時変信号解析における Wigner 分布と MEM[†]

小林 史典*・三浦 信幸*

Wigner Distribution and the MEM in the Analysis
of Time-Varying Signals

Fuminori KOBAYASHI* and Nobuyuki MIURA**

1. はじめに

周波数スペクトルの分析法としては、信号の周期に対してデータ長が短い場合も分解能の高い推定ができる最大エントロピー法 (MEM) が現在主流である¹⁾。

一方最近、周波数と振幅がどちらも時変な信号には Wigner 分布 (distribution) が有効であると報告されている²⁾。これは時間と周波数を独立変数にもつ関数で、1932 年に Wigner が提案し、1978 年頃から応用が始まった。現在、音声信号を中心に、分布自体の性質や信号合成などへの応用が盛んに研究されている。

ところが、この新しい Wigner 分布法が既存の分析法に対して具体的にどのように優位であるかについては、短時間フーリエ変換との比較³⁾がある程度では、十分な情報が与えられていない。そこで本稿では、単一周波数成分の時変信号を分析し、よく使われている MEM との比較検討を行う。

2. Wigner 分布

2.1 原理

時変信号 $f(t)$ の Wigner 分布は

$$W_f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) d\tau \quad (1)$$

で定義される。ここで * は複素共役関数を表す。

2.2 疑似 Wigner 分布

(1) 式は積分範囲が $-\infty \sim +\infty$ なので、実際の信号に対して数値計算を行うためには、 $f(t)$ に、 $|t|$ が大きいところでゼロとなる窓関数 $w(t)$ をかける必要

がある。

いま時刻 τ を中心にして窓を $f(t)$ にかけた信号：

$$f_\tau(t) = f(t)w(t-\tau) \quad (2)$$

の Wigner 分布は、窓のそれを W_w として次式で表わされる²⁾。

$$W_{f_\tau}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(t, \Omega) W_w(t-\tau, \omega-\Omega) d\Omega \quad (3)$$

すなわち、窓の位置 τ にも依存する Wigner 分布が得られる。ここで $\tau=t$ における Wigner 分布を考える

$$W_{f_\tau}(t, \omega)|_{\tau=t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(t, \Omega) W_w(0, \omega-\Omega) d\Omega \quad (4)$$

を得る。この t と ω の関数が疑似 (pseudo) Wigner 分布である。疑似 Wigner 分布は、(4) 式より、元の Wigner 分布 W を $t=0$ のときの窓の Wigner 分布：

$$W_w(0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} w^2\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau \quad (5)$$

のフィルタに通したものであるから、窓を適切に選ばば本来の Wigner 分布をよく近似する。

2.3 疑似 Wigner 分布の計算法

(4) 式の疑似 Wigner 分布を離散信号に適用すると、

$$W_{f_t}\left(n, m\frac{\pi}{M}\right) = 2 \sum_{k=-L+1}^{L-1} e^{(-jkm2\pi/M)} p(k)g(n, k) \quad (6)$$

$$m=0, 1, \dots, M-1$$

と定義される。ここで M は全データ長、 L は窓の片側長、 $p(k)$ 、 $g(n, k)$ は、サンプル間隔を Δt とし、簡単のため $w(k\Delta t)$ を $w(k)$ 、 $f(k\Delta t)$ を $f(k)$ として、つぎの 2 式を表わす：

$$p(k) = w(k)w^*(-k) \quad (7a)$$

$$g(n, k) = f(n+k)f^*(n-k) \quad (7b)$$

(6) 式から、 $p(k)g(n, k)$ を新たな信号とみなすと、疑似 Wigner 分布はその信号の DFT として求められる。

† 第 24 回計測自動制御学会学術講演会で発表
(昭 60・7)

* 長岡技術科学大学 長岡市上富岡町 1603-1

** Technological University of Nagaoka, Nagaoka
(Received February 7, 1986)

(Revised June 11, 1986)

る。

なお、Wigner 分布で信号を直接分析すると一種のエイリアシングを生じる。そこで、一般に解析信号をとり、それを分析する。

3. MEM との比較

Fig. 1 のような信号（データ数： $N=256$ ）を用い、Wigner 分布と MEM で各時刻の周波数スペクトル推定した。原信号の解析信号をとり、Hanning 窓（長さは全データ長の $1/2$ ）をかけて求めた疑似 Wigner 分布と、原信号に長さが全データの $1/2$, $1/6$, $1/16$ の Hanning 窓をかけて MEM で求めたスペクトルを

Fig. 1 Sample time-varying signal $f(t)$

(a) PWD with window length $L=N/2$

(b) MEM with window length $L=N/2$

(c) MEM with window length $L=N/6$

(d) MEM with window length $L=N/16$

Fig. 2 Pseudo Wigner distribution (PWD) and MEM of $f(t)$

Fig. 2 に示す。MEM の自己回帰モデルの最高次数は $32(=21/\sqrt{N})$ とした。

Fig. 2(a) より、疑似 Wigner 分布では、周波数と振幅が時間とともに変化している様子が明確である。

MEM の場合、窓長 $L=N/6$ では変化の様子がわかる程度わかるが、疑似 Wigner 分布には劣る。そして、窓が長すぎる ($L=N/2$) と、実際には時変な周波数と振幅がほぼ一定と観測され、また短すぎる ($L=N/16$) と周波数と振幅の変化が不明瞭になる。なお、自己回帰モデルの最高次数の影響は少なかった。

周波数と振幅の変化がどの程度忠実に観測されているかを評価するために、二つの分析結果から各時刻でのスペクトル・ピークの周波数とその高さを求めてプロットしたものを Fig. 3 に示す。最下段は、解析信号から瞬時周波数と瞬時振幅を求めたもの（周波数成分が単一の場合、きわめて精度がよい）⁴⁾である。この図からも、Wigner 分布のほうが優れていることがわかる。

Wigner 分布は、上述のように、対象の周波数成分が単一の場合は優れた性能を示すが、成分が複数になると、それらの間に相互干渉項 (cross-Wigner 分布) が発生する。この問題は、現在の Wigner 分布の中心的研究テーマとなっており、筆者らも検討中である。ここでは、複数成分信号と考えられるランダム雑音の影響を示すに留めておく。

Fig. 4 は、Fig. 1 の信号に S/N 比=10 dB の雑音を加わった場合の疑似 Wigner 分布である。これより、10 dB 程度であれば雑音がない場合 (Fig. 2(a)) とほぼ同じであり、相互干渉の影響は実用的には問題

Fig. 3 Amplitude and frequency of spectral peaks by MEM and PWD, compared with those by the analytic signal

Fig. 4 PWD of $f(t)$ with white noise (SNR=10 dB)

Table 1 Computation time

Wigner distribution	1 min 57 s
MEM (window length $L=N/6$)	20 min 53 s

ないと考えられる。

最後に、疑似 Wigner 分布と、窓長 $L=N/6$ の MEM との計算時間の比較を Table 1 に示す。使用した処理系は Turbo Pascal 8087 (PC-9801) である。Table 1 より、予測誤差が最小になる自己回帰モデルの次数を決定するために連立方程式を繰返し解かなければならない MEM に比較して、疑似 Wigner 分布は約 1 けた速く、処理速度の点でも優れていることがわかる。

4. おわりに

時間-周波数分析の一手法として応用が広がってきた Wigner 分布を、現在スペクトル解析の主力手法である MEM と比較し、Wigner 分布の有効性を具体的に評価した。

今後の課題は、複数周波数成分をもつ信号への適用を、相互項の除去とあわせて考えることである。

参考文献

- 1) たとえば、赤池、中川：ダイナミックシステムの統計的解析と制御、サイエンス社 (1979)
- 2) T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbrauker: The Wigner Distribution, Philips J. Res., **35**, 217/250, 276/300, 372/383 (1980)
- 3) P. Flandrin, et al.: An Interpretation of the Pseudo-Wigner-Ville Distribution, Signal Processing, **6-1**, 27/36 (1984)
- 4) 岩田、ほか：ヒルベルト変換による画像の局所周波数解析、電子通信学会技術研究報告, PRL 84-27 (1984)