弾性支持 2 自由度ジャイロの運動方程式に
関する一考察†

新 宮 博 公*

On the Motion Equation of an Elastically Supported
Two Degree of Freedom Gyro

Hirokimi SHINGU*

1. ま え が き

TDG (Tuned Dry Gyro) は, Craig によって一般的理論が確立¹⁾されて以来急速に実用化が進み, 各種ミッションに適用されてきた²⁾. 最近では TDG のスピン軸方向に不釣合質量を付加し, 1 個で 2 軸方向の直線加速度, 角速度が同時に計測可能な加速度計ジャイロ装置が設計解析されている³⁾. このように TDG の運動原理は適用上の有用性が高いと思われるので, 本稿では TDG の運動解析に的をしぼり, TDG の一般式^{1), 4)}の厳密化を試みた. TDG の一般式は, ロータのケースに対する相対角変位 θ が十分小さい ($\theta \ll 1$) 範囲, すなわち $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$ が近似許容される範囲で有効であるが, TDG は通常リバランス制御回路⁵⁾を付してサーボ系として使用するためその仮定は十分妥当性を有している. しかし, $\theta \ll 1$ なる条件を除けば, ジャイロはチューニング条件⁴⁾を有する TDG としてではなく, 単に弾性支持された 2 自由度ジャイロ (以下, ETG; Elastically Supported Two Degree of Freedom Gyro) として機能する. したがって, TDG は特殊な状態 ($\theta \ll 1$) における ETG であるといえる. 本研究では, $\theta \ll 1$ なる仮定を取り除いて $\sin \theta$, $\cos \theta$ をそのまま用いたジャイロ (ETG) の運動を解析し, ETG の角変位 ϕ と θ とを関係づける運動方程式を導くとともに, この解と Craig 解¹⁾との差をシミュレーションし, 入力の大きさと周波数に対応した Craig 解の精度評価を行った.

本文で用いる主要な記号はつぎのとおりである.

- A, B, C ; ロータの x_r, y_r, z_r 軸まわりの慣性モーメント
- A_1, B_1, C_1 ; ジンバルの x_1, y_1, z_1 軸まわりの慣性モーメント
- D_{x_1}, D_{y_1} ; ヒンジの x_1, y_1 まわりの減衰係数
- D_R ; ロータ, ケース間の減衰係数
- H_0, H_1 ; ロータ, ジンバルの角運動量ベクトル
- K_{x_1}, K_{y_1} ; ヒンジの x_1, y_1 まわりの振れ剛性
- M_{Rxr}, M_{Ryr} ; ロータに作用する x_r, y_r 軸まわりのトルク
- N ; シャフトの対慣性空間角速度
- N' ; シャフトの対ケース角速度
- T_D ; ロータ, ケース間のドラッグトルク
- x, y, z ; シャフト固定軸 (z ; スピン軸)
- x_1, y_1, z_1 ; ジンバル固定軸 ($x_1 = x$; 内部ヒンジ軸, y_1 ; 外部ヒンジ軸)
- x_r, y_r, z_r ; ロータ固定軸 (z_r ; ロータスピン軸)
- X, Y, Z ; ケース固定軸 (X, Y ; 入力軸, $Z = z$; シャフトスピン軸)
- θ ; ロータの対ケース相対角変位
- θ_x, θ_y ; θ の x_1, y_1 軸まわりの成分
- θ_X, θ_Y ; θ の X, Y 軸まわりの成分
- ϕ_X, ϕ_Y, ϕ_Z ; ETG の X, Y, Z 軸方向の角速度
- $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; シャフトの対慣性空間角速度
- $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$; ジンバルの対慣性空間角速度
- $\omega_{x_r}, \omega_{y_r}, \omega_{z_r}$; ロータの対慣性空間角速度

上記の各記号の接尾辞はその座標軸方向の成分を意味するが, 文中で接尾辞が ϕ_{xy} のように付されているときには複素数表示 ($\phi_{xy} = \phi_x + j\phi_y$) を意味する. また, ある変数 λ について $[\lambda]_1, [\lambda]_2, [\lambda]_3$ のような

† 第 26 回自動制御連合講演会で発表 (昭 58・11)

* 航空宇宙技術研究所 調布市深大寺東町 7-44-1

* National Aerospace Laboratory, Chofu

(Received March 11, 1986)

Key Words: gyro, motion equation, inertial sensor

表現は、座標系 $[l_x, l_y, l_z]$ がそれぞれ l_x, l_y, l_z 軸まわりに回転したときの座変行列を意味する。

2. ETG の運動解析

ETG の構造概念は、TDG とまったく同様で Fig. 1 のようになる。ジンバルは単一ジンバル構造⁴⁾とし、ケースの動き ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z は N に比して十分小さいと仮定する。また、各座標軸間の関係および単位ベクトルは Fig. 2 のように定める。Craig の一般解¹⁾ は $\theta_x, \theta_y \ll 1, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y \ll N$ を仮定しているが、本研ではそれらの仮定を取除いて解析を進める。

2.1 角速度間の関係

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ を構成する要素は $\phi_x, \phi_y, \phi_z, N$ であるから、それらの関係は Fig. 2 より

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi}_x \cos Nt + \dot{\phi}_y \sin Nt \\ \omega_y &= -\dot{\phi}_x \sin Nt + \dot{\phi}_y \cos Nt \\ \omega_z &= \dot{\phi}_z + N' = N \approx N' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

となる。 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ に関する要素は $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ のほかに $\dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y$ があるので、それらの関係は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \theta_y \\ \theta_x \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\omega_x + \dot{\theta}_x) \cos \theta_y + \omega_y \sin \theta_x \sin \theta_y - \omega_z \cos \theta_x \sin \theta_y \\ \dot{\theta}_y + \omega_y \cos \theta_x + \omega_z \sin \theta_x \\ (\omega_x + \dot{\theta}_x) \sin \theta_y - \omega_y \sin \theta_x \cos \theta_y + \omega_z \cos \theta_x \cos \theta_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。また、ジンバルの運動に関しては $\dot{\theta}_y$ を考慮する必要はない⁴⁾ので、 $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$ は

$$\begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x + \dot{\theta}_x \\ \omega_y \cos \theta_x + \omega_z \sin \theta_x \\ -\omega_y \sin \theta_x + \omega_z \cos \theta_x \end{bmatrix} \quad (3)$$

となる。

Fig. 1 Configuration of ETG

Fig. 2 Coordinate sets fixed to case, shaft, gimbal and rotor

2.2 運動方程式の誘導

ジンバル、ロータの角速度ベクトル ω_1, ω_0 、角運動量ベクトル H_1, H_0 を成分に分けて表わせば

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{x1} i_1 + \omega_{y1} j_1 + \omega_{z1} k_1 \\ H_1 &= A_1 \omega_{x1} i_1 + B_1 \omega_{y1} j_1 + C_1 \omega_{z1} k_1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \omega_x i_r + \omega_y j_r + \omega_z k_r \\ H_0 &= A \omega_x i_r + B \omega_y j_r + C \omega_z k_r \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となる。Fig. 1 のモデルにおいてロータがジンバルに与えるトルクの x_1, y_1 軸方向成分 T_{x1}, T_{y1} は

$$\left. \begin{aligned} T_{x1} - T_{x0} &= [(\dot{H}_1)_I]_{x1} \\ T_{x0} &= K_{x1} \theta_x + D_{x1} \dot{\theta}_x \\ T_{y1} &= K_{y1} \theta_y + D_{y1} \dot{\theta}_y \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となる⁴⁾。ここで $[(\dot{H}_1)_I]_{x1}$ は、 H_1 の慣性座標に対する時間的変化の x_1 軸方向成分を意味する（以下同様）。 I が q, r のときはジンバル、ロータ座標に対する時間的変化を意味する。 $(\dot{H}_1)_I$ は

$$(\dot{H}_1)_I = (\dot{H}_1)_0 + \omega_0 \times H_1 \quad (7)$$

と表わせるので、(4)~(7)式より T_{x1}, T_{y1} は

$$\left. \begin{aligned} T_{x1} &= K_{x1} \theta_x + D_{x1} \dot{\theta}_x + A_1 \dot{\omega}_{x1} + (C_1 - B_1) \omega_{y1} \omega_{z1} \\ T_{y1} &= K_{y1} \theta_y + D_{y1} \dot{\theta}_y \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となる。一方、ロータが外部から受けるトルク T_{Rxr}, T_{Ryr} は、 M_{Rxr}, M_{Ryr}, T_D ($T_D < 0, -z$ 軸方向)、 $-D_R \dot{\theta}_x, -D_R \dot{\theta}_y$ (x_1, y_1 軸方向)、 $-T_{x1}, -T_{y1}$ より構成される¹⁾ので、それらの和をロータ固定座標系で表わせば (Fig. 2 を適用)、

$$\left. \begin{aligned} T_{Rxr} &= M_{Rxr} - T_D \cos \theta_x \sin \theta_y - D_R \dot{\theta}_x \cos \theta_y - T_{x1} \cos \theta_y \\ T_{Ryr} &= M_{Ryr} + T_D \sin \theta_x - D_R \dot{\theta}_y - T_{y1} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となる。 T_{Rxr}, T_{Ryr} によるロータの角運動量変化は

$$\left. \begin{aligned} T_{Rxr} &= [(\dot{H}_0)_I]_{xr} = [(\dot{H}_0)_r + \omega_0 \times H_0]_{xr} \\ T_{Ryr} &= [(\dot{H}_0)_I]_{yr} = [(\dot{H}_0)_r + \omega_0 \times H_0]_{yr} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

となる。(8)~(10)式よりロータの運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} A\dot{\omega}_{x_r} + (C-B)\omega_{y_r}\omega_{z_r} \\ = M_{Rz_r} - T_D \cos\theta_x \sin\theta_y - D_R \dot{\theta}_x \cos\theta_y \\ - \{K_{x_1}\theta_x + D_{x_1}\dot{\theta}_x + A_1\dot{\omega}_{x_1} \\ + (C_1-B_1)\omega_{y_1}\omega_{z_1}\} \cos\theta_y \\ B\dot{\omega}_{y_r} - (C-A)\omega_{z_r}\omega_{x_r} \\ = M_{Ry_r} + T_D \sin\theta_x - D_R \dot{\theta}_y \\ - (K_{y_1}\theta_y + D_{y_1}\dot{\theta}_y) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となる。上式に(2)、(3)式を適用するとつぎのような ETG の運動方程式が得られる。

$$\left\{ \begin{aligned} (A+A_1)\cos\theta_y \dot{\theta}_x + F_1 &= M_{Rz_r} \\ B\dot{\theta}_y + F_2 &= M_{Ry_r} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(12)式の F_1 , F_2 は、変位角 θ とその変化率 $\dot{\theta}$ 、シャフトの角速度 ω とその変化率 $\dot{\omega}$ の各成分で構成され

$$\begin{aligned} F_1 &= \{ (C-B-A)\dot{\theta}_y + (C-B+A)u_1 \} \sin\theta_y \\ &\quad + (D_R + D_{x_1})\cos\theta_y \dot{\theta}_x \\ &\quad + (C-B-A) \{ \omega_x \sin\theta_y - u_2 \cos\theta_y \} \dot{\theta}_y \\ &\quad + K_{x_1}\theta_x \cos\theta_y + T_D \cos\theta_x \sin\theta_y \\ &\quad + \{ (A+A_1)\cos\theta_y \} \dot{\omega}_x \\ &\quad + A(\dot{\omega}_y \sin\theta_x - \dot{\omega}_x \cos\theta_x) \sin\theta_y \\ &\quad + (C-B)u_1 \omega_x \sin\theta_y \\ &\quad - (C-B+C_1-B_1)u_1 u_2 \cos\theta_y \\ F_2 &= - \{ (C-A)\cos\theta_y \sin\theta_y \} \dot{\theta}_x^2 \\ &\quad + [- (C-A)\omega_x \sin 2\theta_y \\ &\quad - \{ B - (C-A)\cos 2\theta_y \} u_2 + D_R + D_{x_1}] \dot{\theta}_x \\ &\quad + K_{y_1}\theta_y - T_D \sin\theta_x + B(\dot{\omega}_y \cos\theta_x + \dot{\omega}_x \sin\theta_x) \\ &\quad - (C-A) \{ \omega_x \cos\theta_y + u_2 \sin\theta_y \} \{ \omega_x \sin\theta_y \\ &\quad - u_2 \cos\theta_y \} \end{aligned} \quad (13)$$

のようになる。ここで u_1 , u_2 は

$$\left\{ \begin{aligned} u_1 &= \omega_y \cos\theta_x + \omega_x \sin\theta_x \\ u_2 &= \omega_y \sin\theta_x - \omega_x \cos\theta_x \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

である。 ω の成分は ϕ_x , ϕ_y , N よりなる ((1)式) ので(12)式を解けば入力 (ϕ_x , ϕ_y または ϕ_x , ϕ_y) に対する出力 θ_x , θ_y が求まるが、この θ_x , θ_y は

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_x &= \tan^{-1}(\cos Nt \tan\theta_x) - \tan^{-1}(\sin Nt \cos\theta_x \tan\theta_y) \\ \theta_y &= \tan^{-1}(\sin Nt \tan\theta_x) + \tan^{-1}(\cos Nt \cos\theta_x \tan\theta_y) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

によって θ_x , θ_y に変換できる。 θ_x , θ_y が微小なときには $\theta_{xy} = \theta_{xy} e^{jNt}$ なる変換が使える¹⁾。

以上の各式を導く過程において

$$\left\{ \begin{aligned} \sin\theta_i &= \theta_i, \cos\theta_i = 1, \theta_i \dot{\theta}_i = 0 \\ \dot{\theta}_i &\ll N, \phi_x, \phi_y, \dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y \ll N, i, j = x, y \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

なる仮定および

$$D_{x_1} = D_{y_1} = D, \theta_{xy} = \theta_{xy} e^{jNt}, \dot{\theta}_{xy} = \dot{\theta}_{xy} e^{jNt} \quad (18)$$

なる仮定を用いれば、単一ジンバル系としての TDG の Craig 解^{1),4)} が得られる。

3. Craig 解の精度評価

前章で求めた ETG の運動方程式を基準にして Craig 解がどの程度の精度で成立するかをシミュレーションによって評価した。入力としては、ケースが Z 軸に垂直な軸まわりに振動するとして

$$\phi_{xy} = \phi_0 e^{j\beta} \sin(2\pi f t + \varphi) \quad (19)$$

を仮定する。ここで ϕ_0 , f , φ は振動の振幅、周波数、位相であり、 β は振動の軸が X 軸となす角である。ETG のパラメータは国産 TDG の諸元⁵⁾を用いた。評価結果として、Craig 解の精度は、振動方向 β にはほとんど依存しないが、 ϕ_0 , f の増大とともに低下することがわかった。数値解の一例を示せば、 $f = 20$ Hz における Craig 解の精度は、 $\phi_0 = 5, 10, 20$ 度でそれぞれ 0.2, 0.5, 1% になる(紙面の都合で数値解の詳細は省略)。なお、TDG は通常 θ が ± 0.3 度以下に設計製作されるので近似化誤差は 10^{-5} 以下である⁴⁾。

4. あとがき

本研究では、Fig. 1 のようなモデルにおいて $\theta \ll 1$ なる仮定を取り除いたときのロータの挙動を解析し、その運動方程式を導くとともに、Craig 解がどの程度の精度で成立するかを数値的に評価した。これによってジャイロダイナミクスの側面から θ の大小に拘束されない ETG の運動を論ずる一手順を明らかにすることができた。ETG のモデルは単一ジンバル系を仮定したが、今後の課題として多ジンバル系^{1),4)} をモデルとした解析が残されている。また、TDG は stop plate⁶⁾ によって θ がある値(国産品で ± 0.3 度)以下に抑えられているので解析結果の実験的な評価はできないが、将来 θ の値が大幅に許容されるような ETG を試作すれば実験も可能となる。最後に、本研究を進めるにあたり国産 TDG の研究開発関係者⁶⁾ との日頃の討論が有益だったことを付記し、謝辞としたい。

参考文献

- 1) R. J. G. Craig: Theory of Operation of an Elastically Supported Tuned Gyroscope, IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, AES-8-3, 280/288 (1972)
- 2) 金井, はか: 姿勢センサ, 日本航空宇宙学会誌, 30-336, 15/25 (1982)
- 3) T. J. Ryan: A Novel Approach for the Design of a Dry-Tuned Accelerometer/Gyro Instrument, Journal of Guidance, 7-1, 20/28 (1984)
- 4) 新宮, はか: チューンドドライジャイロの近似伝達関数の有用性, 航技研報告, TR-720 (1982)
- 5) 新宮, 大月: チューンドドライジャイロの非干渉制御の方式, 航技研報告, TR-857 (1985)
- 6) M. Ikeuchi, et al.: Research and Development of Tuned Dry Gyro, Proceedings of the 14th ISTS, 667/672 (1982)