ファジィパラメータを含む多目的非線形計画問題 に対する対話型意思決定

坂 和 正 敏*・矢 野 均**

Interactive Decision Making for Multiobjective Nonlinear
Programming Problems with Fuzzy Parameters

Masatoshi SAKAWA* and Hitoshi YANO**

This paper presents a new interactive decision making method for multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters. The fuzzy parameters involved in objective functions and constraints are characterized by fuzzy numbers. The concept of α -Pareto optimality is introduced in which the usual Pareto optimality is extended based on the α -level sets of fuzzy numbers. In our interactive decision making method, if the decision maker (DM) specifies his reference objective values and the degree α of the α -level sets, the minimax problem is solved and the DM is supplied with the corresponding α -Pareto optimal solution together with the trade-off rates among the values of the objective functions and the degree α . Then by considering the current values of the objective functions and α as well as the trade-off rates, the DM responds by updating his reference objective values and/or the degree α . In this way, the satisfying solution for the DM can be derived efficiently from among an α -Pareto optimal solution set.

Key Words: multiobjective nonlinear problems with fuzzy parameters, fuzzy numbers, level set, α -Pareto optimal solution, Interactive decision making

1. はじめに

一般に、現実のシステムをモデル化した多目的意思決定問題に対して、意思決定者 (Decision Maker :

DM) の選好を最もよく反映させた解を何らかの多目的意思決定手法により導出した場合、得られた解は、残念ながら、必ずしも現実の意思決定状況における DM の真の選好解であるとは限らない。定式化された多目的意思決定問題を解いて求められた DM の選好を反映した解と、実システムに対する DM の真の選好解との間に、このようなギャップが生ずる原因は、主としてつぎの 2 種類のあいまい性によるものと考えられる。

- (1) DM の選好順序に関するあいまい性
- (2) 実システムに対する数式モデルを決定する際に生じるあいまい性

これらのあいまい性のうち、(1) に対しては、DM の代替案に対する判断のあいまい性を考慮したファジィ線形計画法が Zimmermann¹⁾ により提案され、発展してきている^{2)~6)}。一方 (2) に対しては、各目的関数や制約式の係数にあいまい性が含まれているような問題を定式化することにより、実システムをより正確に近似するモデルが得られるものと期待できる。このようなシステム自体に含まれるあいまい性に対処するため、田中ら^{7), 8)} は、線形の制約条件と線形の目的関数における係数が台形のファジィ数で表わされるような線形のモデルに対して、ファジィ線形計画問題としての定式化を試みた。彼らは、係数のあいまい性を考慮した非ファジィな解を求める場合のみならず、係数のあいまい性を反映してどれくらいあいまいな決定をすることができるかという場合に対しても考察している。しかし、対象とする問題は線形の場合のみに限られており、非線形への拡張が望まれていた。近年、Orlovski⁹⁾ は、多目的非線形計画問題に対して、制約条件と目的関数における係数がファジィ数として特徴づけられる場合について考察したが、残念ながら、係数のあいまい性をも考慮して DM の妥協解を求める

* 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲合町 1-1

** 香川大学経済学部 高松市幸町 2-1

* Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe

** College of Economics, Kagawa University, Takamatsu

(Received February 20, 1985)

(Revised October 30, 1985)

ための具体的な対話型アルゴリズムは提案されていない。

このような状況において、本論文では、実システムに対して数式モデルを決定する際に生じるあいまい性に対処するために、係数がファジィ数で表わされる多目的非線形計画問題を取り扱い、係数のあいまい性をも考慮した新しい解の概念として、 α -パレート最適解を定義して、 α -パレート最適解の集合の中から DM の満足解を導出するための対話型意思決定手法を提案する。さらに、提案した手法の数値例への適用が示される。

2. α -パレート最適解

一般に、多目的非線形計画 (Multiobjective Nonlinear Programming: MONLP) 問題はベクトル最小化問題として次のように定式化される。

MONLP

$$\left. \begin{array}{l} \min_x f(x) \triangleq (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))^T \\ \text{subject to} \\ x \in X \triangleq \{x | x \in R^n, g_j(x) \leq 0, j=1, 2, \dots, m\} \end{array} \right\} \quad (1)$$

しかし、このように数学的に定式化された MONLP には、本来、実システムのモデル化の際に生じるあいまい性が含まれているものと考えることが妥当であろう。このようなあいまい性は各々の目的関数と制約式の係数に反映されているとの観点から、各々の目的関数と制約式の係数のあいまい性がファジィ数として表わされているようなあいまいな係数を含む多目的非線形計画問題を考え、ここではファジィ多目的非線形計画問題 (Fuzzy MONLP: FMONLP) と呼び、つぎのように定式化する。

FMONLP

$$\left. \begin{array}{l} \min f(x, \tilde{a}) \triangleq (f_1(x, \tilde{a}_1), f_2(x, \tilde{a}_2), \dots, f_k(x, \tilde{a}_k))^T \\ \text{subject to} \\ x \in \tilde{X} \triangleq \{x | x \in R^n, g_j(x, \tilde{b}_j) \leq 0, j=1, 2, \dots, m\} \end{array} \right\} \quad (2)$$

以下では、簡単のため、 $\tilde{a}_i$ は i 番目の目的関数に含まれるファジィ数として表わされる係数全体のベクトルを示し、同様に $\tilde{b}_j$ は j 番目の制約式に含まれるファジィ数として表わされる係数全体のベクトルを示すものとする。即ち $\tilde{a}_i = (\tilde{a}_{i1}, \dots, \tilde{a}_{ip_i})$, $\tilde{b}_j = (\tilde{b}_{j1}, \dots, \tilde{b}_{jq_j})$ である。

ここで、(2)式で定式化されるファジィ多目的非線形計画問題において、各々の目的関数や制約式に含まれる係数がすべてファジィ数で与えられているとは限らない (即ち、ファジィ数で表わされる係数と通常の

Fig. 1 Fuzzy number

数で表わされる係数が混在している場合も対象としている) ことに注意しよう。

本論文を通して用いられるファジィ数は、Dubois と Prade^{10), 11)} により導入されたものであるが、つぎの性質を満たしているものとする。即ち、ファジィ数 $\tilde{t}$ のメンバシップ関数を $\mu_{\tilde{t}}(t)$ で表わせば、 $\mu_{\tilde{t}}(t)$ は次の性質を持つ。(Fig. 1 参照)

- (1) μ は実数直線 R^1 から閉区間 $[0, 1]$ への連続写像
- (2) $t \in (-\infty, s_1]$ のとき、 $\mu_{\tilde{t}}(t) = 0$.
- (3) $t \in [s_1, s_2]$ のとき、 $\mu_{\tilde{t}}'(t) > 0$.
- (4) $t \in [s_2, s_3]$ のとき、 $\mu_{\tilde{t}}(t) = 1$.
- (5) $t \in [s_3, s_4]$ のとき、 $\mu_{\tilde{t}}'(t) < 0$.
- (6) $t \in [s_4, \infty)$ のとき、 $\mu_{\tilde{t}}(t) = 0$.

(2)式で定義されているファジィ多目的非線形計画問題は、各々の目的関数や制約式の係数がファジィ数として特性づけられているため、これまでの通常の多目的非線形計画問題に対して定義されてきた、いわゆる、パレート最適解の概念をそのまま適用することはできない。したがって、本論文では、通常のパレート最適解の概念を拡張して、問題に含まれるあいまい性をも考慮したパレート最適解として、新たに α -パレート最適解の概念を導入する。そのための準備として、まず、ファジィ多目的非線形計画問題(2)に含まれるファジィ数 $\tilde{a}_{ir}$, $\tilde{b}_{js}$ のメンバシップ関数をそれぞれ $\mu_{\tilde{a}_{ir}}(a_{ir})$, $\mu_{\tilde{b}_{js}}(b_{js})$ で表わし、 α レベル集合¹¹⁾をつぎのように定義する。ここで $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{ip_i})$, $b_j = (b_{j1}, \dots, b_{jq_j})$, $a = (a_1, \dots, a_k)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$ である。

【定義 1】 (α レベル集合: $L(\alpha)$)

α レベル集合 $L(\alpha)$ とは、次式で定義される係数空間の集合である。

$$\begin{aligned} L(\alpha) = \{ (a, b) | & \mu_{\tilde{a}_{ir}}(a_{ir}) \geq \alpha (i=1, \dots, k; r=1, \dots, p_i), \\ & \mu_{\tilde{b}_{js}}(b_{js}) \geq \alpha (j=1, \dots, m; s=1, \dots, q_j) \} \end{aligned} \quad (3)$$

定義から明らかなように、 α レベル集合 $L(\alpha)$ は、フ

ファジィ数として表わされているすべての係数の属する度合いが α 以上であるような、パラメータ α に依存した集合であり、つぎの性質をもつことは直ちにわかる。

〔性質 1〕

$$\alpha^1 < \alpha^2 \text{ ならば } L(\alpha^1) \supset L(\alpha^2) \quad (4)$$

ここで、FMONLP(2)に含まれるファジィ数に対して、DMが主観的に、その属する度合いが α 以上であれば任意の値でよいと判断したと仮定しよう(以下ではこの α の値を許容レベル値と呼ぶことにする)。このとき、FMONLP(2)は係数ベクトル $(a, b) \in L(\alpha)$ をパラメータとするつぎのような通常の多目的非線形計画問題 MONLP (a, b) として定式化できる。

MONLP (a, b)

$$\left. \begin{array}{l} \min_x f(x, a) \triangleq (f_1(x, a_1), f_2(x, a_2), \dots, f_k(x, a_k))^T \\ \text{subject to} \\ x \in X(b) \triangleq \{x \mid g_j(x, b_j) \leq 0, j=1, 2, \dots, m\} \end{array} \right\} \quad (5)$$

しかし、このような多目的非線形計画問題 MONLP (a, b) はパラメータ $(a, b) \in L(\alpha)$ に依存して無数に存在する。したがって本論文では、このような MONLP (a, b) のうち、パラメータ (a, b) の値を DM に対して最も有利になるように設定する問題と解釈できる、つぎのような α レベル多目的非線形計画問題 (α -MONLP) を導入する。

α -MONLP

$$\left. \begin{array}{l} \min_{x, a, b} f(x, a) \triangleq (f_1(x, a_1), f_2(x, a_2), \dots, f_k(x, a_k))^T \\ \text{subject to} \\ x \in X(b) \triangleq \{x \mid g_j(x, b_j) \leq 0, j=1, 2, \dots, m\} \\ (a, b) \in L(\alpha) \end{array} \right\} \quad (6)$$

したがって、 α -MONLP (6) においては、係数ベクトル (a, b) は、もはや、係数としてではなく変数としての取り扱いを受けていることに注意しよう。

さて、通常のパレート最適解の概念を素直に拡張することにより、 α -MONLP (6) に対してつぎのような α -パレート最適解を定義することができる。

〔定義 2〕 (α -パレート最適解, α レベル最適係数)

α -MONLP (6) に対して、 $f(x, a) \leq f(x^*, a^*)$ となる $x \in X(b)$, $(a, b) \in L(\alpha)$ が存在しないとき、 x^* を α -パレート最適解と呼び、対応する係数値 (a^*, b^*) を α レベル最適係数と呼ぶ。

ここで、 α -MONLP (6) に対する α -パレート最適解と α レベル最適係数の意味について考えてみよう。

FMONLP (2) に含まれるファジィ数として表わされ

る係数は、 α -MONLP においては、そのメンバシップ値が α 以上であれば自由に動くことができるから、もとの MONLP (1) と比較して、問題を定式化する際に生じるあいまい性を反映した解を得ることが可能になるものと思われる。ここで、あいまい性の許容度 α はDMにより主観的に決定されるものである。即ち、 α -MONLP (6) において決定変数を (x, a, b) とみなした時の通常の意味でのパレート最適解 (x^*, a^*, b^*) に対して、 x^* が α -パレート最適解であり、 (a^*, b^*) が α レベル最適係数である。

ここで定義された α -パレート最適解, α レベル最適係数は、 α -MONLP (6) において、決定変数を (x, a, b) とみなすことにより、通常のパレート最適解を得るための手法をそのまま直接適用して求めることが可能であることに注意しよう。ここでは、非凸性を含む問題に対しても有効であるつぎの形式のミニマックス問題 $P_*(f, \alpha)$ を利用することにしよう。

$P_*(f, \alpha)$

$$\min_{x, z, a, b} z \quad (7)$$

subject to

$$f_i(x, a_i) - f_i^* \leq z \quad (i=1, \dots, k) \quad (8)$$

$$g_j(x, b_j) \leq 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (9)$$

$$\mu_{a_{ir}}(a_{ir}) \geq \alpha \quad (i=1, \dots, k; r=1, \dots, p_i) \quad (10)$$

$$\mu_{b_{js}}(b_{js}) \geq \alpha \quad (j=1, \dots, m; s=1, \dots, q_j) \quad (11)$$

ここで、 $f^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_k^*)$ は与えられた基準目的関数値である。この時、次の定理が成立する。

〔定理 1〕

$x^*, (a^*, b^*)$ がそれぞれ α -MONLP の α -パレート最適解, α レベル最適係数であるための必要十分条件は、 $x^*, (a^*, b^*)$ が、ある $f_i^* (i=1, \dots, k)$ に対する $P_*(f, \alpha)$ の一意的な最適解となることである。

ここで、 α レベル集合 $L(\alpha)$ の性質 1 により、 $P_*(f, \alpha^1)$ の最適解 z^1 と $P_*(f, \alpha^2)$ の最適解 z^2 に対して $z^1 \leq z^2$ となるので、(8)式が活性、即ち、等式として成立すれば、つぎの性質が成り立つことがわかる。

〔性質 2〕

$\alpha^1 < \alpha^2$ に対する $P_*(f, \alpha^1)$ および $P_*(f, \alpha^2)$ の最適解 $y^1 = (x^1, z^1, a^1, b^1)$, $y^2 = (x^2, z^2, a^2, b^2)$ に対して (8)式が活性であれば、つぎの関係が成立する。

$$f_i(x^1, a_i^1) \leq f_i(x^2, a_i^2) \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (12)$$

3. トレード・オフ比

本節では、ある特定の解に対する DM の判断のため

の有力な情報となりうるトレードオフ比として2種類のトレードオフ比、即ち、目的関数間のトレードオフ比 $\partial f_i / \partial f_j$ と、パラメータ α と各目的関数間のトレードオフ比 $\partial f_i / \partial \alpha$ について考察する。まず、 $P_{\alpha}(f, \alpha)$ に対するラグランジュ関数を L で表わせば、

$$\begin{aligned} L(x, z, a, b, \lambda^f, \lambda^g, \lambda^a, \lambda^b, f, \alpha) \\ = z + \sum_{i=1}^k \lambda_i^f (f_i(x, a_i) - f_i - z) \\ + \sum_{j=1}^m \lambda_j^g g_j(x, b_j) + \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^{p_i} \lambda_{ir}^a (\alpha - \mu a_{ir}(a_{ir})) \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{q_j} \lambda_{js}^b (\alpha - \mu b_{js}(b_{js})) \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $\lambda_i^f, \lambda_j^g, \lambda_{ir}^a, \lambda_{js}^b$ は $P_{\alpha}(f, \alpha)$ の制約式(8)~(11)に対応するラグランジュ乗数である。以下では、簡単のため、 $P_{\alpha}(f, \alpha)$ の決定変数を $y = (x, z, a, b)$ と置き、パラメータ $\alpha = \alpha^*$ 、 $f = f^*$ に対して $P_{\alpha}(f, \alpha)$ はつぎの三つの条件を満たす一意的な局所解 y^* をもつものとする。

[仮定 1] 2次の最適性の十分条件が成り立つ。

[仮定 2] 1次独立制約想定が成り立つ。

[仮定 3] 狭義の相補性が成り立つ。

このとき、つぎのような感度解析における基本的な存在定理が成り立つ¹²⁾。

[定理 2]

$\alpha = \alpha^*$ に対して、 $P_{\alpha}(f^*, \alpha)$ は仮定 1~3 を満たす一意的な局所解 $y^* = (x^*, z^*, a^*, b^*)$ とそれに対応するラグランジュ乗数 $\lambda^{f*}, \lambda^{g*}, \lambda^{a*}, \lambda^{b*}$ をもつものとする。このとき、 α^* の適当な近傍 $N(\alpha^*)$ に対して、 $y(\alpha^*) = y^*$ (即ち、 $x(\alpha^*) = x^*, z(\alpha^*) = z^*, a(\alpha^*) = a^*, b(\alpha^*) = b^*$)、 $\lambda^i(\alpha^*) = \lambda^{i*}$ ($i = f, g, a, b$) であるような連続的微分可能な関数 $y(\cdot), \lambda^i(\cdot)$ ($i = f, g, a, b$) が存在する。さらに、任意の $\alpha \in N(\alpha^*)$ に対して $y(\alpha), \lambda^f(\alpha), \lambda^g(\alpha), \lambda^a(\alpha), \lambda^b(\alpha)$ は仮定 1~3 を満たす一意的な局所解と対応するラグランジュ乗数である。

ここで、定理 2 において $z(\alpha)$ は $P_{\alpha}(f^*, \alpha)$ の最適値関数でもあるからつぎの定理が成立する¹²⁾。

[定理 3]

定理 2 のすべての仮定が満たされているものとする。このとき、 α^* の適当な近傍 $N(\alpha^*)$ において、つぎの関係式が成立する。

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^{p_i} \lambda_{ir}^a + \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{q_j} \lambda_{js}^b \quad (14)$$

ここで、パラメータ α と目的関数 f_i の間の関係について考えてみよう。まずミニマックス問題 $P_{\alpha}(f, \alpha)$ の制約式(8)がすべて活性 (即ち、 $f_i(x^*, a_i^*) - f_i = z^*$) であるとき、定理 2 より、 α^* の適当な近傍 $N(\alpha^*)$

に対して $z(\alpha) = f_i(x(\alpha), a(\alpha)) - f_i$ が成立しているもので、定理 3 より直ちにつぎの定理が成立する。

[定理 4]

定理 2 のすべての仮定が満たされているものとする。さらに、制約式(8)はすべて活性であるとしよう。このとき、つぎの関係式が成立する。

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha^*} = \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^{p_i} \lambda_{ir}^{f*} + \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{q_j} \lambda_{js}^{f*} \quad (i=1, \dots, k) \quad (15)$$

以上のことから、(15)式により、各目的関数のパラメータ α に対するトレードオフ比が求められることがわかったが、同様に仮定 1~3 が成立するとき、目的関数間のトレードオフ比はつぎのように表わされることが明らかにされている¹³⁾。

[定理 5]

定理 2 のすべての仮定が満たされているものとする。また、目的関数に関する制約式(8)はすべて活性であるとする。このとき、次式が成立する。

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial f_i} \right|_{\alpha=\alpha^*} = -\frac{\lambda_i^{f*}}{\lambda_1^{f*}} \quad (i=2, \dots, k) \quad (16)$$

4. 対話型意思決定手法

これまでの議論によれば、DM は、基準目的関数値 f を変化させることにより目的関数空間における任意の α -パレート最適解を得ることが可能であるとともに、あいまい性のパラメータ α を変化させることにより問題のあいまいさに対応した α -パレート最適解を得ることも可能であることがわかった。さらに、DM は、目的関数間のトレードオフ比のみならず、パラメータ α と目的関数とのトレードオフ比を考慮することにより、 f や α の値を変更して、あいまい性を考慮した彼の妥協解あるいは満足解を得ることが可能となる。このようにして、 α -パレート最適解の集合の中から DM の妥協解あるいは満足解を導くための対話型アルゴリズムをつぎのように構成することができる。

ステップ 1 あいまい性のパラメータ $\alpha (0 < \alpha < 1)$ を DM が主観的に設定して、対応する各目的関数の個別の最大値と最小値を計算する。

ステップ 2 DM は、各目的関数の個別の最大値と最小値を考慮することにより、初期の基準目的関数値 f を設定する。

ステップ 3 設定された f, α の値に対して、 $P_{\alpha}(f, \alpha)$ が解かれ、対応する α -パレート最適解、 α レベル最適係数のみならず、目的関数間のトレードオフ比およびパラメータ α と目的関数とのトレードオフ比も同時に求められる。

ステップ 4 現在の α -パレート最適解とあいまい性のパラメータ α の値に満足ならば終了。そうでなければつぎに進む。

ステップ 5 現在の目的関数値とあいまい性のパラメータ α の値およびトレードオフ比の情報を考慮して、基準目的関数値 f あるいはあいまい性のパラメータ α の値を更新してステップ 3 へもどる。

5. 数 値 例

提案した α -パレート最適解の概念と対話型意思決定手法に対する理解を深めるために、係数にあいまい性が含まれるつぎのファジィ 3 目的非線形計画問題を考えよう。

$$\left. \begin{aligned} \min f_1 &= \bar{a}_1(x_1-9)^2 + (x_2-6)^2 \\ \min f_2 &= 3x_1 + x_2 - \bar{a}_2 \\ \min f_3 &= 3x_1 + 5x_2 - \bar{a}_3 \\ \text{subject to} \\ g_1 &= -x_1 \leq 0, \quad g_2 = -x_2 \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここで、ファジィ数 $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ はそれぞれつぎのようなメンバシップ関数により規定されているものとする。

$$\mu_1(a_1) = \max(1 - |a_1 - 1.2|, 0) \quad (18)$$

$$\mu_2(a_2) = \max(1 - 2 \cdot |a_2 - 5.4|, 0) \quad (19)$$

$$\mu_3(a_3) = \max(1 - 0.5 \cdot |a_3 - 17.1|, 0) \quad (20)$$

このとき、対応する α レベル 3 目的非線形計画問題はつぎのように定式化される。

$$\left. \begin{aligned} \min f_1 &= a_1(x_1-9)^2 + (x_2-6)^2 \\ \min f_2 &= 3x_1 + x_2 - a_2 \\ \min f_3 &= 3x_1 + 5x_2 - a_3 \\ \text{subject to} \\ g_1 &= -x_1 \leq 0, \quad g_2 = -x_2 \leq 0 \\ \mu_1(a_1) &= \max(1 - |a_1 - 1.2|, 0) \geq \alpha \\ \mu_2(a_2) &= \max(1 - 2 \cdot |a_2 - 5.4|, 0) \geq \alpha \\ \mu_3(a_3) &= \max(1 - 0.5 \cdot |a_3 - 17.1|, 0) \geq \alpha \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここで、例えば、DM が主観的に $\alpha = 0.8$ と設定したものとする。このとき、メンバシップ値が 0.8 以上のときのファジィ数 $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ の区間を Fig. 2 に示す。また、各目的関数の個別の最小値はつぎのようになる。

$$f_1^{\min} = 0, \quad f_2^{\min} = -5.5, \quad f_3^{\min} = 17.5 \quad (22)$$

ここで、DM は主観的に初期基準目的関数値をつぎのように設定したとする。

$$(f_1^*, f_2^*, f_3^*) = (20, 7.5, 7.5) \quad (23)$$

これに対して、対応する α -パレート最適解はつぎの問題を解くことにより得られる。

$$P_{\alpha}(f^*, \alpha)$$

Fig. 2-1 $\mu_1(a_1) \geq 0.8$

Fig. 2-2 $\mu_2(a_2) \geq 0.8$

Fig. 2-3 $\mu_3(a_3) \geq 0.8$

$$\min z \quad (24)$$

subject to

$$a_1(x_1-9)^2 + (x_2-6)^2 - f_1^* \leq z \quad (25)$$

$$3x_1 + x_2 - a_2 - f_2^* \leq z \quad (26)$$

$$3x_1 + 5x_2 - a_3 - f_3^* \leq z \quad (27)$$

$$-x_1 \leq 0 \quad (28)$$

$$-x_2 \leq 0 \quad (29)$$

$$\max(1 - |a_1 - 1.2|, 0) \geq \alpha \quad (30)$$

$$\max(1 - 2 \cdot |a_2 - 5.4|, 0) \geq \alpha \quad (31)$$

$$\max(1 - 0.5 \cdot |a_3 - 17.1|, 0) \geq \alpha \quad (32)$$

このとき、仮定 1 ~ 3 を満たす一意的な最適解

$$(x_1^*, x_2^*, z^*) = (5, 3, 5) \quad (33)$$

$$(a_1^*, a_2^*, a_3^*) = (1, 5.5, 17.5) \quad (34)$$

および対応する目的関数値

$$(f_1^*, f_2^*, f_3^*) = (25, 12.5, 12.5) \quad (35)$$

が得られる。制約式 (25) ~ (27), (30) ~ (32) に対応す

るラグランジュ乗数をそれぞれ $\lambda_1 \sim \lambda_6$ とおき、 $P_{-}(f, \alpha)$ に対するラグランジュ関数を L とすれば、2 次の最適性の十分条件（仮定 1）から $\nabla L=0$ であるから、この点におけるラグランジュ乗数 $\lambda_i^* \sim \lambda_6^*$ はつぎのように代数的に求められる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1^* &= 3/11, & \lambda_2^* &= 1/2, & \lambda_3^* &= 5/22 \\ \lambda_4^* &= 48/11, & \lambda_5^* &= 1/4, & \lambda_6^* &= 5/11 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

したがって、制約式 (25)～(27) はすべて活性であるので、各目的関数とパラメータ α のトレードオフ比は、定理 4 の (15) 式を適用することによりつぎのように求められる。

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha^*} = \lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^* = \frac{223}{44} \quad (i=1, 2, 3) \quad (37)$$

また、各目的関数間のトレードオフ比は、定理 5 の (16) 式からつぎのように求まる。

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial f_2} \right|_{\alpha=\alpha^*} = -\frac{\lambda_2^*}{\lambda_1^*} = -\frac{11}{6} \quad (38)$$

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial f_3} \right|_{\alpha=\alpha^*} = -\frac{\lambda_3^*}{\lambda_1^*} = -\frac{5}{6} \quad (39)$$

DM は、現在の解 (33)～(35) におけるこれらのトレードオフ比 (37)～(39) を考慮して、パラメータ f あるいは α を更新することにより、あいまい性を考慮した、より満足のできる解を求めることが可能となる。

6. おわりに

現実に対象とするシステムを数式モデルとして定式化するには、問題に含まれる係数は、ある固定された値に設定されていると考えるよりも、むしろ、あるあいまいな幅をもつ値であると考えた方が、より適切に実システムをモデル化することができると考えられる。このような観点から、本論文で対象とした多目的非線形計画問題は、その定式化において目的関数や制約式の係数がファジィ数で表わされるものと仮定した。本論文で提案した手法においては、 α レベル集合のあいまい性を示すパラメータ α と基準目的関数値を DM が設定することにより、係数のあいまい性を考慮した α -パレート最適解のみならず、各目的関数間のトレードオフ比および目的関数とパラメータ α のトレードオフ比が求められ、DM はこれらの情報に基づいて α と f を更新することにより、彼の満足解を求めることができる。ここで、パラメータ α の更新に際しては、特に、つぎの点に注意する必要がある。即ち、性質 2 から明らかなように、 α をより小さく設定すれば、ある固定された基準目的関数値 f に対してよりよい解が得られることが期待されるが、しかし一方、逆にそれだけ設定された問題の現実性の度合いが薄れ

るものと考えられるので、DM はこれらの間のバランスを考慮してパラメータ α を設定しなければならないということである。したがって、DM はある目的関数を改善するためには、他のいずれかの目的関数を犠牲にせざるを得ないことのみならず、問題の現実性の度を高めれば、目的関数の値が悪くなることも考慮する必要がある。なお、本論文では、 α -パレート最適解の概念と対話型意思決定手法の考え方を簡単な数値例により例示したが、今後、現実の問題を設定する立場にある専門家達との協力により、実際の意思決定状況を十分に反映させたファジィパラメータを含む多目的非線形計画問題を定式化するとともに、現実意思決定を行う立場にある人々と協力した応用例をつみ重ねることにより、提案した手法の改良が行われるべきであろう。最後に、本論文で提案した α レベル集合を適用した α -パレート最適解の概念と、拡張原理に基づくファジィ数間の大小関係を適用して得られるであろうパレート最適解の拡張概念との間には、密接な関係があるものと思われるが、これらのことに関する詳しい考察は稿を改めて行う予定である。

参考文献

- 1) H. J. Zimmermann: Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions, Fuzzy Sets and Systems, **1-1**, 45/55 (1978)
- 2) H. J. Zimmermann: Using Fuzzy Sets in Operational Research, European Journal of Operational Research, **13-3**, 201/216 (1983)
- 3) 坂和：多目的線形計画問題に対する対話型ファジィ意思決定手法とその応用，電子通信学会論文誌，**J65-A-11**，1182/1189 (1982)
- 4) 坂和，湯峯：多目的線形分数計画問題に対する対話型ファジィ意思決定，システムと制御，**27-2**，138/146 (1983)
- 5) 坂和：線形システムの最適化（一目的から多目的へ），森北出版 (1984)
- 6) 坂和，湯峯，矢野：多目的非線形計画問題に対する対話型ファジィ満足化手法，システムと制御，**28-10**，575/582 (1984)
- 7) 田中，浅居：ファジィ関数による線形計画問題の定式化，システムと制御，**25-6**，351/357 (1981)
- 8) 田中，市橋，浅居：ファジィ目的関数によるファジィ線形計画問題の定式化，Journal of the Operations Research Society of Japan, **27-2**，178/189 (1984)
- 9) S. A. Orlovski: Multiobjective Programming Problems with Fuzzy Parameters, Control and Cybernetics, **13-3**，175/183 (1984)
- 10) D. Dubois and H. Prade: Operations on Fuzzy Numbers, International Journal of Systems Science, **9-6**，613/626 (1978)
- 11) D. Dubois and H. Prade: Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press (1980)
- 12) 福島：非線形最適化の理論，産業図書 (1980)
- 13) 矢野，坂和：重みづけチェビシェフノルム法におけるトレードオフ比，計測自動制御学会論文集，**21-3**，248/255 (1985)