する問題を考察することにする。

3. ロバスト正実性条件

この章では、与えられた (p_0, c, r) がロバスト正実性をもつかどうかの判定条件を与える。

この判定条件を与えるに際し、つぎの二つの補題が有用である。補題 1 は特に Fig. 1 で $k(\cdot) = 1$ としたシステムについてのよく知られたロバスト安定条件であり、補題 2 は正実関数と有界実関数との関係を示したものである。

【補題 1】^{6), 7)} c がすべての $p \in M(p_0, r)$ を安定化するための必要十分条件は

c が p_0 を安定化し、かつ

$$|r(j\omega)| \cdot |a_0(j\omega)| < 1, \forall \omega \in R, a_0 := p_0 c(1+p_0 c)^{-1}$$

が成り立つことである。ただし、 $a_0 := p_0 c(1+p_0 c)^{-1}$ である。

【補題 2】⁸⁾ $a \in R(s)$ が正実関数であるための必要十分条件は

$$\lambda(s) := \frac{1-a(s)}{1+a(s)}$$

が存在し、 $\lambda(s)$ が有界実関数、すなわち

$$\lambda(s) \in \mathcal{S} \quad \text{かつ} \quad (3.1a)$$

$$|\lambda(j\omega)| \leq 1, \forall \omega \in R \quad (3.1b)$$

が成り立つことである。

上記の補題を用い、 (p_0, c, r) がロバスト正実性をもつかどうかを判定する条件はつぎのように与えられる。

《定理 1》 与えられた (p_0, c, r) がロバスト正実性をもつための必要十分条件は、つぎの 3 条件すべてが成立することである。

$$c \text{ は } p_0 \text{ を安定化し,} \quad (3.2a)$$

Fig. 1. Feedback system

$$|r(j\omega)| \cdot |a_0(j\omega)| < 1, \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \text{ かつ} \quad (3.2b)$$

$$|r(j\omega)| \cdot |t_0(j\omega)| + |1 - t_0(j\omega)| \leq 1, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (3.2c)$$

ただし, $a_0 := p_0 c(1 + p_0 c)^{-1}$, $t_0 := 2p_0 c(1 + 2p_0 c)^{-1}$ である.

(証明) “必要性” (p_0, c, r) がロバスト正実性をもつので, すべての $p \in M(p_0, r)$ に対して,

$$c \text{ は } p \text{ を安定化し, かつ} \quad (3.3a)$$

$$a := pc(1 + pc)^{-1} \in \mathcal{P} \quad (3.3b)$$

が成り立つ.

(3.2a), (3.2b)の必要性は補題1と(3.3a)から明らかである. また, (3.3b)と補題2から, すべての $l \in \mathcal{L}(r)$ に対して,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1-a}{1+a} = \frac{1}{1+2(1+l)p_0c} \\ &= \frac{1-t_0}{1+lt_0} \end{aligned} \quad (3.4)$$

が存在し, (3.1)が成り立つ. ただし,

$$\mathcal{L}(r) := \{l : |l(j\omega)| \leq |r(j\omega)|, \forall \omega \in \mathbb{R}, l \in \mathcal{R}(s) \text{ はプラントの不安定極の数を変えない}\}$$

とする.

(3.2c)の必要性を示す準備として,

$$|r(j\omega)| \cdot |t_0(j\omega)| < 1, \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (3.5)$$

を示しておこう. まず, ある $\omega_0 \in \mathbb{R}$ で

$$|r(j\omega_0)| \cdot |t_0(j\omega_0)| \geq 1 \quad (3.6)$$

と仮定し, 矛盾が導けることを示すことにする. $r(j\omega_0)$, $t_0(j\omega_0)$ をおのおの, $r(j\omega_0) = |r(j\omega_0)|e^{i\theta}$, $t_0(j\omega_0) = |t_0(j\omega_0)|e^{i\gamma}$ と書き直し, l として

$$l := -\frac{r(s)}{|t_0(j\omega_0)| \cdot |r(j\omega_0)|} \cdot \prod_i \frac{s - \alpha_i}{s + \alpha_i} \quad (3.7)$$

と定める. ここで, $\alpha_i > 0$ は

$$\left. \begin{aligned} \arg \left\{ \prod_i \frac{j\omega_0 - \alpha_i}{j\omega_0 + \alpha_i} \right\} + \delta + \gamma &= 0 \text{ かつ} \\ 1+l \text{ の不安定零点と } p_0 \text{ の不安定極} \\ \text{との相殺はない} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

ように決定することができる. このとき, $l \in \mathcal{S}$ は明らかで, また, (3.6)から $|l(j\omega)| \leq |r(j\omega)|$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$ である. したがって, (3.7)で与えられる l は $\mathcal{L}(r)$ に属する. ところが, l の作り方より $1 + l(j\omega_0)t_0(j\omega_0) = 0$ となり, つぎに示す矛盾が起こる.

1° $t_0(j\omega_0) \neq 1$ の場合, $\lambda = (1 - t_0)(1 + lt_0)^{-1} \in \mathcal{S}$ となり(3.1a)に反する.

2° $t_0(j\omega_0) = 1$ の場合, $j\omega_0$ は c または p_0 の極であり, $1 + l(j\omega_0)t_0(j\omega_0) = 0$ より $p = (1 + l)p_0$ は $j\omega_0$ に零点をもつ. $j\omega_0$ が c の極であるとき, c と p に不安定な極-零相殺が生じ(3.3a)に反する. また, $j\omega_0$ が p_0

の極であることはない. なぜならば, このとき不安定極の数が変わり, $p \notin M(p_0, r)$ であるからである.

$\omega_0 = \infty$ の場合も, まったく同様に(3.5)が示される.

さて, (3.2c)の必要性を示すために, ある $\omega_0 \in \mathbb{R}$ で

$$|r(j\omega_0)| \cdot |t_0(j\omega_0)| + |1 - t_0(j\omega_0)| > 1 \quad (3.9)$$

と仮定し, (3.1b)が成立しないような $l \in \mathcal{L}(r)$ が存在することを示そう. いま, l として

$$l := -r(s) \cdot \prod_i \frac{s - \alpha_i}{s + \alpha_i} \quad (3.10)$$

と定める. ただし, $\alpha_i > 0$ は(3.8)を満足するように選ぶ. このとき, $l \in \mathcal{S}$ で, $|l(j\omega)| \leq |r(j\omega)|$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$ も明らかであるから, (3.10)で与えられる l は $\mathcal{L}(r)$ に属する. この l を用いると, (3.5), と(3.9)より

$$\begin{aligned} |\lambda(j\omega_0)| &= \left| \frac{1 - t_0(j\omega_0)}{1 + l(j\omega_0)t_0(j\omega_0)} \right| \\ &= \frac{|1 - t_0(j\omega_0)|}{1 - |r(j\omega_0)| \cdot |t_0(j\omega_0)|} > 1 \end{aligned}$$

となり, (3.1b)に反する.

“十分性” 補題1より(3.2a), (3.2b)が成り立つとき, c がすべての $p \in M(p_0, r)$ を安定化するのは明らかである.

つぎに, すべての $l \in \mathcal{L}(r)$ に対し, (3.1b)が成り立つことを示そう. そのために, まず, (3.2b), (3.2c)から

$$|r(j\omega)| \cdot |t_0(j\omega)| < 1, \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (3.11)$$

が成り立つことを示そう. つぎの二つの場合が考えられる.

1° $t_0(j\omega) = 1$ なる ω に対しては, (3.2b)より

$$\begin{aligned} |r(j\omega)| \cdot |a_0(j\omega)| &= |r(j\omega)| \cdot \left| \frac{t_0(j\omega)}{2 - t_0(j\omega)} \right| \\ &= |r(j\omega)| < 1 \end{aligned}$$

である. したがって, $|r(j\omega)| \cdot |t_0(j\omega)| < 1$ は明らかである.

2° $t_0(j\omega) \neq 1$ なる ω に対しては, $|1 - t_0(j\omega)| \neq 0$ であるから, (3.2c)より明らかである.

以上に示された(3.11)より, すべての $l \in \mathcal{L}(r)$ に対し, $1 > |l(j\omega) \cdot t_0(j\omega)|$, $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$ である. このことと(3.2c)および(3.4)から, すべての $l \in \mathcal{L}(r)$ に対して

$$\begin{aligned} |\lambda(j\omega)| &= \left| \frac{1 - t_0(j\omega)}{1 + l(j\omega)t_0(j\omega)} \right| \leq \frac{|1 - t_0(j\omega)|}{1 - |r(j\omega)| \cdot |t_0(j\omega)|} \\ &\leq 1, \forall \omega \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.12)$$

となる.

最後に, すべての $l \in \mathcal{L}(r)$ に対し, (3.1a)が成り立つことを示せば十分である. そのために, (3.12)で

$l=0$ として

$$\frac{1}{|1+2p_0(j\omega) \cdot c(j\omega)|} = \left| \frac{1-a_0(j\omega)}{1+a_0(j\omega)} \right| \leq 1, \forall \omega \in \mathbb{R}$$

すなわち, $\operatorname{Re} a_0(j\omega) \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$ を得る. さらに, (3.2 a) から $a_0 \in \mathcal{S}$ であるから, $a_0 \in \mathcal{P}$ がいえる. したがって, 受動定理から線形ゲイン $k(y)/y=2$ に対してシステムは安定であり, $2c$ は p_0 の安定化器である. このことと (3.11) から, $2c$ は $M(p_0, r)$ に対するロバスト安定化器となり, すべての $l \in \mathcal{L}(r)$ に対し, $\lambda = (1+2p_0(1+l)c)^{-1} \in \mathcal{S}$ とわかる. ■

定理 1 は, 与えられた (p_0, c, r) がロバスト正実性をもつかどうかの判定条件であるとともに, (p_0, c) が与えられたとき, ロバスト正実性を保持する p の変動範囲すなわち $|r(j\omega)|$ の許容範囲を明らかにするものである. このことについては, 5 章で具体例を示す.

4. ロバスト正実性問題の可解性と解の構成

前章では与えられた (p_0, c, r) がロバスト正実性をもつための必要十分条件を導出した. この結果を踏まえて, 本章では (p_0, r) が与えられたときに, ロバスト正実性をもつシステムが構成できるための条件を導出し, その補償器の設計手続きについて考察する.

問題を取り扱いやすくするために, $p_0 \in \mathbb{R}(s)$ の $\mathcal{S}$ 上での既約分数表現を

$$p_0 = n_0 d_0^{-1}, n_0 x_0 + d_0 y_0 = 1, n_0, d_0, x_0, y_0 \in \mathcal{S}$$

とする. このとき, p_0 を安定化するプロパーな補償器のクラスは

$$S(p_0) = \left\{ c : c = \frac{x_0 + d_0 z}{y_0 - n_0 z}, z \in \mathcal{S}, \right. \\ \left. (y_0 - n_0 z)(\infty) \neq 0 \right\} \quad (\text{注 } 1)$$

で与えられ⁹⁾, 目的の補償器はこの $S(p_0)$ の中から選ぶことになる.

さて, $c \in S(p_0)$ を用いると, $p_0 c(1+p_0 c)^{-1} = n_0(x_0 + d_0 z)$ となる. そこで, 集合

$$\mathcal{A}(p_0) := \{a_0 : a_0 = n_0(x_0 + d_0 z), z \in \mathcal{S}\}$$

を定義する. $a_0 \in \mathcal{S}$ が $a_0 \in \mathcal{A}(p_0)$ を満足するとき, a_0 はフィードバック実現可能であると呼ばれ¹⁰⁾, これに関してつぎの補題が知られている.

[補題 3]²⁾ $a_0 \in \mathcal{S}$ がフィードバック実現可能であるための必要十分条件は

$$n_0 | a_0 \quad \text{かつ} \quad d_0 | (1 - a_0)$$

(注 1) p_0 を真にプロパーと仮定すれば, $(y_0 - n_0 z)(\infty) \neq 0$ は不要である.

が成り立つことである.

なお, $a_0 \in \mathcal{A}(p_0)$ が与えられたとき, $a_0 = p_0 c(1+p_0 c)^{-1}$ を満たす c は

$$c = \frac{a_0}{n_0} \left(\frac{1-a_0}{d_0} \right)^{-1}$$

で与えられる.

以上の準備のもとに, 本論文の主要結果の一つであるつぎの定理が導ける.

《定理 2》 公称プラント $p_0 \in \mathbb{R}(s)$ とプラント変動幅を制限する $r(s) \in \mathcal{S}$ が与えられたとする. ただし, $r(s)$ については $|r(j\omega)|^2 - 1 = 0$ の根は離散的であり, それらはたかだか 2 位の重複度とする. このとき, ロバスト正実性を達成するプロパーな補償器 $c(\neq 0)$ が存在するための必要十分条件は

$$n_0 \in \mathcal{M}_1 \quad \text{かつ} \quad (4.1 \text{ a})$$

$$\begin{cases} = 0, & \omega \in \Omega_n \\ & \end{cases} \quad (4.1 \text{ b})$$

$$|r(j\omega)| < 1, \quad \omega \in \Omega_d \quad (4.1 \text{ c})$$

$$\begin{cases} \leq 1, & \text{その他の } \omega \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.1 \text{ d})$$

が成り立つことである. ただし, $\mathcal{M}_1, \Omega_n, \Omega_d$ はそれぞれつぎのように定義される.

$$\mathcal{M}_1 := \{f : f \in \mathcal{S}, f \text{ の零点は開右半平面にはなく,}$$

$$\text{虚軸上}(j\infty \text{ を含む}) \text{ のそれはたかだか 1 位},$$

$$\Omega_n := \{\omega : n_0(j\omega) = 0, \omega \in \mathbb{R}_+ = \mathbb{R} \cup \{\infty\}\},$$

$$\Omega_d := \{\omega : d_0(j\omega) = 0, \omega \in \mathbb{R}\}$$

この定理 2 はつぎのことを示している. すなわち, ロバスト正実性をもつシステムが設計できるためには, 公称プラントの零点は開右半平面には許されず, 虚軸上のそれは 1 位でなければならない. さらに, その虚軸上の零点におけるモデリング誤差は許されず, また虚軸上の極におけるそれは 100% 未満, その他の周波数でのそれは 100% 以下でなければならない.

(証明) “必要性” すべての $p \in M(p_0, r)$ に対し, $a := pc(1+pc)^{-1}$ は安定な正実関数であるから, 特に, $a_0 := p_0 c(1+p_0 c)^{-1}$ も安定な正実関数である. 正実関数の性質から $a_0 \in \mathcal{M}_1$ であり, さらに, 補題 3 のフィードバック実現可能な条件 $n_0 | a_0$ から $n_0 \in \mathcal{M}_1$ すなわち (4.1 a) が得られる.

つぎに, (4.1 b) を導こう. 定理 1 の条件 (3.2 c) より

$$\frac{1 - |1 - t_0(j\omega)|}{|t_0(j\omega)|} \geq |r(j\omega)|, \\ \omega \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\omega : t_0(j\omega) = 0\} \quad (4.2)$$

となる. 左辺は特につぎのように書ける.

$$\frac{1 - |1 - t_0(j\omega)|}{|t_0(j\omega)|} = \frac{-(t_0(j\omega) + \bar{t}_0(j\omega))}{|t_0(j\omega)| \cdot (1 + |1 - t_0(j\omega)|)} \\ + \frac{|t_0(j\omega)|}{1 + |1 - t_0(j\omega)|}$$

ここで, $t_0 = 2a_0(1+a_0)^{-1}$ も正実関数であることより
 $\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} t_0(j\omega)/j(\omega - \omega_n) = t'_0(j\omega_n) > 0$ ($\omega_n \in \Omega_n$) となること
 に注意すれば, 上式より

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{1 - |1 - t_0(j\omega)|}{|t_0(j\omega)|} = 0$$

が得られる. $|r(j\omega_n)|$ の連続性から $|r(j\omega_n)| = 0$, $\omega_n \in \Omega_n$ が導ける.

また, $t_0(j\omega) = 0$ なる ω は離散的である. ゆえに,
 (4.2) と $|r(j\omega)|$ の連続性より (4.1d) は容易に示される.

さらに, (3.2b) から $1 > |r(j\omega)| \cdot |a_0(j\omega)|$, $\omega \in \Omega_d$ を得るが, 補題3のフィードバック実現可能性の条件より $a_0(j\omega) = 1$, $\omega \in \Omega_d$ である. したがって, $|r(j\omega)| < 1$, $\omega \in \Omega_d$ すなわち (4.1c) が得られる.

“十分性” 条件(4.1)ならびに $r(s)$ に関する仮定の下で, 定理1の全条件を満たすプロパーな補償器 c が存在することを示せばよい. 方針として, まずゲイン余有を無限大とする補償器 c_0 を作成し²⁾, それがロバスト性をもつように $c = \kappa c_0$ の $\kappa \geq 1$ を決定しようというものである.

いま, つぎの補間問題の解 $\eta(s)$ が見つかったとしよう.

〔補間問題〕 「つぎの5条件すべてを満たす $\eta \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ を見つけよ:

- ① $\eta(j\omega_{n_i}) = 0$, $\omega_{n_i} \in \Omega_n$,
- ② $\eta(q_i) = 1$, $q_i \in Q := \{q: d_0(q) = 0, q \text{ は } m_i \text{ 位}, q \in C_+\}$

$$\frac{\kappa \{ \kappa(1 - |r(j\omega)|^2) |\eta(j\omega)|^2 - 2(|\eta(j\omega)|^2 - \operatorname{Re} \eta(j\omega) + |r(j\omega)| \cdot |\eta(j\omega)| \cdot |1 - \eta(j\omega)|) \}}{(\kappa - 1) \operatorname{Re} \eta(j\omega) + 1)^2 + (\kappa - 1)^2 (\operatorname{Im} \eta(j\omega))^2} \geq 0. \quad (4.6)$$

ここで, $\operatorname{Re} \eta(j\omega) \geq 0$, $\kappa \geq 1$ より上式の分母は常に正であるので,

$$((4.6) \text{ の分子}) \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$$

となる κ を見い出せば (4.5) が成り立つ. このような κ の下限を κ_0 とすれば,

$$\kappa_0 = \max(1, \kappa'_0)$$

で与えられる. ただし,

$$\kappa'_0 = \sup_{\omega} 2 \cdot \frac{| \eta(j\omega) |^2 - \operatorname{Re} \eta(j\omega) + |r(j\omega)| \cdot |\eta(j\omega)| \cdot |1 - \eta(j\omega)|}{\{1 - |r(j\omega)|^2\} \cdot |\eta(j\omega)|^2} \quad (4.7)$$

である. この κ'_0 が有限確定することは, 補間条件①, ④, ⑤ならびに $r(s)$ に関する仮定から保証される (付録〔補題A〕参照). 以下, κ_0 が所望のものであることを示そう. さて, (4.5) は, $\forall \kappa \geq \kappa_0$ について成立するので, とくに,

$$\begin{aligned} |r(j\omega)| \cdot \left| \frac{2\kappa_0 \eta(j\omega)}{(2\kappa_0 - 1)\eta(j\omega) + 1} \right| \\ + \left| \frac{1 - \eta(j\omega)}{(2\kappa_0 - 1)\eta(j\omega) + 1} \right| \leq 1, \forall \omega \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\searrow \textcircled{3} \quad \eta^{(k)}(q_i) = 0, k = 1, \dots, m_i - 1, q_i \in Q$$

$$\textcircled{4} \quad \eta(j\omega_{r_i}) = \beta, 1 > \beta > 0,$$

$$\omega_{r_i} \in \Omega_r := \{\omega: |r(j\omega)| = 1, \omega \in \mathbb{R}_e\}$$

$$\textcircled{5} \quad \eta(j\omega) \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \Omega_n$$

補題3から, 補間条件①, ②, ③は $\eta \in \mathcal{A}(p_0)$ であることを示しており, この η を用いると

$$c_0 = \left(\frac{\eta}{n_0} \right) \bigg/ \left(\frac{1 - \eta}{d_0} \right) \quad (4.3)$$

と与えられる. ここで改めて, 補償器を

$$c := \kappa c_0$$

としよう. ただし, $\kappa \geq 1$ はつぎの手順で定める.

step 1 $\eta \in \mathcal{P}$ であるから, (4.3) で与えられる c_0 は (2.1) を満足するすべてのゲインに対し, システムを安定化する. したがって, κc_0 は p_0 に対する安定化補償器であり, (3.2a) が成り立つ.

以後, $\kappa \geq 1$ を適当に決定すれば (3.2b), (3.2c) が成り立つことを示そう.

step 2 まず,

$$|r(j\omega)| \cdot |a_0(j\omega)| + |1 - a_0(j\omega)| \leq 1, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

となるような $\kappa \geq 1$ を求めよう. ただし,

$$a_0 = \frac{p_0 c}{1 + p_0 c} = \frac{\kappa p_0 c_0}{1 + \kappa p_0 c_0} = \frac{\kappa \eta}{(\kappa - 1)\eta + 1}$$

である. (4.4) は

$$\begin{aligned} |r(j\omega)| \cdot \left| \frac{\kappa \eta(j\omega)}{(\kappa - 1)\eta(j\omega)} \right| + \left| \frac{1 - \eta(j\omega)}{(\kappa - 1)\eta(j\omega)} \right| \leq 1, \\ \forall \omega \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.5)$$

と等価である. これは, さらに次式と等価である.

も成り立つ. ここで, $\kappa = \kappa_0$ のとき,

$$t_0 = \frac{2p_0 c}{1 + 2p_0 c} = \frac{2\kappa_0 \eta}{(2\kappa_0 - 1)\eta + 1}$$

となることに注意すれば, (4.8) から (3.2c) が成り立つことがわかる.

step 3 つぎに, $\kappa = \kappa_0$ のとき, (3.2b) が成り立つことを示そう. つぎの二つの場合に分ける.

1° $\eta(j\omega) \neq 1$ なる ω に対しては,

$$\left| \frac{1-\eta(j\omega)}{(\kappa_0-1)\eta(j\omega)+1} \right| > 0$$

である。ここで、(4.5)を考慮すれば

$$|r(j\omega)| \cdot \left| \frac{\kappa_0\eta(j\omega)}{(\kappa_0-1)\eta(j\omega)+1} \right| < 1,$$

$$\omega \in \{\omega: \eta(j\omega) \neq 1\}$$

となる。

2° $\eta(j\omega)=1$ なる ω に対しては、補間条件②、④から $|r(j\omega)|=1$ とはならず、また、(4.1d)からこの ω においては $|r(j\omega)| < 1$ である。したがって、

$$|r(j\omega)| \cdot \left| \frac{\kappa_0\eta(j\omega)}{(\kappa_0-1)\eta(j\omega)+1} \right| < 1,$$

$$\omega \in \{\omega: \eta(j\omega)=1\}$$

は明らかである。

残された問題は、補間問題の解を見つけることである。この解については、文献1)と同様の手法を用いて簡単に見出すことができる(付録[補題B]参照)。

以上で定理の証明は完了した。所要の補償器は、補間問題の解 η を用いて

$$c := \kappa_0 c_0 = \kappa_0 \left(\frac{\eta}{n_0} \right) \bigg/ \left(\frac{1-\eta}{d_0} \right)$$

と設計できる。

5. 例題

本論文での主要結果は、与えられた (p_0, c, r) がロバスト正実性をもつかどうかを判定する条件の導出(定理1)と、与えられた (p_0, r) に対してロバスト正実性をもつシステムが設計できるかどうかを判定する条件の導出(定理2)の二つである。

【例題1】 まず、定理1を用いて、与えられた (p_0, c) に対し、ロバスト正実性を保証する p の変動幅 $|r(j\omega)|$ を求めてみよう。

$$p_0 = \frac{s+2}{s^2+1}, \quad c = \frac{2s+1}{s+2}$$

とすると、 c は p_0 に対する安定化補償器となっており、

$$a_0 = \frac{p_0 c}{1+p_0 c} = \frac{2s+1}{s^2+2s+2}$$

は正実関数である。定理1の条件(3.2b), (3.2c)から

$$|r(j\omega)| < \sqrt{\frac{\omega^4+4}{4\omega^2+1}}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \text{かつ}$$

$$|r(j\omega)| \leq \frac{\sqrt{\omega^4+10\omega^2+9}-|1-\omega^2|}{2\sqrt{4\omega^2+1}}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

となり、Fig. 2の斜線部分が $|r(j\omega)|$ の許容範囲である。 p_0 の虚軸上の極である $\omega=1$ においては $|r(j1)|$

Fig. 2 Allowable region of $|r(j\omega)|$

< 1 , p_0 の虚軸上の零点である $\omega=\infty$ においては $|r(j\infty)|=0$ でなければならないことがわかる。

【例題2】 つぎに定理2を用いて、 (p_0, r) が与えられたとしてロバスト正実性をもつシステムを設計してみよう。

$$p_0 = \frac{s}{(s+1)^2}, \quad r = \frac{s}{s^2+s+1}$$

とすると、 $n_0=p_0 \in \mathcal{M}_1$ かつ $|r(j\omega)| \leq 1, \forall \omega \in \mathbb{R}$ であり、 p_0 の虚軸上の零点 $j\infty, j0$ で r も零であるから、定理2より目的の c は設計可能である。

$$\eta = \frac{s}{2(s^2+s+1)}$$

は補間問題の解であり、 κ_0 を求めると $\kappa_0=3$ となる(ただし、補間問題で $\beta=1/2$ とした)。したがって、

$$c = 3 \cdot \frac{\eta}{1-\eta} \cdot \frac{1}{p_0} = \frac{3(s+1)^2}{2s^2+s+2}$$

と設計できる。

6. おわりに

はじめに述べたように、ハイゲイン制御をより信頼性のあるものとするためには、プラント特性の変動に対するロバスト安定性の考慮が不可欠であり、本論文ではこの点をロバスト正実性問題という形で取り扱った。

ロバスト正実性をもつシステムが設計できるためには、プラントの零点は開右半平面には許されず、虚軸上にはたかだか1位でなければならない。また、その虚軸上の零点におけるプラント変動はまったく許されず、さらに虚軸上の極における変動は100%未満、他の周波数におけるそれは100%以上でなければならないという結論を得た。

なお、多変数系への拡張ならびにLQ問題におけるチープコントロールとの関連性についてが今後の研究課題である。

例題を計算し、本研究に協力していただいた前原稔

氏 (現松下電工) に感謝します。

参 考 文 献

- 1) H. Maeda and M. Vidyasagar: Infinite Gain Margin Problem in Multivariable Feedback Systems, Automatica, **22**-1, 131/133 (1986)
- 2) H. Maeda and M. Vidyasagar: Design of Multivariable Feedback Systems with Infinite Gain Margin and Decoupling, System & Control Letters, **6**, 127/130 (1985)
- 3) 野上, 前田, 児玉: 無限大ゲイン余をもつ多変数フィードバックシステムの構成, 計測自動制御学会論文集, **22**-5, 542/548 (1986)
- 4) E. Soroka and U. Shaked: On the Robustness of LQ Regulators, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-29**-7, 664/665 (1984)
- 5) V. M. Popov: Hyperstability of Control Systems, Springer-Verlag, New York (1973)
- 6) J. C. Doyle and G. Stein: Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-26**-1, 4/16 (1981)

7) (1981)

- 7) M. Chen and C. A. Desoer: Necessary and Sufficient Condition for Robust Stability of Linear Distributed Feedback Systems, International J. Control, **35**-2, 255/267 (1982)
- 8) R. W. Newcomb: Linear Multiport Synthesis, McGraw-Hill, New York (1966)
- 9) M. Vidyasagar: Control System Synthesis: A Factorization Approach, MIT Press (1985)
- 10) M. G. Safonov and B. C. Chen: Multivariable Stability-Margin Optimisation with Decoupling and Output Regulation, IEE Proc., **129**-D-6, 276/282 (1982)

《付 録》

【補題 A】 $1 - |r(j\omega)|^2 = 0$ の根が離散的であり, それらがたかだか 2 位の重複度であるという前提条件, ならびに, 条件 (4.1) と補間条件①, ④, ⑤のもとで, (4.5) の κ_0' は発散しない。

(証明)

$$\xi(\omega) = \frac{|r(j\omega)|^2 - \operatorname{Re} \eta(j\omega) + |r(j\omega)| \cdot |\eta(j\omega)| \cdot |1 - \eta(j\omega)|}{|\eta(j\omega)|^2 |1 - r(j\omega)|^2}$$

と定義する。 $\xi(\omega)$ が発散する可能性のあるのはつぎの二つの場合である：

- 1° $|\eta(j\omega)| = 0$ の場合,
- 2° $1 - |r(j\omega)|^2 = 0$ の場合。

まず, 1° の場合, 補間条件①と⑤から $|\eta(j\omega)| = 0$ となるのは $\omega = \omega_n \in \Omega_n$ のときに限られる。また, $\nearrow$

$\searrow \eta(s)$ は正実関数であるから $\omega_n \in \Omega_n$ は $\eta(s)$ の 1 位の零点であり, $\operatorname{Re} \eta(j\omega)$ は $(\omega - \omega_n)^2$ なる因子で割り切れる。一方, (4.1b) よりすべての $\omega_n \in \Omega_n$ で $|r(j\omega_n)| = 0$ である。したがって, $\xi(\omega)$ は $\omega = \omega_n$ で有限確定する。

つぎに, 2° の場合

$$\xi(\omega) = \frac{|1 - \eta(j\omega)|^2}{|r(j\omega)|^2 - \operatorname{Re} \eta(j\omega) - |r(j\omega)| \cdot |1 - \eta(j\omega)| \cdot |\eta(j\omega)|} \cdot \frac{\{\operatorname{Im} \eta(j\omega)\}^2}{(1 - |r(j\omega)|^2) |\eta(j\omega)|^2 \{|\eta(j\omega)|^2 - \operatorname{Re} \eta(j\omega) - |r(j\omega)| \cdot |1 - \eta(j\omega)| \cdot |\eta(j\omega)|\}} \quad (\text{a. 1})$$

$\searrow$ と書き直せることに注意しよう。補間条件④より, (a. 1) の右辺第 1 項は $\omega = \omega_r \in \Omega_r$ で有限確定し $(\beta - 1)/2\beta$, $(0 < \beta < 1)$ となる。一方, 補間条件④より $\operatorname{Im} \eta(j\omega)$ は $(\omega - \omega_r)$ を因子にもち, さらに仮定より $1 - |r(j\omega)|^2 = 0$ の零点は離散的でたかだか 2 位の重複度であるから, (a. 1) の右辺第 2 項も $\omega = \omega_r \in \Omega_r$ で有限確定する。

以上より, $\sup_{\omega} 2\xi(\omega)$ は有限確定する。 ■

【補題 B】 【補間問題】 は常に解をもつ。

(証明) ここでは η をつぎの関数のクラスから探すことにしよう。

$$\frac{1}{\eta} = \varepsilon \left(1 + \sum_i \frac{s}{s^2 + \omega_{n_i}^2} \right) + \frac{1}{g}$$

ただし, $\varepsilon > 0$, $g \in \text{s.p.r.} = \{g: g \in \mathcal{S}, \operatorname{Re} g(s) > 0, \forall s \in \mathcal{C}_{+i}\}$ とし, また, $\omega_{n_i} = \infty$ のときは $s/(s^2 + \omega_{n_i}^2) = s$ とする。このとき, 明らかに $\eta \in \mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ である。

さらに, 条件①, ⑤が満足されていることもすぐわかる。

そこで, 条件②~④が満たされるように $\varepsilon > 0$, $g \in \text{s.p.r.}$, $0 < \beta < 1$ を決定したい。 $f = 1 + \sum_i \{s/(s^2 + \omega_{n_i}^2)\}$

とおくと, $g = \eta/(1 + \varepsilon f \eta)$ となり, 条件②, ③は

$$g^{(k)}(q_i) = c_i^{(k)}(\varepsilon), \quad k = 0, \dots, m_i - 1, \quad q_i \in \mathcal{Q} \quad (\text{b. 1})$$

となる。ただし,

$$c_i^{(0)} = \frac{1}{1 - \varepsilon f(q_i)}, \quad c_i^{(1)} = \frac{\varepsilon f^{(1)}(q_i)}{(1 - \varepsilon f(q_i))^2}, \quad \dots$$

である。ここで

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_i^{(k)}(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, \dots, m_i - 1 \end{cases} \quad (\text{b. 2})$$

に注意しておく。

一方, 条件④は

$$g(j\omega_{r_i}) = \frac{\beta}{1 - \varepsilon \beta f(j\omega_{r_i})} = e_i(\beta, \varepsilon), \quad \omega_{r_i} \in \Omega_r$$

となる.

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 1}} \frac{\beta}{1 - \varepsilon \beta f(j\omega_{r_i})} = 1 \quad (\text{b.4})$$

にも注意しておく.

s.p.r. 関数の補間問題 (b.1), (b.3) は双 1 次変換

$$s = \phi(z) = \frac{1-z}{1+z}, \quad \Psi(z) = \frac{1-g(\phi(z))}{1+g(\phi(z))}$$

を用いて解くことができる.

新しい補間問題は $|z| \leq 1$ に対し, $|\Psi(z)| < 1$ となり,

$$\Psi^{(k)}(w_i) = W_i^{(k)}, \quad k=0, \dots, m_i-1, \quad (\text{b.5})$$

$$\Psi(u_i) = V_i \quad (\text{b.6})$$

となる $\Psi(z)$ を見つけることである. ただし,

$$w_i = \phi(q_i),$$

$$u_i = \phi(j\omega_{r_i}),$$

$$W_i^{(0)} = \frac{1-c_i^{(0)}}{1+c_i^{(0)}}, \quad W_i^{(1)} = \frac{4c_i^{(1)}}{(1+c_i^{(0)})^2(1+w_i)^2}$$

$$V_i = \frac{1-e_i}{1+e_i}$$

である. このような $\Psi(z)$ はラグランジュ・シルベス

(b.3)

ター補間多項式

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & \sum_i (W_i^{(0)} p_{i0}(z) + \dots + W_i^{(m_i-1)} p_{i, m_i-1}(z)) \\ & + \sum_i V_i \tilde{p}_i(z) \end{aligned} \quad (\text{b.7})$$

で与えられる. ここで, $p_{ik}, \tilde{p}_i$ は補間条件 (b.5), (b.6) を満たすように決定されている. (b.2), (b.4) から

$$W_i^{(k)}(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

$$V_i(\varepsilon, \beta) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0, \beta \rightarrow 1),$$

となることに注意すれば, (b.7) で与えられる $\Psi(z)$ は適当な $\varepsilon > 0, 1 > \beta > 0$ に対して $|\Psi(z)| < 1, \forall |z| \leq 1$ となる. ■

最後に, $c = \kappa c_0$ を常にプロパーにできることを示しておこう. これは, $\eta(\infty) \neq 1$ と常にできることを示せば十分である. なぜならば, $\eta(\infty) \neq 1$ は $a_0(\infty) = [\kappa\eta / \{1 - (\kappa-1)\eta\}](\infty) \neq 1$ を示しており, これより $1 - a_0(\infty) = \{d_0(y - n_0 z)\}(\infty) \neq 0$ だからである.

それで, いま求めた η が $\eta(\infty) = 1$ を満たす場合には, $\varepsilon > 0$ をすこし小さくし, g を決定し直せば他の補間条件を崩すことなく $\eta(\infty) \neq 1$ とでき, 補償器は常にプロパーにできる. ■