空間経路が指定されるマニピュレータ動作の時間短縮

尾崎 弘明*・秀田 保*・山本 元司*・毛利 彰*

Planning of Shortened-Time Joint Trajectories of Manipulators with Geometric Path Constraints

Hiroaki OZAKI*, Tamotsu HIDETA*, Motoji YAMAMOTO* and Akira MOHRI*

This paper discusses how to plan shortened-time trajectories of manipulator joints with geometric path constraints in consideration of physical constraints based on manipulator and actuator dynamics. A time scale factor is introduced to formalize the problem as follows: A set of joint trajectories, called reference trajectories, is used to realize the specified geometric path. The time scale factor is defined as a function of time describing the set of reference trajectories. All the sets of trajectories realizing the geometric path are expressed by means of the time scale factor. The problem of planning the shortened-time trajectories is then transferred into the simple one to decide the time scale factor.

An algorithm which iteratively shortens the traveling time of trajectories is proposed to solve the formalized problem. This algorithm is a feasible method and needs a little time of computation. An example of planning the trajectories of the manipulator with four degrees of freedom shows its effectiveness. The algorithm to obtain the minimum-time trajectories is also presented.

Key Words: manipulator, trajectory planning, minimum-time, dynamics

1. ま え が き

マニピュレータの空間経路が指定される場合について、どのように各関節の時間軌道を計画すれば動力学などの物理的な拘束のもとで動作時間を短縮できるかを考える。これは、たとえば障害物回避経路や、教示によって得られた点を結ぶ空間経路上の動きを、どの

ように時間的に実現すればよいかを取扱う問題である。

マニピュレータを利用する立場からすると、同じ作業をするために必要なエネルギー消費ができるだけ少ないことや、作業を完了するまでの所要時間（動作時間と呼ぶ）が短いことが望ましい。とくに、動作時間をできるだけ短くすることは、生産性を向上させるという意味できわめて望ましい。

現在までに提案された時間軌道計画に関する研究の多くは、速度、加速度などの運動学的な制約を考慮している^{1),2)}。しかし、これらの場合にはたとえばアクチュエータによる駆動力の制限を犯すことのない安全な運動学的な制約を用いることになり、使用するアクチュエータの性能を十分に利用することはできない。

Dubowsky ら³⁾はベース座標系で手先の空間経路が与えられた場合、また Shin ら⁴⁾は関節座標系で空間経路が与えられた場合について、それらの経路に沿ってマニピュレータが最短時間で運動するときの時間軌道を計画することを検討している。両者はともに、空間経路に沿う移動量を表わすパラメータ s とその時間微分 $\dot{s}$ を用いて、経路に沿う運動を s - $\dot{s}$ 位相面上の軌跡として表わすことを考えた。この方法は、アクチュエータ駆動力の制限を考慮して最短時間軌道を比較的に容易に計画できる。

これに対して、ここでは空間経路が指定された場合の軌道計画の問題をつぎのように考える。すなわち、ある空間経路を実現する一組の関節の時間軌道が与えられたとき、その空間経路を変更することなく、時間軌道を改善する問題であると考え、そこで、この問題を解決するために時間スケールファクタを用いる新しい方法を提案する。まず次章では、軌道計画で考慮するマニピュレータ系の動力学について簡単に説明し、3章で時間スケールファクタを用いた動力学の記

* 九州大学工学部 福岡市東区箱崎 6-10-1

* Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka

(Received September 14, 1985)

(Revised June, 30, 1986)

述を示す。また、これを用いて動作時間の短縮問題の定式化を行う。4章では逐次短縮化によってこの問題を解く一つのアルゴリズムを提案し、5章でこれを用いた軌道計画の例を示す。さらに、6章では時間スケールファクタを用いる方法が、逐次時間短縮のみならず最短時間軌道を求める方法として有効であることを示す。

2. マニピュレータ系の動力学

マニピュレータ部とアクチュエータ部を合わせたマニピュレータ系全体の運動方程式はつぎのように得られる^{5), 6)}。

$$(H(\theta) + F)\ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta) + K^T(\theta)k + FC\dot{\theta} = FDu \quad (1)$$

ここに θ は m 次元の関節変数ベクトル、 $H(\theta)$ は $m \times m$ 慣性マトリクス、 $h(\theta, \dot{\theta})$ 、 $g(\theta)$ はそれぞれ遠心力とコリオリ力および重力項を表わす m 次元ベクトル、また F はアクチュエータ部の慣性、 C 、 D はアクチュエータ部の特性を表わす $m \times m$ の対角マトリクスである。 k は手先に加わる外力を表わし、 $K(\theta)$ は外力 k が各関節におよぼす力を与える $6 \times m$ のヤコビアンマトリクスである。

軌道計画に際しては、外力 k は考慮しないものとし、左辺第4項は除いて考える。また、マニピュレータの各関節で摩擦力を考慮する必要がある左辺第5項に含めて考えればよい。なお、(1)式からわかるように、アクチュエータ部の運動は2階の微分方程式で表わせるものと考えている。かなり広範囲のアクチュエータは、このようなモデルで比較的良好に表わせるので、以下では(1)式にもとづいて時間軌道を計画する。

3. 時間スケール変更と問題の定式化

時間スケールファクタを用いた考え方を導入し、これによって動力学の取扱いが容易になることを示す。また、この考え方をを用いて動作時間短縮問題を定式化する。

手先が指定された空間経路を通るとき、関節の時間軌道の一つが Fig. 1 に示す $\theta_i (i=1, \dots, m)$ のようになるものとする。この軌道 $\theta^T(t) (\equiv (\theta_1(t) \theta_2(t) \dots \theta_m(t)))$ を基準軌道と呼ぶことにする。基準軌道 $\theta_i(t)$ の時刻 t における微小時間間隔を dt とし、 dt 間の関節の動きを $d\theta_i$ とする。動き $d\theta_i$ を変えることなく ($d\theta_i = d\tilde{\theta}_i$)、間隔 dt を $\kappa(t)$ 倍して得られる時間間隔を $d\tilde{t}$ で表わす。すなわち、

$$d\tilde{t} = \kappa(t) dt \quad (2)$$

Fig. 1 Reference trajectory $\theta_i(t)$ and modified trajectory $\tilde{\theta}_i(\tilde{t})$

ここで $\kappa(t)$ を時間スケールファクタと呼び、 $\kappa(t)$ によって時間を縮小拡大する操作を時間スケール変更ということにする。この結果、時刻 t における関節の変位 $\theta_i(t)$ は時間スケール変更後、時刻 $\tilde{t}$ における関節変位 $\tilde{\theta}_i(\tilde{t})$ と対応し、時刻 $\tilde{t}$ は $\kappa(t)$ を用いてつぎのように得られる。

$$\tilde{t} = \int_0^t \kappa(\tau) d\tau \quad (3)$$

時間スケール変更によって得られた軌道 $\tilde{\theta}(\tilde{t})$ (以後修正軌道と呼ぶ) 上の速度、加速度は、基準軌道 $\theta(t)$ 上の速度、加速度とつぎのように対応づけられる。

$$\dot{\tilde{\theta}}(\tilde{t}) = \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{t}} = \frac{d\tilde{\theta}}{dt} \frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{1}{\kappa(t)} \dot{\theta}(t) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\theta}}(\tilde{t}) &= \frac{d}{d\tilde{t}} \left(\frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{t}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{t}} \right) \frac{dt}{d\tilde{t}} \\ &= \frac{1}{\kappa^2(t)} \left(-\frac{\dot{\kappa}(t)}{\kappa(t)} \dot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

マニピュレータ系が基準軌道 $\theta(t)$ および修正軌道 $\tilde{\theta}(\tilde{t})$ に沿って動くとき、アクチュエータに必要な駆動力をそれぞれ $FDu(t)$ および $FD\tilde{u}(\tilde{t})$ とすれば、これらは(1)式よりつぎのように得られる。

$$FDu(t) = (H(\theta) + F)\ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta) + FC\dot{\theta} \quad (6)$$

$$FD\tilde{u}(\tilde{t}) = (H(\tilde{\theta}) + F)\ddot{\tilde{\theta}} + h(\tilde{\theta}, \dot{\tilde{\theta}}) + g(\tilde{\theta}) + FC\dot{\tilde{\theta}} \quad (7)$$

$\tilde{\theta}(\tilde{t})$ が $\theta(t)$ と等しいことおよび(4)、(5)式を考慮すると $FD\tilde{u}(\tilde{t})$ は $\theta(t)$ 、 $\dot{\theta}(t)$ および $\ddot{\theta}(t)$ を用いてつぎのように表わせる。

$$\begin{aligned} FD\tilde{u}(\tilde{t}) &= (H(\theta) + F) \left\{ \frac{1}{\kappa^2(t)} \left(-\frac{\dot{\kappa}(t)}{\kappa(t)} \dot{\theta} + \ddot{\theta} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\kappa^2(t)} h(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta) + \frac{1}{\kappa(t)} FC\dot{\theta} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $h(\tilde{\theta}, \dot{\tilde{\theta}})$ の要素はすべて $\alpha_{ij}(\tilde{\theta}) \dot{\tilde{\theta}}_i \dot{\tilde{\theta}}_j (i, j=1, \dots, m)$ の和の形をもつので、 $h(\tilde{\theta}, \dot{\tilde{\theta}}) = h(\theta, \dot{\theta}) / \kappa^2(t)$ となることに注意する。(6)、(8)式より駆動力 $FD\tilde{u}(\tilde{t})$ はつぎのように得られる。

$$FD\ddot{u}(\tilde{t}) = \frac{1}{\kappa^2(\tilde{t})}FDu(t) - \frac{\dot{\kappa}(\tilde{t})}{\kappa^3(\tilde{t})}(H(\theta) + F)\dot{\theta} \\ + \frac{\kappa^2(\tilde{t}) - 1}{\kappa^2(\tilde{t})}g(\theta) + \frac{\kappa(\tilde{t}) - 1}{\kappa^2(\tilde{t})}FC\dot{\theta} \quad (9)$$

したがって、基準軌道 $\theta(t)$ について $\dot{\theta}(t)$, $\ddot{\theta}(t)$, $(H(\theta) + F)\dot{\theta}$, $g(\theta)$, $FC\dot{\theta}$ および $FDu(t)$ を一度計算し、これらを記憶しておけば、時間スケール変更後の $\dot{\theta}(\tilde{t})$, $\ddot{\theta}(\tilde{t})$ および $FD\ddot{u}(\tilde{t})$ は $\kappa(t)$, $\dot{\kappa}(t)$ だけを用いて (4), (5), (9) 式によって計算でき、マニピュレータ系の動力学を計算しなおす必要はない。なお、 $H(\theta)$, $g(\theta)$, $FDu(t)$ などは反復 Newton-Euler 法^{8), 9)}を用いると効率よく計算される。

以上の結果を用いると、動作時間短縮問題はつぎのようになる。制約条件としては、アクチュエータ入力 $\ddot{u}(\tilde{t})$ に対する制限または、駆動力 $FD\ddot{u}(\tilde{t})$ および関節速度 $\dot{\theta}(\tilde{t})$ に対する制限などが考えられる (注 1)。すなわち、

$$u_{\min} \leq \ddot{u}(\tilde{t}) \leq u_{\max} \quad (10)$$

または、

$$\dot{\theta}_{\min} \leq \dot{\theta}(\tilde{t}) \leq \dot{\theta}_{\max} \quad (11)$$

および

$$\tau_{\min} \leq FD\ddot{u}(\tilde{t}) \leq \tau_{\max} \quad (12)$$

軌道 $\tilde{\theta}(\tilde{t})$ の始端 $\tilde{t}=0$ と終端 $\tilde{t}=\tilde{t}_0$ では位置、速度および加速度が指定される (注 2)。

$$\tilde{\theta}(0) = \theta_0, \quad \dot{\tilde{\theta}}(0) = \dot{\theta}_0, \quad \ddot{\tilde{\theta}}(0) = \ddot{\theta}_0$$

$$\tilde{\theta}(\tilde{t}_0) = \theta_0, \quad \dot{\tilde{\theta}}(\tilde{t}_0) = \dot{\theta}_0, \quad \ddot{\tilde{\theta}}(\tilde{t}_0) = \ddot{\theta}_0 \quad (13)$$

これらの条件をもとに、次式で得られる $\tilde{t}_0$ をできるだけ小さくする時間スケールファクタ $\kappa(t)$ を求めればよい。

$$\tilde{t}_0 = \int_0^{t_0} \kappa(\tau) d\tau \quad (14)$$

この結果得られる $\kappa(t)$ により関節軌道が決定される。すなわち、軌道計画問題は時間 t の関数として $\kappa(t)$ (以後 $0 \leq t \leq t_0$ における $\kappa(t)$ を $\kappa(t)$ の軌道と呼ぶ) を求める問題に置き換えられた。

提案した方法は関節の基準軌道をもとにして得られたことに注意する。基準軌道は、移動開始点からの経過時刻に対応づけられるので、手先が空間径路上を重複して動いたり停留する場合にも問題は生じない。

(注 1) ここで提案する方法では、制約条件が複雑なものでもかまわない。たとえば、 $u_{\min}$, $u_{\max}$, $\theta_{\min}$, $\theta_{\max}$, $\tau_{\min}$, $\tau_{\max}$ などが時刻 $\tilde{t}$ (または t) の関数であってもよい。

(注 2) 通常加速度が両端で指定されることが多いが、これが指定されなくても 4 章のアルゴリズムでは同様に扱える。

4. 動作時間短縮のアルゴリズム

マニピュレータ系のパラメータが正確に見積れない場合や、手先に加わる負荷などによってパラメータが変動する場合には、計画された軌道に正確に追従することが困難になる。この意味では、最短時間軌道は制約条件の制限値によって動きが決められているために、そのままでは適用しにくい場合がある。前章で定式化された問題の一つの解法として、ここでは実行可能な解を逐次更新して動作時間を短縮する方法を提案する。この方法では、途中で得られる解はすべて制約条件を満たすので、これらの解を実際に適用できるかどうかを、シミュレータや直接実際の系を用いて検討しながら解を更新することができる。

提案する方法は実行可能解法であるから、まず制約条件を満たす初期実行可能解 $\theta(t)$ を求める必要がある。この解を求める方法として、たとえば Lin らが用いた方法²⁾を利用できる。ただし、この方法ではマニピュレータ系の動力学が考慮されていないが、動作時間を長くすれば動力学的な影響は小さくなることから、初期実行可能解は比較的容易に得られる。

得られた初期実行可能解を基準軌道として用いることにすれば、 $\kappa(t)$ の初期軌道は $\kappa(t) = 1.0$ ($0 \leq t \leq t_0$) となる。動作計画は (14) 式の $\tilde{t}_0$ を小さくすればよいので、制約条件 (10) ~ (12) 式を満たす範囲で $\kappa(t)$ の軌道を下げるように更新すればよい。なお、境界条件 (13) 式は $\kappa(0) = \kappa(t_0) = 1.0$, $\dot{\kappa}(0) = \dot{\kappa}(t_0) = 0.0$ となる。

以下では、B スプラインを用いて軌道 $\kappa(t)$ を定める方法を考える。いま、基準軌道の動作時間 t_0 を等間隔 Δt をもつ $n-1$ 個の区間に分け、その区分点の時刻を $t_1 (=0)$, $t_2, \dots, t_i, \dots, t_n (=t_0)$ とする。Fig. 2 に示すように、時刻 t_i における $\kappa(t_i)$ の仮想目標値を $\hat{\kappa}_i$ とし、 $\kappa(t)$ の 2 階の導関数まで連続になるように軌道 $\kappa(t)$ を定めることにする。このとき、 $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ($i=1, \dots, n-1$) の区間で時刻 t と時間スケールファクタ $\kappa(t)$ はパラメータ s ($0 \leq s \leq 1$) を用いてつぎのように求められる⁷⁾。

Fig. 2 Trajectory $\kappa(t)$ interpolated by B-spline

$$t(s) = t_i + s \Delta t \quad (15)$$

$$\kappa(s) = \hat{\kappa}_{i-1} N_{i-1,4}(s) + \hat{\kappa}_i N_{i,4}(s) + \hat{\kappa}_{i+1} N_{i+1,4}(s) + \hat{\kappa}_{i+2} N_{i+2,4}(s) \quad (16)$$

ただし、 $N_{i-1,4}(s), \dots, N_{i+2,4}(s)$ は位数 4 の B スプラインの基底関数であり、つぎのように与えられる。

$$N_{i-1,4}(s) = \frac{1}{6}(1-s)^3$$

$$N_{i,4}(s) = \frac{1}{6}\{(1-s)^2(s+2) + (2-s)(1-s)(s+1) + (2-s)^2s\}$$

$$N_{i+1,4}(s) = \frac{1}{6}\{(1-s)(s+1)^2 + (2-s)s(s+1) + (3-s)s^2\}$$

$$N_{i+2,4}(s) = \frac{1}{6}s^3$$

また、 $\hat{\kappa}(t)$ は (15)、(16) 式より次式によって得られる。

$$\hat{\kappa}(t) = \frac{d\kappa}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\Delta t} \frac{d\kappa}{ds} \quad (17)$$

さらに、時刻 t_{i+1} の時間スケール変更後の時刻 $\tilde{t}_{i+1}$ はつぎようになる。

$$\tilde{t}_{i+1} = \tilde{t}_i + \frac{\Delta t}{24}(\hat{\kappa}_{i-1} + 11\hat{\kappa}_i + 11\hat{\kappa}_{i+1} + \hat{\kappa}_{i+2}) \quad (18)$$

(15)~(18) 式より、 $\hat{\kappa}_i$ を変更したときの影響は $t_{i-2} < t < t_{i+2}$ の区間だけに限られることがわかる。このため、 $\kappa(t)$ の軌道は逐次局所的に変更できるので制約条件をチェックするうえで都合がよい。なお、 $\kappa(t)$ が境界条件を満たすためには、 $\kappa_0 = \kappa_1 = \kappa_2 = 1.0$ および $\kappa_{n-1} = \kappa_n = \kappa_{n+1} = 1.0$ とすればよい。

以上より、動作時間短縮の手順はつぎようになる。

- (i) 初期実行可能解 $\theta(t)$ を求め、これを基準軌道とする。
- (ii) 分割数 $n-1$, 判定のしきい値 ε , 定数 $c(>1)$, $\delta\kappa_{\min}$, および $\delta\kappa$ の初期値を設定する。
- (iii) $i=2$, $\tilde{t}_{\text{old}} = t_0$, $\hat{\kappa}_j = 1.0 (j=-0, \dots, n+1)$ とおく。
- (iv) $i=i+1$ とおく。
- (v) $\hat{\kappa}_i$ を $\hat{\kappa}_i - \delta\kappa$ とし、 $t_{i-2} < t < t_{i+2}$ の区間で以下の計算をする。(15)~(17)式を用いて $\kappa(t)$, $\hat{\kappa}(t)$ を計算する。この結果を用いて(4), (9)式を計算し、制約条件(10)~(12)式をチェックする。制約条件を満たせば $\hat{\kappa}_i$, $\kappa(t)$, $\hat{\kappa}(t)$ を更新し、満たさなければ更新しない。
- (vi) $i=n-2$ なら(vii)へ、 $i < n-2$ なら(iv)へ。
- (vii) $\delta\kappa \leq \delta\kappa_{\min}$ なら計算を打切る。 $\delta\kappa > \delta\kappa_{\min}$ なら(viii)へ。

- (viii) $\tilde{t}_0$ を (18) 式を用いて計算する。 $\tilde{t}_{\text{old}} - \tilde{t}_0 \geq \varepsilon$ なら $\tilde{t}_{\text{old}} = \tilde{t}_0$, $\delta\kappa = \delta\kappa/c$, $i=2$ とおいて(iv)へ。 $\tilde{t}_{\text{old}} - \tilde{t}_0 < \varepsilon$ なら計算を打切る。

このアルゴリズム終了時の $\tilde{t}_{\text{old}}$ が計画された動作時間となる。なお、計算を効率よくするには、 $\delta\kappa$ を適当な値に固定して $\hat{\kappa}_i$ が十分小さくなるまでステップ(iv)~(vi)を繰返したのち、 $\delta\kappa$ をステップ(viii)のように可変にするとよい。

5. 例 題

四つの等しい直方体で表わせるリンクをもつマニピュレータが Fig. 3 に示すような空間径路を動く場合を考える。各リンクは、長さ 20cm, 断面 $10 \times 10 \text{ cm}^2$, 質量 1.0 kg の均質な剛体とする。ここでは簡単のため、アクチュエータの特性を考えないことにする。すなわち、(1)式において $H(\theta) + F \rightarrow H(\theta)$, $FC\dot{\theta} \rightarrow 0$, $FDu \rightarrow \tau$ とする。速度の制限値は $\dot{\theta}_{\max}^T = -\dot{\theta}_{\min}^T = (100.0 \ 150.0 \ 200.0 \ 250.0)$ (deg/s), 駆動力の制限値は $\tau_{\max}^T = -\tau_{\min}^T = (32.0 \ 18.0 \ 8.2 \ 2.0)$ (N・m) とする。Fig. 4 はベースから数えて3番目の関節の初期実行可能解(O)と時間短縮を行った後の軌道(Δ)を示す。他の関節も同様に時間短縮軌道が得られているが省略する。Fig. 5 は短縮化が行われた状態の $\kappa(t)$ の軌道を示している。

この例ではBスプラインを用いる場合の分割数 $n=20$ とし、制約条件のチェックは $0 \leq t \leq t_0$ 間で 200 点とした。初期実行可能解の動作時間 2.31 秒は、時間短縮により、1.47 秒になった。この短縮化に要する演算時間は FACOM M382 を用いて 0.098 秒であった。なお、アクチュエータ入力を制限し、アクチュエータ特性を考慮に入れる場合には Fig. 4 に見られる駆動力の急激な変化は緩和されるものと思われる。

Fig. 3 Geometric path of the manipulator with four links and four degrees of freedom

Fig. 4 Initial feasible trajectories and shortened-time trajectories

Fig. 5 Trajectory $\kappa(t)$ realizing the shortened-time trajectory

6. 最短時間軌道の計画

4章では実行可能解を逐次改善する方法を述べたが、与えられた制約条件のもとで可能な最短の動作時間を把握することが必要な場合も考えられる。以下では最短時間軌道を直接求める方法について検討する。

いま制約条件として (11), (12) 式を考えることにする。このとき, $\kappa(t)$, $\dot{\kappa}(t)$ はつぎの関係を満足しなければならない。

$$\kappa(t)\dot{\theta}_{\min} \leq \dot{\theta}(t) \leq \kappa(t)\dot{\theta}_{\max} \quad (19)$$

および

$$-\kappa^3(t)\tau_{\max} + \{\kappa(t)FDu(t) + \kappa(t)(\kappa^2(t)-1)g(\theta)\} + \kappa(t)(\kappa(t)-1)FC\dot{\theta} \leq (H(\theta) + F)\dot{\theta}\dot{\kappa}(t) \leq$$

Fig. 6 Admissible range of derivative $\dot{\kappa}(t)$ on boundary $\Gamma(t)$

$$-\kappa^3(t)\tau_{\min} + \{\kappa(t)FDu(t) + \kappa(t)(\kappa^2(t)-1)g(\theta)\} + \kappa(t)(\kappa(t)-1)CF\dot{\theta} \quad (20)$$

すべての関節についてこれらの制約条件が成り立つためには, $\kappa(t)$ はある許容域をもたねばならない。この許容域の境界を $\Gamma(t)$ で表わすことにする。許容域内では $\dot{\kappa}(t)$ はつぎのような範囲をもつ。すなわち,

$$\dot{\kappa}_{\min}(t) \leq \dot{\kappa}(t) \leq \dot{\kappa}_{\max}(t) \quad (21)$$

さらに, $\kappa(t)$ が境界 $\Gamma(t)$ 上にある場合には, $\dot{\kappa}(t)$ が許容域から外に向う方向をもつことは許されないのので, $\dot{\kappa}(t)$ はさらに制約を受け, つぎの許容範囲をもつ。

$$\dot{\kappa}_{ad\min}(t) \leq \dot{\kappa}(t) \leq \dot{\kappa}_{ad\max}(t) \quad (22)$$

たとえば $\dot{\kappa}_{\min}(t)$, $\dot{\kappa}_{\max}(t)$, $\dot{\kappa}_{ad\min}(t)$, $\dot{\kappa}_{ad\max}(t)$ の関係は Fig. 6 のようになる。なお, 以下では $\kappa(t)$ を逆時間方向に求める手続きが必要になる。この場合には $-\dot{\kappa}(t)$ について同様に考える。

最短時間の関節軌道を与える $\kappa(t)$ の軌道 ($\kappa_{opt}(t)$ で表わす) は, 始端時刻 $t=0$ から時間 t の増加方向 (順時間方向) に求めて得られる軌道 $\kappa_f(t)$ と, 終端時刻 $t=t_f$ から t の減少方向 (逆時間方向) に求めて得られる軌道 $\kappa_b(t)$ とを用いてつぎのように求められる。

$$\kappa_{opt}(t) = \begin{cases} \kappa_f(t) & 0 \leq t \leq t_s \\ \kappa_b(t) & t_s \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (23)$$

ここに t_s は $\kappa_f(t)$ と $\kappa_b(t)$ とが交わる時刻である。 $\kappa_f(t)$ と $\kappa_b(t)$ は以下の手順で求められる (Fig. 7 参照)。なお, 最短時間軌道を求める場合には, 基準軌

Fig. 7 Trajectory $\kappa_{opt}(t)$ realizing the minimum-time trajectory

道は必ずしも実行可能解である必要はない。

(1) $\kappa_f(t)$ の求め方

(i) $i=0, t=t_{f1}=0$ とおく。

(ii) $\kappa(t)$ が許容域内にあるときは $\dot{\kappa}(t)=\dot{\kappa}_{\min}(t)$ ($t \geq t_{f1}$)、 $\kappa(t)$ が境界 $\Gamma(t)$ 上にあるときは $\dot{\kappa}(t)=\dot{\kappa}_{\min}(t)$ ($t \geq t_{f1}$)、を用いて $\kappa_f(t)$ を順時間方向に求める。(22)式で $\dot{\kappa}(t)$ の解が存在しなくなれば、その時刻を t_{fi+1} とし、 $t=t_{fi+1}, i=i+1$ として(iii)へ。

(iii) 境界 $\Gamma(t)$ 上の許容域を左側に見るように $\kappa_f(t)$ ($t \geq t_{fi}$) を与える。 $\dot{\kappa}_f(t)$ が(22)式の許容値をはじめともつようになったとき、その時刻を t_{fi+1} とする。時刻 t_{fi+1} において $\dot{\kappa}(t_{fi+1})=\dot{\kappa}_{\min}(t_{fi+1})$ ($=\dot{\kappa}_{\max}(t_{fi+1})=\dot{\kappa}_{\max}(t_{fi+1})$) から出発して、逆時間方向に $\dot{\kappa}(t)=\dot{\kappa}_{\max}(t)$ ($t \leq t_{fi+1}$) を用いて軌道 $\kappa_{fb}(t)$ を求める。軌道 $\kappa_f(t)$ と軌道 $\kappa_{fb}(t)$ が交わる時刻を t_{ui} とする(注3)。このとき求める軌道 $\kappa_f(t)$ をつぎのように更新する。

$$\kappa_f(t) = \begin{cases} \kappa_f(t) & 0 \leq t \leq t_{ui} \\ \kappa_{fb}(t) & t_{ui} \leq t \leq t_{fi+1} \end{cases} \quad (24)$$

$t=t_{fi+1}, i=i+1$ とおき(ii)へ。

(2) $\kappa_b(t)$ の求め方

$t=t_0$ から逆時間方向に、 $\kappa_f(t)$ を求める場合と同様な手順で得られるので省略する。

上記の手順で得られた $\kappa_{opt}(t)$ が最短時間動作を与える $\kappa(t)$ の軌道であることは以下のように示される。

動作時間は(14)式で得られるから、 $\kappa_{opt}(t)$ が最短時間軌道を与えることを示すには、 $0 \leq t \leq t_0$ のどの時刻 t においても $\kappa_{opt}(t)$ より下に $\kappa(t)$ の軌道が存在しないことをいえばよい。

時刻 t_0 までの順時間方向に得られた $\kappa_{opt}(t)$ について考える。Fig. 7 を参照すると、手順(1)の(i)によって得られる t_{u1} までの軌道 $\kappa_f(t)$ は(21)式を満たす $\dot{\kappa}_{\min}(t)$ によって定まっているので、この軌道より下に $\kappa(t)$ を得ることはできないことは明らかである。

つぎに、 $t_{u1} \leq t \leq t_{f2}$ において、手順(1)の(ii)によって得られた軌道 $\kappa_f(t)$ ($t_{u1} \leq t \leq t_{f1}$)、境界 $\Gamma(t)$ ($t_{u1} \leq t \leq t_{f2}$) および手順(1)の(iii)で得られた $\kappa_{fb}(t)$ ($t_{u1} \leq t \leq t_{f2}$) の三つの境界によって囲まれた領域を考え、この領域内で $\kappa_{fb}(t)$ より下に軌道を求めることができるかどうかを調べる。この領域から出発する $\kappa(t)$ は、境界 $\Gamma(t)$ または $\kappa_{fb}(t)$ のいずれかと交わる(接する場合も含める)。境界 $\Gamma(t)$ と交わる場合を考えると、手順(1)の(iii)より、許される軌道は時刻 t_{f2} におい

(注3) $\kappa_{fb}(t)$ は境界 $\Gamma(t)$ 上で $\kappa_f(t)$ と交わることはない。もし $\Gamma(t)$ と交わるとすれば、その時刻 t_0 において $\dot{\kappa}(t_0)$ が許容値をもつことになるので、時刻 t_{fi+1} で許容値をはじめともつことに矛盾する。

て境界 $\Gamma(t)$ と交わるもの以外にはないことがわかる。また、この軌道は(21)式の条件を満たすので、結局、境界 $\Gamma(t)$ と交わる軌道は $\kappa_{fb}(t)$ だけである。一方、この領域内から出発する軌道が $\kappa_{fb}(t)$ と交わることがないことは(21)式から明らかである。したがって、 $0 \leq t \leq t_{f2}$ のどの時刻 t においても $\kappa_{opt}(t)$ より下に軌道 $\kappa(t)$ を得ることはできない。

$t_{f2} \leq t \leq t_0$ の範囲でも同様な証明が行える。また、 $t_0 \geq t \geq t_0$ で得られた $\kappa_{opt}(t)$ についてもその最適性を同様に証明できる。以上により、 $\kappa_{opt}(t)$ が最短時間動作を与える軌道であることが示された。

なお、得られた最短時間軌道計画のアルゴリズムは、Shin ら⁴⁾の n - λ 位相面を用いるアルゴリズムとつぎのような対応関係がある。すなわち、基準軌道の時刻 t と空間経路に沿う移動量 λ 、時間スケールファクタ $\kappa(t)$ と λ の時間微分の逆数 $1/\dot{\lambda}$ とがそれぞれ対応する。ここで提案したアルゴリズムでは、動作時間の短縮量が $\kappa(t)=1.0$ と $\kappa_{opt}(t)$ とで囲まれた部分の面積として表わせるので、動作時間改善の割合がより直感的にとらえられる。

7. あとがき

空間経路が指定されている場合について、マニピュレータ各関節の時間軌道をどのように与えれば動作時間を短縮できるかを検討した。

ここでは、時間スケールファクタを用いることにより、この問題をきわめて簡明な形で定式化できることを示した。また、定式化された問題を解くために、動作時間を逐次短縮する方法を提案した。この方法は実行可能解法であり、得られた解の適用可能性を確認しながら解を改善することができ、そのアルゴリズムも簡単である。例として、4自由度をもつマニピュレータの時間軌道計画にこの方法を適用し、その有効性を確認した。さらに、最短の動作時間を与える軌道を直接求めることも示した。

今後の課題としてつぎのような点が残されている。すなわち、逐次短縮化の方法では、Bスプラインの位数や k_i の設定点数 n をどの程度に定めるのが適切であるかを検討すること、最短時間軌道を効率よく求めるプログラムを開発することなどである。

参考文献

- 1) J. Y. S. Luh and C. S. Lin: Optimum Path Planning for Mechanical Manipulators, Trans. of ASME, J. of Dyn. Sys. Meas. and Contr., **G-102-6**, 142/151 (1981)
- 2) C. S. Lin, P. R. Chang and J. Y. S. Luh: Formulation

- and Optimization of Cubic Polynomial Joint Trajectories for Industrial Robots, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-28-12**, 1066/1074 (1983)
- 3) S. Dubowsky and Z. Shiller: Optimum Dynamic Trajectories for Robotic Manipulators, Procs. of RoManSy, 5th CISM-IFTOMM Symp., 133/143 (1984)
 - 4) K.G. Shin and N.D. McKay: Minimum-Time Control of Robotic Manipulators with Geometric Path Constraints, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-30-6**, 531/541 (1985)
 - 5) R.P. Paul: Robot Manipulators—Mathematics, Programming, and Control—, The MIT Press, 157/172 (1982)
 - 6) J.Y.S. Luh: Conventional Controller Design for Industrial Robots—A Tutorial, IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, **SMC-13-3**, 298/316 (1983)
 - 7) D.F. Rogers and J.A. Adams: コンピュータグラフィックス, 日刊工業新聞社, 161/172 (1980)
 - 8) J.Y.S. Luh, M.W. Walker and R.P.C. Paul: On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators, Trans. of ASME, J. of Dyn. Sys. Meas. and Contr., **G-102-6**, 69/72 (1980)
 - 9) M.W. Walker and D.E. Orin: Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms, Trans. of ASME, J. of Dyn. Sys. Meas. and Contr. **G-104-9**, 205/211 (1982)
-