翼形流量計の設計

浦田 暎 三*

Design of a Wing-Type Flowmeter

Eizo URATA*

Theory and design principle for a new flowmeter is submitted.

Suppose a pair of wings is supported in point symmetry on the central axis of a transparent circular cylinder, and the wing pair is connected to casing with a helical spring. A couple of lift is generated when flow of fluid is introduced to the cylinder. The couple of lift rotates the wing pair until it is balanced by reaction moment of the helical spring. This deflection angle of the wing pair indicates the flow rate through the cylinder.

This paper describes theory, design and experiment on the above explained flowmeter. The experimental result coincides well with the theoretical estimation.

Key Words: flow measurement, flowmeter, wing, wing-type flowmeter, circulation, lifting line theory

1. はし が き

直視式の流量計として、浮子面積式流量計がひろく用いられているが、周知のようにこの流量計は鉛直に立てて使わなければならない。流量計の作動原理に重力が関係しないようにすれば、流量計の設置角度を任意にすることができる。そこで Fig. 1 に示すように、軸をはさんで表裏を逆にした一対の翼を流体中に置くとしよう。流体がこの翼に当たると、翼には揚力が逆方向に働くから、この翼対にはモーメントが作用する。このモーメントを軸に取りつけたばねで釣り合わせれば、翼対の回転角によって流速が知られるであろう。Fig. 2 のようにこの翼対を透明な円筒内に納めれば、翼対の回転角を読みとって流量を知ることができ、設置角度も自由に選ぶことができる。本報告は

Fig. 1 Wing pair

Fig. 2 Wing-type flowmeter

この原理で作動する流量計を試作し、特性を調べた結果を述べるものである。

2. 理 論

翼対に対する座標系は Fig. 1 のようにとる。すなわち翼対は y 軸に平行とし、原点は回転軸上にとる。 x 軸は回転軸と一致し、 z 軸は右手系となるように定める。翼を y 軸に一致する直線で代表させ、翼から流出する渦糸の強さを $d\Gamma(y)$ とする。翼上の任意の点 y に対して、 y' から流出する渦糸により、Fig. 3 に示す誘起速度 $dw(y)$ が生じ、その大きさは Biot-Savart の法則によって

$$\begin{aligned} dw(y) &= -\frac{d\Gamma(y')}{4\pi} \int_0^\infty \frac{(y'-y)dx}{\{x^2+(y'-y)^2\}^{3/2}} \\ &= -\frac{d\Gamma(y')}{4\pi(y'-y)} \end{aligned} \quad (1)$$

* 神奈川大学工学部 横浜市神奈川区六角橋 3-27-1

* Faculty of Engineering, Kanagawa University, Yokohama

(Received March 12, 1986)

(Revised July 10, 1986)

Fig. 3 Vortex thread and induced velocity

である。\$y\$ に生じる誘起速度はすべての渦糸からの作用を合計したものであるから、

$$w(y) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{d\Gamma(y')}{4\pi(y'-y)} \quad (2)$$

である。

翼対は半径 \$R\$ の円筒に納められているとして、その円筒を下流側から見たときの渦糸を Fig. 4 に示す。

翼対は原点に対して点対称に配置してあるので、\$y'\$ に \$d\Gamma(y')\$ の渦糸があれば、\$-y'\$ にも \$d\Gamma(y')\$ の渦糸がある。また円筒は固体境界であるから、壁に垂直な速度成分は零である。この境界条件を満足させるためには、\$y'\$ にある渦糸 \$d\Gamma\$ に対して、\$R^2/y'\$ の位置に \$-d\Gamma\$ の渦糸を置けばよい。同様に \$-R^2/y'\$ にも \$-d\Gamma\$ の渦糸を置く。このように考えると、(2)式の積分区間は、\$(-\infty, \infty)\$ から \$(a, R)\$ に置きかえられ、(2)式は

$$w(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_a^R K(y, y') \frac{d\Gamma(y')}{dy'} dy' \quad (3)$$

となる。ただし \$a\$ は回転軸の半径で、

$$K(y, y') = \frac{1}{y' - y} - \frac{1}{(R^2/y') - y} + \frac{1}{y' + y} - \frac{1}{(R^2/y') + y} \quad (4)$$

である。これから循環分布を求める Prandtl の積分方程式は^{1), 3)}

$$\frac{\Gamma(y)}{\pi\sigma V l} = \alpha_0 + \frac{1}{4\pi V} \int_a^R K(y, y') \frac{d\Gamma(y')}{dy'} dy' \quad (5)$$

である。ただし \$V\$ は翼にあたる流速、\$l\$ は弦長、\$\sigma\$ は翼形によって定まる定数 (\$\sigma=1\sim 0.8\$)、\$\alpha_0\$ は幾何迎角 (無揚力角から測る) である。(5)式を厳密に解くには数値計算が必要になるが、ここでは以下のような近似計算を行う。

まず

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta' &= (y' - h)/r \\ r &= (R - a)/2, \quad h = (R + a)/2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Fig. 4 Boundary condition and image vortices

とおくとき、\$\Gamma(y')\$ はつぎの Fourier 級数で表わせる。

$$\Gamma(y') = 4Vr \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta' \quad (7)$$

\$a_1, a_2, \dots\$ を求めるのであるが、ここでは(7)式の右辺第1項のみで代表されるとき、\$\Gamma(y') \doteq 4Vr a_1 \sin \theta'\$ とし、これを(5)式の両辺に代入する。両辺を区間 \$(a, R)\$ で積分して平均を求めた式から \$a_1\$ を求めることができる。積分の結果は (付録参照)

$$\left. \begin{aligned} \frac{(R-a)^2 a_1}{2\sigma l} &= \alpha_0(R-a) - a_1 \varphi(R, a) \\ \varphi(R, a) &= 3R - a - 2\sqrt{2R(R+a)} + \sqrt{2a(R+a)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となり、これから

$$a_1 = \frac{\alpha_0}{\{(R-a)/2l\sigma\} + \varphi(R, a)/(R-a)} \quad (9)$$

となる。翼のアスペクト比 \$A\$ は、

$$A = (R-a)/l \quad (10)$$

で、翼の有効迎角 \$\alpha_e\$ は

$$\alpha_e = a_1 \frac{A}{2\sigma} = \frac{\alpha_0}{1 + 2\sigma l \varphi(R, a)/(R-a)^2} \quad (11)$$

となる。もちろん \$\alpha_e\$ も無揚力角から測った値である。

揚力を \$L\$ とすると、翼対に作用する軸まわりのモーメント \$M\$ は、

$$M = 2 \int_a^R L y dy = 2 \int_a^R \frac{1}{2} \rho V^2 l c_L \cdot y dy \quad (12)$$

である。揚力係数 \$c_L\$ は有効迎角 \$\alpha_e\$ を用いて平均値

$$c_L = 2\pi\sigma\alpha_e \quad (13)$$

を用いることにすると、(12)式は

$$M = \pi\sigma\alpha_e \rho V^2 l (R^2 - a^2) \quad (12')$$

となる。このモーメントがうず巻きばねのばねトルク \$k\theta\$ とつり合うものとすれば、

$$k\theta = \pi\sigma\alpha_e \rho V^2 l (R^2 - a^2) \quad (14)$$

$$\therefore V = \sqrt{\frac{k\theta}{\pi\sigma\alpha_e \rho l (R^2 - a^2)}} \quad (15)$$

である。流路断面積を \$A\$ とすると、流量 \$Q\$ は

$$Q = AV = A \left\{ \frac{1 + 2\sigma l \varphi(R, a) / (R - a)^2}{\pi \sigma \alpha_0} \right\}^{1/2} \times \sqrt{\frac{k}{\rho l (R^2 - a^2)}} \cdot \sqrt{\theta} \quad (16)$$

である。つまり翼対回転角 θ から流量が読みとれる。

3. 試作例と実験

3.1 試作流量計

前章の理論により、有効迎角が幾何迎角よりもかなり小さくなるのがわかるので、無揚力角を大きめにとったほうがよいと思われる。また幾何迎角を大きくとったときに、前縁で剥離流れを生じやすい平板翼などは不都合である。加工上の問題を考えると、NC フライスでエンドミル切削を行うのが実際的である。この場合、あまり薄くなるのは不都合である。以上の条件を満足すれば、さしあたりどんな翼形でもよい。ここでは NACA 4 けたの翼形 (NACA 4412) を用いることにした。この翼形では無揚力角は 4° , $\sigma \approx 0.9$ である。翼形の形状は邦書²⁾にも詳しく解説されている。

試作した流量計の構造と主要寸法は Fig. 5 に示す。図において①と②が翼対で、軸③に対して貫通ボルト④で止めてある。したがって翼の幾何迎角は、測定流量範囲に応じて加減できる。この軸はフランジ⑦、⑧の中央のピボット軸受で支持する。摩擦トルクの影響を減らすには、ピボット軸受がよい。

フランジは透明円筒⑨をはさんで、ボルト⑩で組立てである。軸と上流側フランジとは、うず巻きばね⑤で結合してある。うず巻きばねは、ばね定数を $1.0 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m} / \text{deg}$ を目標に製作したが、検定したところ、 $k = (0.91 \pm 0.03) \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m} / \text{deg}$ であった。

Fig. 5 において、流体は左側フランジから流入する。上流および下流の条件によって生ずる旋回流の影響を除くために、流量計と接続管フランジとの間には整流板をはさむ。翼形の寸法と形状は、Fig. 6 に示すもので、 $R = 23 \text{ mm}$, $a = 3 \text{ mm}$ となっている。翼対の回転角 θ は deg で表示し、迎角を deg で表示する数値には (') をつける ($\alpha'_0 = 180\alpha_0/\pi$ など)。

まず(8)式により

$$\varphi(R, a) = 3 \times 23 - 3 - 2\sqrt{2 \times 23 \times 26} + \sqrt{2 \times 3 \times 26} = 9.32 \text{ (mm)},$$

ついで(11)式により

$$\alpha_e = \frac{\alpha_0}{1 + 2 \times 0.9 \times 9.32 \times 60 / (20)^2} = 0.284\alpha_0 = 0.00496\alpha'_0 \quad (17)$$

Fig. 5 Flowmeter assembly

Fig. 6 Form and dimensions of wing

$$c_L = 2\pi\sigma\alpha_e = 1.61\alpha_0 = 0.0280\alpha'_0 \quad (18)$$

である。流体を水とした場合に $\rho_w = 1.000 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ として、(15)式より

$$V = \sqrt{\frac{2k\theta}{\rho l (R^2 - a^2) c_L}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.91 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}}{10^3 \text{ kg/m}^3 \times 0.06 \text{ m} \times 520 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \times 0.0280}} \times \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{\theta}{\alpha'_0}}$$

$$=0.144\sqrt{\rho_w/\rho}\cdot\sqrt{\theta/\alpha'_0}\text{ m/s} \quad (19)$$

である。つぎに流路面積を求める。管の内径 D は 50 mm で、翼対全スパン $2R=46$ mm よりも少し大きい。これは翼厚があること、迎角をつけるときに翼端などが管壁にぶつからないために必要なすき間を設けたことによる。このことは理論上の仮定と若干くいちがうが、管壁近くは流速が低下することも考慮して、

$$A=\pi(R^2-a^2)+(\pi/2)(D^2/4-R^2)=1.784\times 10^{-3}\text{ m}^2$$

をとる。以上によって

$$Q=AV=0.257\sqrt{\frac{\rho_w}{\rho}}\cdot\sqrt{\frac{\theta}{\alpha'_0}}\times 10^{-3}\text{ m}^3/\text{s} \quad (20)$$

である。たとえば水に対しては

$$Q=0.257\sqrt{\theta/\alpha'_0}\text{ l/s}$$

で θ を読みとって流量がわかる。

3.2 実験装置および測定方法

流量測定実験は主として水を用い、油を用いて補足的測定を行った。水に対する実験装置を Fig. 7 に示す。うず巻ポンプでオーバーフロー式のヘッドタンクに揚水した水を流量計に供給する。配管内径は 50 mm である。流量は流量計下流の弁で調整する。流量計の上流側に管径の 20 倍、下流側に管径の 10 倍の直管部がある。流量計前後の接続フランジ部にタップを立てて、流量計前後の圧力差を、逆 U 字管マノメータで測定した。また流量測定は、流量計を水平に設置した場合と、鉛直に設置した場合について行った。流量増加時と減少時でのヒステリシスも観察した。流量測定は重量式によった。

油を用いた流量測定では、容積式の油圧ポンプを流量源とし、弁で流量調節を行った。油の流量測定では重量法を用いると気泡を生じやすいので、容積式流量計を用いた。そのほかは水の場合と同様に測定した。使用した油の温度による密度と動粘度の変化は測定してある。実験は 303 K (30°C) で行ったが、そのときの油の密度は、 $\rho=858\text{ kg/m}^3$ 、動粘度は $\nu=5.0\times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ である。

Fig. 7 Experimental rig for water

3.3 実験結果と考察

水を用いた実験結果を Fig. 8 に示す。 $\alpha'_0=13^\circ$ および 16° とした場合について、流量計を水平にして測定したもので、(20)式による計算値も併記してある。 $\alpha'_0=13^\circ$ の場合、理論値は測定値よりもやや大きい(約 4%) が、設計値として流量を推定するには十分役立つといえよう。 $\alpha'_0=16^\circ$ の場合は理論値との不一致が大きくなっている。これは翼の縁が管壁にふれる状態に近く、揚力線が直線であるとする理論の仮定が無理になってくるためと考えられる。

流量計を水平にした場合と、鉛直にして水が流下するようにした場合について比較した結果を、Fig. 9 に示す。設置角度による指示差は軸受の摩擦力の影響によると思われるが、監視用の流量計として使う場合には、さほど問題にならない量であろう。

管レイノルズ数は $1.6\times 10^4\sim 4.3\times 10^3$ であって、乱流となっており、粘性の影響は少ないから、揚力線理論の適用は無理ではない。アスペクト比がこの翼では $1/3$ となっていて、非常に小さいので、揚力線理論の適用は無理のように見える。実は管壁の円に対する反転の位置にも渦糸を配置しているから、流体力学的に有効なアスペクト比は $2R^2/al=5.9$ である。このことが α'_0 があまり大きくないときに、揚力線理論による計算がうまく適用できた理由でもある。しかし α'_0 が大きくなると、揚力線を一本の直線と仮定することが無理になる。このアスペクト比での設計値としては、 $\alpha'_0=13^\circ$ がだいたいの上限のようである。

Fig. 8 Experimental result for water (Effect of geometrical angle of attack, horizontal position)

Fig. 9 Influence of setting angle

Fig. 10 Pressure loss in the flowmeter

流量計による全圧力損失を Fig. 10 に示す。管内流速を基準にした損失係数は

$$\zeta = \Delta p / \left\{ \frac{1}{2} \rho \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \right)^2 \right\} \approx 12$$

で案外大きい。実はこの損失は整流板による部分が多い。整流板を除くと ζ はこの約 1/3 になるが、翼が微少振動したりする。

つぎに油を用いた流量測定の結果を Fig. 11 に示す。これは水の場合と違って、理論値よりもずっと強い揚力が働いたようになっている。油を用いた実験での管レイノルズ数は 53~258 と、かなり低い値であ

Fig. 11 Flow rate characteristic curve for oil and water

る。したがって渦の不生不滅を前提（つまり非粘性流体）とした揚力線理論の適用はできないから、2章の理論値から外れることも当然の帰結である。粘性によって渦は流体中で消滅するから、揚力線理論に基づくこの流量計設計は、こうした低レイノルズ数領域には適用できず、別の理論的考察が必要である。

4. 結 言

翼形を円筒内に納める形式の、設置角度を任意にとれる監視用流量計を試作した。その特性は、(1)レイノルズ数の大きい乱流域に対して、(2)幾何迎角があまり大きくないときに、翼に対する揚力線理論によってよく予測でき、理論値と実験値はよく一致する。翼の幾何学的なアスペクト比は小さくても、外筒との干渉によって有効なアスペクト比が大きくなるので、揚力線理論が適用できたものと考えられる。

本研究にあたり、工作、作図に尽力した当時の卒論学生、三沢秀樹君に謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) 守屋富次郎：空気力学序説，148/149，培風館（1968）
- 2) 守屋富次郎：空気力学序説，126/127，培風館（1968）
- 3) 伊藤，本田：流体力学，174/176，丸善（1981）

《付録》 α_1 を求める計算手順

まず(5)式の左辺に、 $\Gamma(y) \doteq 4Vra_1 \sin \theta_y$ を代入して、区間 (a, R) で積分する。

$$\frac{1}{\pi \sigma V l} \int_a^R \Gamma(y) dy = \frac{4Vr^2 a_1}{\pi \sigma V l} \int_{\pi}^0 \sin \theta_y d(\cos \theta_y)$$

$$= 2r^2 a_1 / (\sigma l) \quad (\text{A. 1})$$

右辺の $K(y, y')$ は (4) 式の形に分解し、各項につき積分する。

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{4\pi V} \int_a^R \frac{1}{y' - y} \frac{d\Gamma(y')}{dy'} dy' \\ &= \frac{1}{4\pi V} \int_\pi^0 \frac{4Vr a_1 \cos \theta' d\theta'}{r(\cos \theta' - \cos \theta_y)} \\ &= -\frac{a_1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta_y} = -a_1 \quad (\text{A. 2}) \end{aligned}$$

最後の積分は主値をとってある。

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{1}{4\pi V} \int_a^R \frac{1}{(R^2/y') - y} \frac{d\Gamma(y')}{dy'} dy' \\ &= \frac{1}{4\pi V} \int_\pi^0 \frac{4Vr \cos \theta' (r \cos \theta' + h)}{R^2 - y(r \cos \theta' + h)} d\theta' \\ &= -\frac{a_1 R^2}{y^2} \left\{ \frac{(R^2/y) - h}{\sqrt{\{(R^2/y) - h\}^2 - r^2}} - 1 \right\} \quad (\text{A. 3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \frac{1}{4\pi V} \int_a^R \frac{d\Gamma(y')}{dy'} \frac{dy'}{y' + y} \\ &= \frac{r a_1}{\pi} \int_\pi^0 \frac{\cos \theta' d\theta'}{h + y + r \cos \theta'} \\ &= a_1 \left\{ \frac{h + y}{\sqrt{(h + y)^2 - r^2}} - 1 \right\} \quad (\text{A. 4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & \frac{1}{4\pi V} \int_a^R \frac{d\Gamma(y')}{dy'} \frac{dy'}{(R^2/y') + y} \\ &= \frac{a_1}{\pi} \int_\pi^0 \frac{r \cos \theta' d\theta'}{\{R^2/(h + r \cos \theta')\} + y} \\ &= -a_1 \left(\frac{R}{y} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{(R^2/y) + h}{\sqrt{\{(R^2/y) + h\}^2 - r^2}} \right\} \quad (\text{A. 5}) \end{aligned}$$

以上によって

$$\begin{aligned} \frac{w(y)}{V} &= \frac{1}{4\pi V} \int_a^R K(y, y') \frac{d\Gamma(y')}{dy'} dy' \\ &= -a_1 + \frac{a_1 R^2}{y^2} \left\{ \frac{(R^2/y) - h}{\sqrt{\{(R^2/y) - h\}^2 - r^2}} - 1 \right\} \\ &\quad + a_1 \left\{ \frac{h + y}{\sqrt{(h + y)^2 - r^2}} - 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ a_1 \left(\frac{R}{y} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{(R^2/y) + h}{\sqrt{\{(R^2/y) + h\}^2 - r^2}} \right\} \\ &= -2a_1 + a_1 \left\{ \frac{h + y}{\sqrt{(h + y)^2 - r^2}} \right. \\ &\quad + \left(\frac{R}{y} \right)^2 \frac{(R^2/y) - h}{\sqrt{\{(R^2/y) - h\}^2 - r^2}} \\ &\quad \left. - \left(\frac{R}{y} \right)^2 \frac{(R^2/y) + h}{\sqrt{\{(R^2/y) + h\}^2 - r^2}} \right\} \quad (\text{A. 6}) \end{aligned}$$

(8) 式に対応した形をとるには、(A. 6) 式の両辺を、 (a, R) で y により積分し、平均の α_e, c_L を求めるようにする。すなわち

$$\begin{aligned} \int_a^R \frac{w}{V} dy &= -2a_1(R - a) + a_1 \int_a^R \frac{(h + y) dy}{\sqrt{(h + y)^2 - r^2}} \\ &\quad + a_1 \int_a^R \left(\frac{R}{y} \right)^2 \frac{\{(R^2/y) - h\} dy}{\sqrt{\{(R^2/y) - h\}^2 - r^2}} \\ &\quad - a_1 \int_a^R \left(\frac{R}{y} \right)^2 \frac{\{(R^2/y) + h\} dy}{\sqrt{\{(R^2/y) + h\}^2 - r^2}} \\ &= -2a_1(R - a) + a_1 \left[\sqrt{(h + y)^2 - r^2} \right]_a^R \\ &\quad - a_1 \left[\sqrt{\{(R^2/y) - h\}^2 - r^2} \right]_a^R \\ &\quad + a_1 \left[\sqrt{\{(R^2/y) + h\}^2 - r^2} \right]_a^R \\ &= -2a_1(R - a) \\ &\quad + a_1(\sqrt{2R(R + a)} - \sqrt{2a(R + a)}) \\ &\quad + a_1\sqrt{R(R + a)}(R - a)/a \\ &\quad + a_1\sqrt{2R(R + a)} \\ &\quad - a_1\sqrt{R(R + a)(R^2 + a^2)}/a \\ &\doteq -a_1\{3R - a - 2\sqrt{2R(R + a)} \\ &\quad + \sqrt{2a(R + a)}\} \\ &= -a_1\varphi(R, a) \quad (\text{A. 7}) \end{aligned}$$

(A. 1), (A. 7) 式と本文 (5) 式から

$$\frac{2r^2 a_1}{\sigma l} = \alpha_0(R - a) - a_1\varphi(R, a) \quad (\text{A. 8})$$

となり、 $r = (R - a)/2$ を代入して (8) 式を得る。