離散定数系に対する特異行列リカッチ方程式の 半正定定常解[†]

狩 野 弘 之*

Nonnegative-Definite Steady-State Solutions of Singular Matrix Riccati Equations in Discrete Time-Invariant Systems

Hiroyuki KANO*

Matrix Riccati equations arising in optimal filtering and control problems of discrete time-invariant systems with possibly singular state transition matrices are considered in this paper.

An algebraic approach based on a formulation as a generalized rather than an ordinary eigenvalue problem is employed.

Existence conditions are derived of nonnegative definite steady-state solutions together with relevant properties to the generalized eigenvalue problem. Also, a construction method of all such solutions is given. It is seen that the results associated with nonsingular state transition matrices are generalized in a natural fashion.

Key Words: singular transition matrix, generalized eigenvalue problem, existence and uniqueness theorems, detectability, stabilizability

1. はじめに

行列リカッチ方程式は、最適推定や制御の問題における基礎式として、Kalman¹⁾以来、数多くの研究がなされてきた。Wonham²⁾は、可安定性の概念を導入して定常解の存在条件や漸近特性に関する結果を得、さらに Kucera³⁾はつぎの定理を導いた『行列リカッチ方程式が唯一半正定定常解をもち、対応する閉ループ系が漸近安定となる必要十分条件は、系が可安定かつ可検出なることである』。著者らはこの結果を周期系に対

して拡張し⁴⁾、また定数系の場合の周期解の存在条件を導いた⁵⁾。以上のいずれの条件も、システム論の基本概念である可制御性、可観測性、あるいは可安定性、可検出性によって規定されている^{6),7)}。

本論文では、特に非正則な状態遷移行列 Φ をもつ離散系に注目して、対応するリカッチ方程式の性質を調べる。この種の系は、時間遅れ⁸⁾や制御遅れ⁹⁾がある場合に見られる。

行列リカッチ方程式の解析法として代表的なものに Bellman の準線形化による繰返し法と代数的方法がある。著者は後者を用いて上の一連の研究を行ったが、ここでも同様なアプローチを試みる。代数的方法では、離散系の場合、系の 2 倍の次元をもつあるシンプレクティック行列の固有値問題として定式化される。ただこの行列は Φ^{-1} を用いて定義されており、それが存在しない場合への拡張として Pappas ら¹⁰⁾は一般固有値問題による定式化を導入した。このような状況は離散系に特有のことで、連続系では固有値問題の対象となるハミルトン行列は常に定義される。

本論文の目的は、従来の代数的アプローチ（例えば文献 3), 4)) との一貫性を保ちながらそれを非正則な Φ の場合に拡張することにより、半正定解の存在条件やすべての半正定解の構成法を導くことである。すなわち、内容的には正則な Φ を扱った Kucera³⁾の結果の非正則な場合への拡張であり、従ってまた可安定と可検出を仮定しての Pappas ら¹⁰⁾の結果の一般化にもなっている。一方、問題の定式化には Pappas らの方法を用いる。まず 2 節で一般固有値問題としての定式化を紹介し、また既知の結果や予備的結果を述べる。3 節では、この定式化によって得られる定常解の実対称性や半正定性を一般固有ベクトルとの関係において調べる。4 節で主要結果、すなわち半正定定常解

* 第 15 回確率システムシンポジウムで発表 (昭 58・10)

* 富士通(株)国際情報社会科学研究所 沼津市宮本 140

* International Institute for Advanced Study of Social Information Science, Fujitsu Ltd., Numazu, Shizuoka

(Received July 24, 1985)

(Revised October 21, 1985)

の存在条件やすべての半正定常解の構成法などを導く。5節で簡単な数値例を取り上げ、最後の6節で結論を述べる。

最後に、以下で用いる主要な記号の説明をしておく。T, *, - はそれぞれ転置, 複素共役転置, 複素共役を表わす。任意のエルミート行列 M に対して $M \geq 0$ (> 0) は M が半正定 (正定) を意味する。また $\mathcal{N}(\cdot)$ は行列の零空間を表わす。

2. 問題の定式化と準備

離散定数系の推定問題において生ずる行列リカッチ方程式を考える。

$$P(k+1) = \Phi \{P(k) - P(k)H^T[HP(k)H^T + I]^{-1}HP(k)\} \Phi^T + GG^T, \quad P(0) = P_0 \quad (1)$$

Φ, G, H はそれぞれ $n \times n, n \times m, p \times n$ 定数行列である。特に、状態遷移行列 Φ の正則性を仮定しないことに注意する。この定常解は代数リカッチ方程式

$$P = \Phi \{P - PH^T[HPH^T + I]^{-1}HP\} \Phi^T + GG^T \quad (2)$$

の解であり、対応する閉ループ系

$$\begin{aligned} \Phi_c &= \Phi - \Phi PH^T(HPH^T + I)^{-1}H \\ &= \Phi(PH^TH + I)^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

との関連において解析される。

本論文の目的は(2)式が半正定解をもつ条件およびすべての半正定解の構成法を確立することである。

解析には Pappas ら⁸⁾による一般固有値問題としての定式化を用いるが、これに基づいた既知あるいは容易に導びける結果を示す⁸⁾。まず(2)式の係数行列を用いてつぎの $2n \times 2n$ 行列 A, B を定める。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \Phi^T \\ I & -GG^T \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} H^TH & I \\ \Phi & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

I は n 次単位行列, 0 は n 次零行列である。つぎにこの A, B を用いた一般固有値問題 (A, B) を考える。

$$A z_i = \lambda_i B z_i \quad (5)$$

ここで λ_i は特性多項式

$$\Delta(\lambda) \triangleq |A - \lambda B| \quad (6)$$

の根で (A, B) の固有値といい、 $z_i \neq 0$ は対応する固有ベクトルと呼ばれる。また必要に応じて

$$A z_{i+j} = \lambda_i B z_{i+j} + B z_{i+j-1}, \quad j=1, 2, \dots, \alpha_i \quad (7)$$

なるベクトルで補って λ_i に対する一般固有ベクトルチェーン $z_{i+j}, j=0, 1, \dots, \alpha_i$ を構成す。 z_{i+j} は λ_i に対する j 位の一般固有ベクトルと呼ぶ。

(注1) Φ (従って A, B) が正則なら、問題 (A, B) はよく知られたシンプレクティック行列 $B^{-1}A$

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} \Phi^{-1} & -\Phi^{-1}GG^T \\ -H^TH\Phi^{-1} & \Phi^T + H^TH\Phi^{-1}GG^T \end{bmatrix} \quad (8)$$

に対する通常の固有値問題に帰着する。

(注2) 行列 A, B の構成より $\Delta(\lambda) \neq 0$ であり、したがって (A, B) の固有値は不定とはならない。また Φ が非正則のとき $\Delta(\lambda)$ の次数は (A, B) の次元 $2n$ より低くなる。これを $2n-\nu$ とすると (A, B) の残りの ν 個の固有値は通常 ∞ ((B, A) の 0 固有値) であるといわれ¹⁰⁾、対応する固有ベクトルは (B, A) の $\lambda=0$ に対するそれと定義される。

一方、(2)式の解 P の実対称性に関連して

$$\begin{aligned} w_k A &= \lambda_k w_k B, \quad w_{k+i} A = \lambda_k w_{k+i} B + w_{k+i-1} B, \\ l &= 1, 2, \dots, \beta_k \end{aligned} \quad (9)$$

なる左一般固有ベクトルチェーンを定義する。一方 z_{i+j} は右一般固有ベクトルとも呼ばれる。

以下に既知あるいは容易に導びける結果を示す。任意の一般固有ベクトル z_i を2つの n 次ベクトル y_i, x_i に分割し $\begin{pmatrix} z_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ x_i \end{bmatrix}$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $X = (x_1, \dots, x_n)$ とする。ただし z_i が1位以上の一般固有ベクトルのときは対応するより低位のものもすべて Y, X の構成に用いるとする。

(i) $|X| \neq 0, |HYX^{-1}H^T + I| \neq 0$ とすると(2)式の解はすべてつぎの形で与えられる⁸⁾。

$$P = YX^{-1} \quad (10)$$

つぎの(ii), (iii)は Φ が正則のときの行列 $B^{-1}A$ のシンプレクティック性 $(B^{-1}A)^T V (B^{-1}A) = V$,

$$V = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

に相当する関係 $AVA^T = BVB^T$ より導びかれる。

(ii) λ を (A, B) の固有値とすると λ^{-1} も同じ重複度の (A, B) の固有値であり、 (A, B) の固有値は $\underbrace{0, \dots, 0, \lambda_{\nu+1}, \dots, \lambda_n, \lambda_{\nu+1}^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}, \infty, \dots, \infty}_{\nu}$ (12)

のように分布する⁸⁾。

(iii) λ を (A, B) の有限固有値とし、 $w_i, i=1, \dots, l$ を対応する左固有ベクトルチェーンとする。このとき λ は (B, A) の固有値で $VB^T w_i^T, i=1, \dots, l$ は対応する固有ベクトルチェーンである。

これは $\lambda - w_i$ の関係式 ((9)式) で両辺の転置をとり、つぎに左から AV をかけて上の $AVA^T = BVB^T$ を用いて導かれる。

(iv) (i)における n 個の固有値がすべて有限とする。すなわち $A \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} J$ (J は n 次 Jordan 行列) と書けるとし、 P をこれより導びかれる対称解とする。(3)式と $\Phi^T X = (H^T H Y + X) J$, すなわち $(H^T H P + I)^{-1} \Phi^T X = X J$ から $\Phi^T X = X J$ (13)

よって Φ_c の固有値は J のそれに一致する。

前節でも述べたように、可制御、可観測、可安定、可検出の概念は、リカッチ方程式の解析でも重要な概念である。以下で観測の方は括弧に入れて並記する。

【定義1】 Φ の固有値 λ は、 $\Phi^T u = \lambda u$ および $G^T u = 0$ ($\Phi v = \lambda v$ および $Hv = 0$) ならば $u = 0$ ($v = 0$) のとき可制御 (可観測) であるという。

【定義2】 対 (Φ, G) (対 (H, Φ)) は、 Φ の $|\lambda| \geq 1$ なる固有値 λ がすべて可制御 (可観測) のとき可安定 (可検出) であるという。

このとき (4) 式を用いて容易につきの結果を得る。

(v) λ が Φ の非可制御 (非可観測) な固有値であるのは (A, B) ((B, A)) が λ に対する $\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$ ($\begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$) の形 (0 は n 次零ベクトル) の固有ベクトルをもつときに限る。

(v) の $u(v)$ は実質的に Φ の固有ベクトルである。

3. 定常解の実対称性および半正定性

前節(i)で与えられる解 P は一般に、複素解、非対称解、半負定解など (2) 式のすべての解を表わす。我我はそのうち特に実対称、半正定解に興味があり、以下で固有値-固有ベクトルと対応する解の性質の関係を明らかにする。

今、 (A, B) の有限固有値 λ_i, λ_k に対する右、左一般固有ベクトルチェインを $z_{i+j}, j=0, 1, \dots, \alpha_i, w_{k+l}, l=0, 1, \dots, \beta_k$ とすると、付録1により

$$w_{k+l} B z_{i+j} \begin{cases} \neq 0, & i=k, l+j=\alpha_i \\ =0, & \text{その他の場合} \end{cases} \quad (14)$$

なる関係が成立する。一方、 $n \times n$ 行列 $\Omega, \tilde{\Omega}$ を

$$\Omega \triangleq X^* Y, \tilde{\Omega} \triangleq X^T Y \quad (15)$$

とすると、(10) 式より $P = YX^{-1} = (X^{-1})^* Q X^{-1} = X^{-T} \tilde{Q} X^{-1}$ だから P が実対称であることと、 Ω がエルミート、 $\tilde{\Omega}$ が対称であることは同等である。 Ω の ij 要素は $x_i^* y_j$ で、また $z_i^* V z_j = x_i^* y_j - y_i^* x_j$ に注意すると、 Ω がエルミートであるためには $z_i^* V z_j = 0$ が必要となる。同様に $\tilde{\Omega}$ の対称性には $z_i^T V z_j (= x_i^T y_j - y_i^T x_j) = 0$ が必要である。このとき条件 $z_i^* V z_j = 0$ に関連してつぎの補題が成立する。

【補題1】 λ_i を (A, B) (λ_k^* を (B, A)) の有限固有値とし $z_{i+j}, j=0, 1, \dots, \alpha_i$ ($w_{k+l}, l=0, 1, \dots, \beta_k$) を対応する一般固有ベクトルチェインとする。このとき $z_{i+j}^* V a_{k+l} \neq 0$ なる必要十分条件は $i=k$ かつ $j+l=\alpha_i$ である。

(証明) λ_k^* が (B, A) の固有値だから前節(ii)より (A, B) は固有値 λ_k をもち、対応する左一般固有ベクトルチェインを $w_{k+l}, l=0, 1, \dots, \beta_k$ とする。このと

き前節(iii)より $VB^T w_{k+l}^*$ は (B, A) の固有値 λ_k に対する一般固有ベクトルチェイン、したがって $VB^T w_{k+l}^*$ は (B, A) の λ_k^* に対するチェイン、となるから $a_{k+l} = \gamma VB^T w_{k+l}^*$ (γ は非零スカラー)。したがって

$$\begin{aligned} z_{i+j}^* V a_{k+l} &= \gamma z_{i+j}^* V^2 B^T w_{k+l}^* = -\gamma z_{i+j}^* B^T w_{k+l}^* \\ &= -\gamma (w_{k+l} B z_{i+j})^* \end{aligned} \quad (15)$$

(14) 式を用いると左辺 $\neq 0 \iff i=k$ かつ $j+l=\alpha_i$ ■

Ω のエルミート性に対して本補題の意味することは次の通りである。すなわち付録2より、 (A, B) の固有値 λ_i と λ_k^* に対する一般固有ベクトルチェインをそれぞれ $z_{i+j} (0 \leq j \leq \alpha_i)$, $\tilde{z}_{k+l} (0 \leq l \leq \beta_k)$ とするとき、 $i=k$ かつ $j+l=\alpha_i$ ならば $z_{i+j}^* V \tilde{z}_{k+l} \neq 0$ 。したがって『 Ω がエルミート行列であるためには、ベクトル z_{i+j} と $\tilde{z}_{i+\alpha_i-j}$ は同時には解の構成に用いることはできない』。また一方、 $i=k$ かつ $j+l=\alpha_i$ のとき、 $0 \neq z_{i+j}^* V \tilde{z}_{k+l} = z_{i+j}^T V \tilde{z}_{k+l}$ だから、『 $\tilde{\Omega}$ が対称であるためには z_{i+j} と $\tilde{z}_{i+\alpha_i-j} (= \tilde{z}_i^*$ に対する (α_i-j) 位一般固有ベクトル) とは同時には用いることができない』ことにもなる。

【補題2】 単位円内 (単位円外) にある (A, B) の n 個の固有値に対する一般固有ベクトル $\begin{bmatrix} y_i \\ x_i \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} v_i \\ u_i \end{bmatrix} \right)$, $i=1, 2, \dots, n$ とすると

$$\begin{aligned} \Omega &\triangleq X^* Y \triangleq [x_1, \dots, x_n]^* [y_1, \dots, y_n] = \Omega^* \geq 0, \\ \tilde{\Omega} &\triangleq X^T Y = \tilde{\Omega}^T \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \Psi &\triangleq U^* V \triangleq [u_1, \dots, u_n]^* [v_1, \dots, v_n] = \Psi^* \leq 0, \\ \tilde{\Psi} &\triangleq U^T V = \tilde{\Psi}^T \end{aligned} \quad (16b)$$

(証明) (前半) J を $|\lambda| < 1$ なる固有値 λ よりなる n 次 Jordan 行列とすると、

$$A \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} J \quad (17)$$

今、 $n \times n$ 行列 $Y(k), X(k), k=0, 1, \dots$ を定義する。

$$\begin{bmatrix} Y(k) \\ X(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} J^k, \quad k=0, 1, \dots \quad (18)$$

(17) 式に右から J^k をかけ、(18) 式を代入すると

$$A \begin{bmatrix} Y(k) \\ X(k) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} Y(k+1) \\ X(k+1) \end{bmatrix} \quad (19)$$

これよりつぎの関係を得る。

$$W(k) \triangleq X(k)^* Y(k) - X(k+1)^* Y(k+1) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &= X(k)^* G G^T X(k) + Y(k+1)^* H^T H Y(k+1) \\ &= W(k)^* \geq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $\Omega = X^* Y = X(0)^* Y(0)$, および $|\lambda(J)| < 1$ より $k \rightarrow \infty$ のとき $X(k), Y(k) \rightarrow 0$ に注意すれば

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} W(k) = \Omega^* \geq 0 \quad (22)$$

$\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}^T$ の証明は (20) 式以下で $*$ を T とおけばよい。

(後半) この場合、固有値-固有ベクトルの関係、

$A \begin{bmatrix} V \\ U \end{bmatrix} J = B \begin{bmatrix} V \\ U \end{bmatrix}$ に同様な方法が適用できる。■

(注3) 本補題のように (A, B) が単位円内(外)に n 個の固有値をもつためには, 前節(ii)より (A, B) が単位円上に固有値をもたないことが必要である。

4. 半正定常解の存在条件

本節では4.2節において半正定常解の存在条件を導びくが, 準備として4.1節で解の存在などに関連する行列の正則性を調べる。4.3節ですべての半正定解の構成法やその個数を示す。これらは Kucera²⁾の結果の Φ が非正則な場合への拡張になっている。

4.1 行列の正則性に関する補題

まず(2)式の逆行列 $(HPH^T + I)^{-1}$ の存在に関わる条件 $|HYX^{-1}H^T + I| \neq 0$ (2節(i)) を調べる。

[補題3] $|X| \neq 0$, $X^*Y = Y^*X$ を仮定すると, $|HYX^{-1}H^T + I| = 0$ となる必要十分条件は $\begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}$ が (A, B) の ∞ 固有値に対する固有ベクトルを含むことである。

(証明) (十分性) $z = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ を問題のベクトルとする。一般性を失わずに $Z = \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & Y_1 \\ x & X_1 \end{bmatrix} = [z, Z_1]$ と書け, $Bz = 0$, Z_1 は他の $(n-1)$ 個のベクトルをまとめたものである。今, γ, Γ をそれぞれ n 次ベクトル, $n \times (n-1)$ 行列として

$$X^{-1} = [x \ X_1]^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma^* \\ \Gamma^* \end{bmatrix} \quad (23)$$

とおくと $x\gamma^* + X_1\Gamma^* = I$ 。一方 $Bz = 0$ より, $H^THy = -x$ だから

$$\begin{aligned} |HYX^{-1}H^T + I| &= |H^THYX^{-1} + I| \\ &= |H^TH(y\gamma^* + Y_1\Gamma^*) + I| \\ &= |-x\gamma^* + H^THY_1\Gamma^* + I| \\ &= |(X_1 + H^THY_1)\Gamma^*| = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

最後の等号は, 中の行列が $n \times (n-1)$ と $(n-1) \times n$ 行列の積であることによる。

(必要性) $|HYX^{-1}H^T + I| = 0$ より $|H^THY + X| = 0$ 。したがって $(H^THY + X)b = 0$ なる n 次ベクトル $b(\neq 0)$ が存在する。今, Z が問題のベクトルを含まないとすると固有値—固有ベクトルの関係は $AZ = BZJ$ の形に書け, $X^*Y = Y^*X$ より

$$\begin{aligned} Y^*\Phi^TX &= Y^*H^THYJ + Y^*XJ \\ &= (Y^*H^TH + X^*)YJ \end{aligned} \quad (25)$$

よって $b^*Y^*\Phi^TX = 0$ 。すなわち $\Phi Yb = 0$ だから

$$B \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} (H^THY + X)b \\ \Phi Yb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

固有ベクトルの独立性からこれは Z が ∞ 固有値に対

するベクトルを含むことを意味し, 矛盾である。■

本補題により (A, B) の ∞ 固有値は(2)式の解の構成に用いられないことがわかる。つぎの補題4, 5においては $\begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V \\ U \end{bmatrix}$ はそれぞれ (A, B) の単位円内, 単位円外の固有値に対応する n 個のベクトルよりなるとする(前節注3参照)。すなわち

$$A \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} J, \quad A \begin{bmatrix} V \\ U \end{bmatrix} J = B \begin{bmatrix} V \\ U \end{bmatrix}, \quad |\lambda(J)| < 1 \quad (27)$$

[補題4] $|X| \neq 0$ ($|U| \neq 0$) なるための必要十分条件は $|\lambda| \geq 1$ ($|\lambda| \leq 1$) なる Φ の固有値 λ がすべて可観測なることである。

(証明) U についてもほぼ同様なので X に関する証明のみを行う。(必要性) $|\lambda| \geq 1$ なる Φ の固有値 λ が非可観測であれば2節(v)により (B, A) は固有値 λ ($|\lambda| \geq 1$) をもち ($|\lambda| = 1$ のときは注3よりここでの問題設定に反する), 対応する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$ の形をしている。従って (A, B) は固有値 λ^{-1} ($|\lambda^{-1}| < 1$) に対応する固有ベクトル $\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$ をもつ。すなわち X のある列は0であり $|X| = 0$ 。

(十分性) $|X| = 0$ とし $b(\neq 0) \in \mathcal{N}(X)$ とする。すなわち $Xb = 0$ 。(27)式より

$$\Phi^TX = H^THYJ + XJ \quad (28a)$$

$$Y - GG^TX = \Phi YJ \quad (28b)$$

(28a)式に右から b , 左から $b^*J^*Y^*$ をかけ, $Xb = 0$ および $X^*Y = Y^*X$ を用いると

$$b^*J^*Y^*H^THYJb + b^*J^*X^*YJb = 0 \quad (29)$$

補題2より $X^*Y \geq 0$ だから $HYJb = 0$, $X^*YJb = 0$ 。

よって $Xb = 0$ と(28a)式より $XJb = 0$ 。すなわち Jb ($\neq 0$) $\in \mathcal{N}(X)$ であり ($Jb = 0$ なら(28b)から $Yb = 0$ となり $Xb = 0$ と併せると $\begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}$ の一次独立性に反する), $\mathcal{N}(X)$ は n 次ユークリッド空間の J -不変部分空間となる。したがって

$$Jb = \mu b \quad (\mu: \text{スカラー}) \quad (30)$$

なる $\hat{b}(\neq 0) \in \mathcal{N}(X)$ が存在する。上式は μ が J の固有値を意味するから $|\mu| < 1$ 。また上で導かれた b を含む式は $\hat{b}$ に置き換えても成立し, $J\hat{b} \neq 0$ より $\mu \neq 0$ 。(28b), (30)式から $\Phi(Y\hat{b}) = \mu^{-1}(Y\hat{b})$ であり, $0 = \mu H(Y\hat{b})$ ($\mu \neq 0$) だから結局, μ^{-1} ($|\mu^{-1}| > 1$) は Φ の非可観測な固有値となる。■

[補題5] $|V| \neq 0$ ($|Y| \neq 0$) なるための必要十分条件は $|\lambda| \geq 1$ ($|\lambda| \leq 1$) なる Φ の固有値 λ がすべて可制御なることである。(証明は付録3を参照されたい)

(注4) 補題4, 5の $|X| \neq 0$, $|V| \neq 0$ の条件はそ

れぞれ, 可検出, 可安定に一致する.

4.2 半正定常解の存在定理

以上から (2) 式の半正定解の存在条件を導く.

《定理 1》 (2) 式に対応する閉ループ系を漸近安定とする半正定解をもつ必要十分条件は, 対 (H, Φ) が可検出かつ (A, B) が単位円上に固有値をもたないことである.

(証明) (必要性) 2 節 (iv) より閉ループ系 Φ_c が漸近安定となる解 P は (A, B) の単位円内の n 個の固有値から構成される. 従って (ii) より残りの n 個は単位円外, よって (A, B) は単位円上に固有値をもたない. さらに $\Phi_c = \Phi + KH$, $K \triangleq -\Phi PH^T(HPH^T + I)^{-1}$, は漸近安定だから (Φ^T, H^T) は可安定, すなわち (H, Φ) は可検出である.

(十分性) この場合 (A, B) は単位円内に n 個の固有値をもち, (27) の前半の式が成立する. 可検出の仮定と補題 4 より $|X| \neq 0$. また補題 2 より $\Omega = X^*Y = \Omega^* \geq 0$, $\tilde{\Omega} = X^T Y = \tilde{\Omega}^T$, 補題 3 より $|HYX^{-1}H^T + I| \neq 0$, が成立し, 結局 $P = YX^{-1}$ は Φ_c を漸近安定とする実対称半正定解である. ■

《定理 2》 (H, Φ) が可検出で (A, B) が単位円上に固有値をもたないと仮定する. このとき (2) 式が唯一半正定解をもつ必要十分条件は (Φ, G) が可安定なることである.

(証明) (十分性) 仮定の下では定理 1 の解 P が存在する. 今, 他の半正定解 $\hat{P}$ が存在したとすると, $\hat{P}$ の構成には少なくとも 1 個の $1 < |\lambda| < \infty$ なる固有値と対応する固有ベクトル $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ が用いられる. $A \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \lambda B \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ より,

$$\Phi^T x = \lambda H^T H y + \lambda x, \quad (31a)$$

$$y - GG^T x = \lambda \Phi y \quad (31b)$$

(31a) 式の複素共役転置をとった式に右から λy をかけ, また (31b) 式に左から x^* をかけることにより

$$(1 - |\lambda|^2) x^* y = x^* GG^T x + |\lambda|^2 y^* H^T H y \quad (32)$$

ここで右辺 ≥ 0 , $|\lambda| > 1$ より $x^* y \leq 0$. 一方 $\hat{P} \geq 0$ より $x^* y \geq 0$ ($x^* y$ は $\hat{\Omega} \geq 0$ の対角要素) だから結局 $x^* y = 0$. したがって (32) 式より $H y = 0$, $G^T x = 0$, となり (31a) 式より $\Phi^T x = \lambda x$ を得る. $\hat{P}$ の存在から $x \neq 0$ で, また $|\lambda| > 1$ だから, これは (Φ, G) が非可安定を意味する. よって (Φ, G) が可安定ならば半正定解は唯一である.

(必要性) 定理 1 の解 $P = YX^{-1} \geq 0$ を導びく. Y , X を $Y = [y_1, \dots, y_n]$, $X = [x_1, \dots, x_n]$ とする. すなわちベクトル $\begin{bmatrix} y_i \\ x_i \end{bmatrix}$ は (A, B) の単位円内の固有値に

対応する. 以下で, (Φ, G) が非可安定なら他の解 $\hat{P} = \hat{Y}\hat{X}^{-1} \geq 0$ が存在することを示す.

今, 一般性を失わずに λ_1^{-1} を Φ の非可安定な固有値 ($|\lambda| \geq 1$ なる非可制御な固有値) とする. したがって $1 < |\lambda_1^{-1}| < \infty$ で対応する固有ベクトルは 2 節 (v) より $\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$ の形である. まず λ_1 を実固有値とし, $\begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}$

で λ_1 に対する最高位一般固有ベクトル $\begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$ とする) を λ_1^{-1} に対する (0 位一般) 固有ベクトル $\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$ により置きかえた $\begin{bmatrix} \hat{Y} \\ \hat{X} \end{bmatrix}$ を考える:

$$\begin{bmatrix} \hat{Y} \\ \hat{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y_2 \cdots y_n \\ u & x_2 \cdots x_n \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & Y_1 \\ u & X_1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

以下で $\hat{P} = \hat{Y}\hat{X}^{-1} (\neq P) \geq 0$ が存在することを示す. 補題 1 より $u^* y_i - 0^* x_i = 0$, $i = 2, 3, \dots, n$ だから $u^* Y_1 = 0$. したがって

$$\hat{\Omega} = \hat{X}^* \hat{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_1^* Y_1 \end{bmatrix} = \hat{\Omega}^* \geq 0 \quad (34)$$

ただし $X_1^* Y_1 = Y_1^* X_1 \geq 0$ は P に対する $\Omega = X^* Y = \Omega^* \geq 0$ より成立する. 同様に $\tilde{\Omega} = \hat{X}^T \hat{Y}$ の対称性も示せる. したがって $|\hat{X}| \neq 0$ であれば $\hat{P} = \hat{Y}\hat{X}^{-1}$ は実対称半正定解である.

逆に $|\hat{X}| = 0$ とすると $|X| \neq 0$ より $\text{rank}(X_1) = n - 1$ だから $u = X_1 b$ なる $(n-1)$ 次ベクトル $b (\neq 0)$ が存在する. また,

$$A \begin{bmatrix} \hat{Y} \\ \hat{X} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \hat{Y} \\ \hat{X} \end{bmatrix} J, \quad J = \text{block diag} \{ \lambda_1^{-1}, J_1 \} \quad (35)$$

J_1 は $(n-1)$ Jordan 行列である. よって

$$\Phi^T X_1 = H^T H Y_1 J_1 + X_1 J_1, \quad (36a)$$

$$\Phi^T u = \lambda_1^{-1} u \quad (36b)$$

(36a) の複素共役転置をとって左から b^* , 右から $Y_1 J_1 b$ をかけると

$$b^* X_1^* \Phi Y_1 J_1 b = b^* J_1^* Y_1^* H^T H Y_1 J_1 b + b^* J_1^* X_1^* Y_1 J_1 b \quad (37)$$

$u = X_1 b$, (36b), および $u^* Y_1 = 0$ から左辺 $= u^* \Phi Y_1 J_1 b = \lambda_1^{-1} u^* Y_1 J_1 b = 0$ となる. したがって $X_1^* Y_1 \geq 0$ より $H Y_1 J_1 b = 0$ で, (36a) に右から b をかけると $\Phi^T X_1 b = X_1 J_1 b$. さらに $u = X_1 b$, (36b) をこれに用いると $X_1 J_1 b = \Phi^T u = \lambda_1^{-1} u = \lambda_1^{-1} X_1 b$:

$$X_1 (J_1 - \lambda_1^{-1} I_{n-1}) b \triangleq X_1 \hat{b} = 0 \quad (38)$$

ここで $|\lambda(J_1)| < 1$ と $|\lambda_1^{-1}| > 1$ から $\hat{b} \neq 0$ に注意すれば $\text{rank}(X_1) < n - 1$ となり矛盾である. したがって $|\hat{X}| \neq 0$ で $\hat{P} = \hat{Y}\hat{X}^{-1} \geq 0$ の存在が示された. また明らかに $\hat{P} \neq P$. λ_1 が複素固有値のときは共役対 λ_1 と $\lambda_2 = \lambda_1^*$ を同時に入れ換えればよいが, 証明はほぼ同様なので省略する. ■

以上の定理では、 (A, B) の単位円上の固有値が重要な役割を果たしているが、つぎにその条件を調べる。

〔補題 6〕 (A, B) が単位円上に固有値をもつ必要十分条件は、 Φ が単位円上に非可制御または非可観測な固有値をもつことである。

(証明) (必要性) λ を (A, B) の単位円上の固有値とし ($|\lambda|=1$)、対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ とすると (32) 式で $|\lambda|=1$ とおいた関係が成立する。したがって $G^T x = 0$, $H y = 0$ で、これを $A \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \lambda B \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$, ((31) 式) に代入すると $\Phi^T x = \lambda x$, $\Phi y = \lambda^{-1} y$ を得る。 x, y は同時には 0 にならないから、結局、 Φ は $|\lambda|=1$ なる非可制御または非可観測な固有値をもつ。

(十分性) 2 節(v) より明らか。■

定理 1, 2 と本補題から次の定理が導かれる。

〔定理 3〕 (2) 式が唯一半正定解をもち対応する閉ループ系が漸近安定となる必要十分条件は、 (Φ, G) が可安定かつ (H, Φ) が可検出なることである。

(証明) (十分性) 補題 6 より (A, B) は単位円上に固有値をもたず、したがって定理 2 が唯一性を、定理 1 が閉ループ系 Φ_c の漸近安定性を、保証する。

(必要性) 定理 1 より、 Φ_c が漸近安定となる半正定解の存在は (H, Φ) が可検出と (A, B) が単位円上に固有値をもたないことを必要とする。このとき定理 2 より唯一性は (Φ, G) が可安定を要する。■

上の定理の解 $P = YX^{-1}$ が正定となるのは $|Y| \neq 0$ の場合に限られるから、これに補題 5 を適用すると

〈系 1〉 (Φ, G) が完全可制御かつ (H, Φ) が可検出ならば、(2) 式は唯一正定解をもち、対応する閉ループ系は漸近安定となる。

(注 5) 補題 4 および 2 によれば、 (A, B) が単位円上に固有値をもたず、かつ Φ の $|\lambda| \leq 1$ なる固有値 λ がすべて可観測ならば、 $Q = VU^{-1} \leq 0$ が存在する。しかし補題 3 から (2) 式の逆行列が存在せず、これは“幻影解”とも呼ぶべきものである。

4.3 半正定解の構成法およびその個数

定理 2 の証明で示されるように、定理 1 での解 (以後これを P_i とする) 以外の半正定解は Φ の非可安定な固有値、すなわち $\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$ の形の固有ベクトルより、導びかれる。以下ではこの $P_i \geq 0$ の存在 (すなわち (A, B) が単位円上に固有値をもたず (H, Φ) が可検出) を仮定して、すべての半正定解の求め方を示す。まず 2 節(v) の拡張として次の補題が導ける。

〔補題 7〕 (A, B) が固有値 λ_i に対して $\begin{bmatrix} 0 \\ u_{i+j} \end{bmatrix}$,

$j=0, 1, \dots, \gamma_i-1$ の形の一般固有ベクトルチェインをもつ必要十分条件は Φ^T が固有値 λ_i をもち $G^T u_{i+j} = 0$ なる対応する一般固有ベクトルチェイン u_{i+j} , $j=0, 1, \dots, \gamma_i-1$ をもつことである。

したがって $\gamma_i \geq 1$ のとき λ_i は非可制御な固有値である。今、 $P_i = YX^{-1}$ を導びく Y, X を

$$\begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \cdots y_i \cdots y_{i+\alpha_i} \cdots y_n \\ x_1 \cdots x_i \cdots x_{i+\alpha_i} \cdots x_n \end{bmatrix} \quad (39)$$

とする。さらに λ_i^{-1} を Φ の非可安定な実固有値とし補題 7 を満足する最大の γ_i を γ_i^* (明らかに $1 \leq \gamma_i^* \leq \alpha_i + 1$) とする。したがって λ_i^{-1} に対する一般固有ベクトルチェインは

$$\begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & v_{i+\gamma_i^*} \cdots v_{i+\alpha_i} \\ u_i \cdots u_{i+\gamma_i^*-1} & u_{i+\gamma_i^*} \cdots u_{i+\alpha_i} \end{bmatrix}, \quad v_{i+\gamma_i^*} \neq 0 \quad (40)$$

そこで (39) 式での、 λ_i に対する最低位から q_i 個 ($1 \leq q_i \leq \gamma_i^*$) の一般固有ベクトルを、 λ_i^{-1} に対する最高位から q_i 個の一般固有ベクトル、によって置き換える：

$$\begin{bmatrix} \hat{Y} \\ \hat{X} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \cdots y_i \cdots y_{i+\alpha_i-q_i} & 0 \cdots 0 & \cdots y_n \\ x_1 \cdots x_i \cdots x_{i+\alpha_i-q_i} & u_i \cdots u_{i+q_i-1} \cdots x_n \end{bmatrix} \quad (41)$$

このとき $\hat{P} = \hat{Y}\hat{X}^{-1}$ が存在して $\hat{P} \geq 0$ であることは、定理 2 の必要性の証明とはほぼ同様であるので省略する (定理 2 ではここでの $q_i=1$ の場合に相当する。) λ_i が複素固有値のときには λ_i と λ_i^* を同時に扱うことも定理 2 と同様である。

上の q_i は順次 $q_i=1, 2, \dots, \gamma_i^*$ と選べ、また他の非可安定な固有値 λ_i^{-1} に対しても λ_i^{-1} とは独立に $q_i=1, 2, \dots, \gamma_i^*$ と変化させることができる。(2) のすべての半正定解が P_i から出発して上のような手順で構成できることは 2 節(i), 補題 1 より (証明の記述は煩雑になるが) 明らかであろう。上のような λ_i は結局 (γ_i^*+1) 個 (ベクトルの置き換えをしない場合と q_i 個, $1 \leq q_i \leq \gamma_i^*$, の置き換えをする場合) の相異なる半正定解を導びくことにより、(2) 式は

$$P(\gamma_i^*+1) \quad (42)$$

個の半正定解をもつ。ただし λ_i^{-1} が Φ の非可安定な固有値でない場合には $\gamma_i^*=0$ とし、また共役複素固有値対は 1 つの固有値とみなして積をとる。

特に (Φ, G) が可安定のときは、すべての i について $\gamma_i^*=0$ だから半正定解は唯一となる (定理 3 参照)。

5. 数 値 例

つぎの 2 次元システムを考える。

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = [0 \quad 1] \quad (43)$$

明らかに Φ は非正則で、一般固有値問題としての定式

化が必要となる。この系は可制御、可観測で、系1より唯一解 $P_I > 0$ が存在する筈である。

(A, B) の固有値は3次の特性多項式の根である。

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda B| = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 1) \quad (44)$$

残りの1個は ∞ で、その固有値—固有ベクトルは

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \lambda_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \lambda_4 = \infty \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 + \sqrt{5} \\ 2 \\ 1 + \sqrt{5} \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 - \sqrt{5} \\ 2 \\ 1 - \sqrt{5} \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

P_I は単位円内の固有値 $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ から導かれ

$$P_I = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 + \sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} \\ 1 + \sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} \end{bmatrix} > 0 \quad (47)$$

実対称解を導く他の固有値は $\{\lambda_1, \lambda_3\}$ で、このとき

$$P_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 - \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} \end{bmatrix} \quad (\text{不定}) \quad (48)$$

これ以外の組合せでは実対称解は得られない：(i) $\lambda_4 = \infty$ を含めると補題3より(2)式の $[HPH^T + I]^{-1}$ が存在せず、(ii) $\{\lambda_2, \lambda_3\}$ は補題1より非対称解となる。(47)の解 P_I に対する閉ループ系は

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 1 & (1 - \sqrt{5})/2 \\ 1 & (1 - \sqrt{5})/2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

この固有値は0, $(3 - \sqrt{5})/2$ で λ_1, λ_2 と一致する(2節(iv))。すなわち Φ (開ループ系) の0固有値は Φ_c (閉ループ系) にも現われる。

6. おわりに

離散時間系の最適推定制御問題において生ずる行列リカッチ方程式の定常解について、その有力な解析法として知られる代数的方法により、考察した。特に系の状態遷移行列 Φ が非正則な場合をも考慮し、そのため一般固有値問題による定式化を用いた。

本文では、まず前半(2,3節)において、一般固有値問題による定式化と、それに基づく解の存在あるいは実対称性、半正定性などに関連した性質を調べた。続いて4節で、半正定解の存在定理を導びき、また半正定解が複数個存在する場合のそれらの構成法や個数を示した。

これにより、 Φ が非正則な場合のリカッチ方程式の解構造が、正則な場合の自然な拡張として、系統的に明らかにされたと思われる。ただ特徴的なことは、本文で見られるように、 Φ (開ループ) が0固有値をもてば Φ_c (閉ループ) もそれをもつことである。また、(A, B) の ∞ 固有値に対する(一般)固有ベクトルは常に除外しなければならないから、解の構成の際の自由

度はある意味で減少する。

非正則な Φ をもつ系は時間遅れや制御遅れがある場合に見られる。本論文の結果はこの種の系に適用できるのみならず、 Φ が正則でも一般固有値問題とすることにより数値的な不安定性を回避しようとする場合にも有用であると思われる。

謝辞

本研究の機会を与えていただいた、富士通(株)国際情報社会科学研究所の北川敏男会長に感謝します。

参考文献

- 1) R. E. Kalman: New Methods and Results in Linear Prediction and Estimation Theory, RIAS Report, 61-1, Baltimore Md. (1961)
- 2) W. M. Wonham: On a Matrix Riccati Equation of Stochastic Control, SIAM J. on Control, 6-4, 681/698 (1968)
- 3) V. Kucera: The Discrete Riccati Equation of Optimal Control, KYBERNETIKA, 8-5 (1972)
- 4) 西村・狩野: 離散周期系の Riccati 方程式の代数的解法と可検出性・可安定性, 計測自動制御学会論文集, 14-5, 486/493 (1978)
- 5) H. Kano: Periodic Solutions of Matrix Riccati Equations in Discrete Time-invariant Systems, International J. of Control, 38-1, 27/45 (1983)
- 6) 狩野・西村: 最適推定制御問題におけるマトリクスリカッチ方程式, 計測と制御, 20-6, 566/575 (1981)
- 7) 狩野: 最適推定制御問題におけるマトリクスリカッチ方程式—離散系の場合—, 国際情報社会科学研究所研究報告, 第14号 (1984)
- 8) T. Pappas et al.: On the Numerical Solution of the Discrete-Time Algebraic Riccati Equation, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-25-4, 631/641 (1980)
- 9) 美多: 演算時間を考慮したディジタル制御系の設計, 計測と制御, 22-7, 614/619 (1983)
- 10) F. R. Gantmacher: The Theory of Matrices, 2, Chelsea pub. Co. (1974)
- 11) C. B. Moler and G. W. Stewart: An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems, SIAM J. on Numerical Analysis, 10-2, 241/256 (1973)

《付 録》

〈付録1〉 (右, 左一般固有ベクトルの関係)

A, B を $\Delta(\lambda) \triangleq |A - \lambda B| \neq 0$ なる n 次正方行列とし、固有値 λ_i に対する右一般固有ベクトルチェイン $\{z_{i+j}\}$ を

$$Az_i = \lambda_i Bz_i, \quad Az_{i+j} = \lambda_i Bz_{i+j} + Bz_{i+j-1}, \quad j=1, 2, \dots, \alpha_i \quad (A.1)$$

とする。各 i に対してこれらをまとめて書くと

$$AZ_i = BZ_i J_i \quad (A.2)$$

ここで Z_i は上の一般固有ベクトルよりなる $n \times l$ ($l \triangleq \deg \Delta(\lambda)$) 行列、 J_i は対応する固有値よりなる $l \times l$ Jordan 行列である。(A, B) の残りの $n-l$ 個は ∞ 固有値で対応する固有ベクトルは (B, A) の0固有値に

対する固有ベクトルで与えられる.

$$Bz_k = 0, \quad Bz_{k+j} = Az_{k+j-1}, \quad j=1, 2, \dots, \beta_k \quad (\text{A. 3})$$

各 k についてまとめて書けば

$$BZ_2 = AZ_2 J_2 \quad (\text{A. 4})$$

Z_2 は $n \times (n-l)$ 固有ベクトル行列, J_2 は対角がすべて 0 の $(n-l) \times (n-l)$ Jordan 行列である.

$$\begin{aligned} n \times n \text{ 行列 } Z \text{ を } Z = (Z_1, Z_2) \text{ とおけば (A. 2) から} \\ AZ = (BZ_1, AZ_2)J, \quad J = \text{block diag} \{J_1, I_{n-l}\} \end{aligned} \quad (\text{A. 5})$$

まず $|(BZ_1, AZ_2)| \neq 0$ を示す. 逆を仮定すると $b^*(BZ_1, AZ_2) = (b^*BZ_1, b^*AZ_2) = 0$ なる n 次ベクトル $b \neq 0$ が存在する. 一方, 仮定 $\Delta(\lambda) \neq 0$ より A と B の零空間は変わらないから, b^*B と b^*A は同時には零にならない. (i) $b^*B \neq 0$ のとき (A. 4) 式から, $b^*BZ = (b^*BZ_1, b^*BZ_2) = (0, b^*AZ_2J_2) = (0, 0)$. (ii) $b^*B = 0$ のとき $b^*A \neq 0$ で, (A. 2) 式から $b^*AZ = (b^*AZ_1, b^*AZ_2) = (b^*BZ_1J_1, 0) = (0, 0)$. (i), (ii) のいずれも Z が非正則となり矛盾である. よって $|(BZ_1, AZ_2)| \neq 0$.

S_1, T_1 を $l \times n$ 行列, S_2, T_2 を $(n-l) \times n$ 行列

$$(BZ_1, AZ_2)^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}, \quad Z^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A. 6})$$

とおけば, 明らかにつぎの恒等式が成立する.

$$\begin{bmatrix} S_1 B Z_1 & S_1 A Z_2 \\ S_2 B Z_1 & S_2 A Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix}, \quad Z_1 T_1 + Z_2 T_2 = I_n \quad (\text{A. 7})$$

(A. 6), (A. 7), (A. 4) を用いて (A. 5) を変形すると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} A = J \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} (BZ_1, AZ_2) \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \\ = J \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} (BZ_1 T_1 + AZ_2 T_2) \end{aligned} \quad (\text{A. 8})$$

$$= \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 B \\ S_2 B - J_2 T_2 + T_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A. 9})$$

さらに (A. 8), (A. 7) 式から $S_2 A = T_2$ となり (A. 9) 式から, (A. 2), (A. 4) に対応して次式を得る.

$$S_1 A = J_1 S_1 B, \quad S_2 B = J_2 S_2 A \quad (\text{A. 10})$$

S_1, S_2 の行を s_i, s_k とすると (A. 1), (A. 3) 式に対応して

$$s_{i+\alpha_i} A = \lambda_i s_{i+\alpha_i} B, \quad s_{i+j-1} A = \lambda_i s_{i+j-1} B + s_{i+j} B, \quad j = \alpha_i, \alpha_i - 1, \dots, 1 \quad (\text{A. 11})$$

$$s_{k+\beta_k} B = 0, \quad s_{k+j-1} B = s_{k+j} A, \quad j = \beta_k, \beta_k - 1, \dots, 1 \quad (\text{A. 12})$$

したがって S_1, S_2 は (A, B) の左一般固有ベクトルよりなる. (A. 4), (A. 7) 式を用いれば

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & S_1 A Z_2 J_2 \\ 0 & S_2 A Z_2 J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A. 13})$$

一般には (A, B) の左一般固有ベクトル w_i は s_i の非零スカラー倍であるから, (A, B) の有限固有値に対する右, 左一般固有ベクトル $Z_1, W_1 (AZ_1 = BZ_1 J_1, W_1 A = J_1 W_1 B)$ の関係は

$$W_1 B Z_1 = D \quad (D \text{ は正則対角行列}) \quad (\text{A. 14})$$

W_1 は w_i を行にもつ行列である. また (A. 2), (A. 7) 式からつぎの関係も成立する.

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix} \quad (\text{A. 15})$$

〈付録 2〉 (補題 1 の解釈)

(A, B) の固有値 λ_i と λ_k^{-1} を考え, 対応する固有ベクトルチェインをそれぞれ $z_{i+j} (0 \leq j \leq \alpha_i)$, $\tilde{z}_{k+l} (0 \leq l \leq \alpha_k)$ とする. 補題 1 の (B, A) の固有値 λ_k^* とチェイン $a_{k+l} (0 \leq l \leq \alpha_k)$ の関係は, J を λ_k^* からなる $(\alpha_k + 1)$ 次 Jordan 行列とすれば

$$BM = AMJ, \quad M \triangleq (a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+\alpha_k}) \quad (\text{A. 16})$$

と書ける. そこでまず $\lambda_k^* \neq 0$ のときを考えると上式より $AM = BMJ^{-1}$. 一方 J^{-1} は正則な上三角行列 T を用いて, λ_k^{-1} よりなる $(\alpha_k + 1)$ 次 Jordan 行列 $\tilde{J}$ に変換される: $J^{-1} T = T \tilde{J}$. これと $AM = BMJ^{-1}$ から

$$A(MT) = B(MT) \tilde{J} \quad (\text{A. 17})$$

ここで $T = [t_{ij}]$ とすれば MT の第 $(l+1)$ 列 $(0 \leq l \leq \alpha_k)$, すなわち $\tilde{z}_{k+l}$, は

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{k+l} = t_{1, l+1} a_k + t_{2, l+1} a_{k+1} + \dots + t_{l+1, l+1} a_{k+l}, \\ t_{l+1, l+1} \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A. 18})$$

補題 1 と (A. 18) から特に $i=k, j=l=\alpha_i$ のとき

$$\begin{aligned} z_{i+j}^* V \tilde{z}_{k+l} = t_{1, l+1} z_{i+j}^* V a_k + \dots + t_{l+1, l+1} z_{i+j}^* V a_{k+l} \\ = t_{l+1, l+1} z_{i+j}^* V a_{k+l} \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A. 19})$$

一方 (B, A) の固有値 λ_k^* が $\lambda_k^* = 0$ のとき, 慣例にしたがって (A, B) の固有値 λ_k^{-1} は $\lambda_k^{-1} = \infty$ と見なされ対応する固有ベクトル $\tilde{z}_{k+l}$ は (B, A) の λ_k^* に対するそれら, すなわち a_{k+l} として定義される. したがって $i=k, j=l=\alpha_i$ のとき補題 1 より $z_{i+j}^* V \tilde{z}_{k+l} = z_{i+j}^* V a_{k+l} \neq 0$. 以上より結局, $i=k, j=l=\alpha_i$ のとき $z_{i+j}^* V \tilde{z}_{k+l} \neq 0$ となる.

〈付録 3〉 (補題 5 の証明)

(27) 式はつぎのように書けることに注意する.

$$\begin{aligned} \tilde{A} \begin{bmatrix} -U \\ V \end{bmatrix} = \tilde{B} \begin{bmatrix} -U \\ V \end{bmatrix} J, \quad \tilde{A} \begin{bmatrix} -X \\ Y \end{bmatrix} J = \tilde{B} \begin{bmatrix} -X \\ Y \end{bmatrix}, \\ |\lambda(J)| < 1 \end{aligned} \quad (\text{A. 20})$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \Phi \\ I & -H^T H \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} GG^T & I \\ \Phi^T & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A. 21})$$

補題 4 より, $|V| \neq 0 (|Y| \neq 0) \iff |\lambda| \geq 1 (|\lambda| \leq 1)$ なる Φ^T の固有値 λ がすべて $((G^T, \Phi^T)-)$ 可観測, 双対性により, $\iff ((\Phi, G)-)$ 可制御, となる.