非因果的な 2D システムの Descriptor 形式による実現†

植 竹 洋 一*・大久保 重 範*

Realization of Noncausal 2D Systems in Descriptor Form

Yoichi UETAKE* and Shigenori OKUBO*

1. はじめに

因果的な 2D システムはたとえば Roesser の 2 次元状態方程式¹⁾で表わされることが示されている²⁾。しかし画像処理などにおける 2D システムは非因果的でもよいのでこの場合のモデルが必要である³⁾。そこで本稿では非因果な 2D システムのモデルを提案する。1 次元の非因果的なシステムは Luenberger の Descriptor システムによって表わされる³⁾。本稿ではこれを 2 次元に拡張した Descriptor 形式の 2D システムのモデルを導く。さらに最小実現に関連してモデルの既約性について考察する。

2. 非因果的な 2D システムの Descriptor 形式による実現

2D システムは次式で表わされたとする。

$$\mathbf{y}_{hk} = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} H_{ij} \mathbf{u}_{h-i, k-j} \quad (1)$$

ただし、入力 $\mathbf{u}_{hk} \in R^r$ 、出力 $\mathbf{y}_{hk} \in R^m$ で $H_{ij} \in R^{m \times r}$ である。(1)式で $i < 0$ または $j < 0$ ならば $H_{ij} = 0$ であるとき(1)式の 2D システムは因果的であるといひ、それ以外の場合は非因果的であるといひ。

(1)式の双方向 (z, ω) 変換を考えると、

$$T(z, \omega) = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{hk} \omega^{-k} \right) z^{-h} + \sum_{h=0}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{-hk} \omega^{-k} \right) z^h$$

† 第 14 回制御理論シンポジウムで発表 (昭 60.5)

* 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

* Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received September 9, 1985)

(Revised January 6, 1986)

Key Words: noncausal 2D systems, descriptor systems, realization, cuprimeness

$$\begin{aligned} &= \sum_{h=1}^{\infty} F_h(\omega) z^{-h} + \sum_{h=0}^{\infty} F_{-h}(\omega) z^h \\ &= T_1(z, \omega) + T_2(z, \omega) \end{aligned} \quad (2)$$

とするとき $T(z, \omega)$ はつぎの仮定を満たしているとする。すなわち双方向 ω 変換 $F_i(\omega) (i=0, \pm 1, \dots)$ は ω の有理関数行列になり、さらに $(F_1(\omega), F_2(\omega), \dots)$ と $(F_0(\omega), F_{-1}(\omega), \dots)$ より作られる無限ハンケルマトリクスを有理関数体 $R(\omega)$ 上の行列とみたとき、それらの階数が有限であるとする。このとき実数体上の実現とまったく同様に $T_1(z, \omega)$ と $zT_2(z, \omega)$ の $R(\omega)$ 上の実現を得ることができる。すなわち、 $A_1(\omega)$ などを有理関数行列として、

$$T_1(z, \omega) = C_1(\omega) [zI_{n_1} - A_1(\omega)]^{-1} B_1(\omega) \quad (3)$$

$$zT_2(z, \omega) = C_2(\omega) [z^{-1}I_{n_2} - A_2(\omega)]^{-1} B_2(\omega) \quad (4)$$

となる。(4)式から $T_2(z, \omega)$ は

$$T_2(z, \omega) = C_2(\omega) [I_{n_2} - zA_2(\omega)]^{-1} B_2(\omega) \quad (5)$$

と表わされる。(3), (5)式より(1)式の入出力関係は、

$$\bar{\mathbf{v}}_{h+1}(\omega) = A_1(\omega) \bar{\mathbf{v}}_h(\omega) + B_1(\omega) \bar{\mathbf{u}}_h(\omega) \quad (6)$$

$$A_2(\omega) \bar{\mathbf{w}}_{h+1}(\omega) = \bar{\mathbf{w}}_h(\omega) - B_2(\omega) \bar{\mathbf{u}}_h(\omega) \quad (7)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_h(\omega) = C_1(\omega) \bar{\mathbf{v}}_h(\omega) + C_2(\omega) \bar{\mathbf{w}}_h(\omega) \quad (8)$$

となる。ここで

$$\bar{\mathbf{v}}_h(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_{hk} \omega^{-k} \quad (9)$$

であり、 $\bar{\mathbf{u}}_h(\omega)$, $\bar{\mathbf{w}}_h(\omega)$, $\bar{\mathbf{y}}_h(\omega)$ についても同様である。

(6), (7), (8)式を 2D システム(1)式の Descriptor 形式による $R(\omega)$ 上の実現ということにする。

つぎに(6), (7), (8)式の係数行列の実数体上の実現について考える。Verghese et al.⁴⁾ によると任意の有理関数行列 (プロパーでない場合も含む) は $A_1(\omega) = C_{a1}(\omega E_{a1} - A_{a1})^{-1} B_{a1}$ のように Descriptor 形式で表わすことができるので(6)式は

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_{h+1}(\omega) &= C_{a1}(\omega E_{a1} - A_{a1})^{-1} B_{a1} \bar{\mathbf{v}}_h(\omega) \\ &\quad + C_{b1}(\omega E_{b1} - A_{b1})^{-1} B_{b1} \bar{\mathbf{u}}_h(\omega) \end{aligned}$$

$$=C_{a1}\bar{\theta}_h(\omega)+C_{b1}\bar{\xi}_h(\omega) \quad (10)$$

となる。(10)式で定義した $\bar{\theta}_h(\omega)$, $\bar{\xi}_h(\omega)$ より

$$\mathbf{v}_{h+1k}=C_{a1}\theta_{hk}+C_{b1}\xi_{hk} \quad (11)$$

$$E_{a1}\theta_{hk+1}=A_{a1}\theta_{hk}+B_{a1}\mathbf{v}_{hk} \quad (12)$$

$$E_{b1}\xi_{hk+1}=A_{b1}\xi_{hk}+B_{b1}\mathbf{u}_{hk} \quad (13)$$

が得られる。同様にして(7)式は

$$\begin{aligned} C_{a2}\bar{\phi}_{h+1}(\omega) &= C_{a2}(\omega E_{a2}-A_{a2})^{-1}B_{a2}\bar{\mathbf{w}}_{h+1}(\omega) \\ &= \bar{\mathbf{w}}_h(\omega)+C_{b2}(\omega E_{b2}-A_{b2})^{-1}B_{b2}\bar{\mathbf{u}}_h(\omega) \\ &= \bar{\mathbf{w}}_h(\omega)+C_{b2}\bar{\phi}_h(\omega) \end{aligned} \quad (14)$$

となり $\bar{\phi}_h(\omega)$, $\bar{\phi}_h(\omega)$ を上式のように定めると

$$C_{a2}\phi_{hk+1}=\mathbf{w}_{hk}+C_{b2}\phi_{hk} \quad (15)$$

$$E_{a2}\phi_{hk+1}=A_{a2}\phi_{hk}+B_{a2}\mathbf{w}_{hk} \quad (16)$$

$$E_{b2}\phi_{hk+1}=A_{b2}\phi_{hk}+B_{b2}\mathbf{u}_{hk} \quad (17)$$

が得られる。(8)式についてもまったく同様にして

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}_h(\omega) &= C_{c1}(\omega E_{c1}-A_{c1})^{-1}B_{c1}\bar{\mathbf{u}}_h(\omega) \\ &\quad + C_{c2}(\omega E_{c2}-A_{c2})^{-1}B_{c2}\bar{\mathbf{w}}_h(\omega) \\ &= C_{c1}\bar{\lambda}_h(\omega)+C_{c2}\bar{\zeta}_h(\omega) \end{aligned} \quad (18)$$

から

$$E_{c1}\lambda_{hk+1}=A_{c1}\lambda_{hk}+B_{c1}\mathbf{v}_{hk} \quad (19)$$

$$E_{c2}\zeta_{hk+1}=A_{c2}\zeta_{hk}+B_{c2}\mathbf{w}_{hk} \quad (20)$$

$$\mathbf{y}_{hk}=C_{c1}\lambda_{hk}+C_{c2}\zeta_{hk} \quad (21)$$

となる。以上(11)~(13)式, (15)~(17)式, (19)~

(21)式を一つの行列にまとめ,

$$\mathbf{r}_{hk}=[\mathbf{v}'_{hk}\theta'_{hk}\xi'_{hk}\mathbf{w}'_{hk}\phi'_{hk}\lambda'_{hk}\zeta'_{hk}]' \quad (22)$$

とすると

$$\begin{bmatrix} zI_{n1} & & & & & & \\ & \omega E_{a1} & & & & & \\ & & \omega E_{b1} & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & zC_{c2} & \\ & & & & & \omega E_{c2} & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \omega E_{b2} \\ & & & & & & & \omega E_{c1} \\ & & & & & & & & \omega E_{c2} \end{bmatrix} \mathbf{r}_{hk} = \begin{bmatrix} 0 & C_{a1} & C_{b1} \\ B_{a1} & A_{a1} & 0 \\ 0 & 0 & A_{b1} \\ & & & I_{n2} & 0 & -C_{b2} \\ 0 & B_{a2} & A_{a2} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & A_{b2} \\ B_{c1} & 0 & 0 & & A_{c1} & 0 \\ 0 & 0 & B_{c2} & & 0 & A_{c2} \end{bmatrix} \mathbf{r}_{hk} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{b1} \\ 0 \\ 0 \\ B_{b2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{hk} \quad (23)$$

$$\mathbf{y}_{hk}=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ C_{c1} \ C_{c2}]\mathbf{r}_{hk} \quad (24)$$

を得る。

(23), (24)式により $T(z, \omega)$ が本章で述べた条件を満たす非因果的な2Dシステムは一般に

$$E\mathbf{x}_{h+1k}+F\mathbf{x}_{hk+1}=A\mathbf{x}_{hk}+B\mathbf{u}_{hk} \quad (25)$$

$$\mathbf{y}_{hk}=C\mathbf{x}_{hk} \quad (26)$$

と表わされることがいえた。これを(実数体上の)2次元Descriptorシステムといい, $\mathbf{x}_{hk}$ を2次元Descriptor変数ということにする。

ここで(12), (13), (16), (17), (19), (20)式の添字 k に関するDescriptor形式の方程式の解法を示す。たとえば(12)式は正則行列 S が存在して

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{hk} &= \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{hk}^f \\ \hat{\theta}_{hk}^b \end{bmatrix} \\ &= S\theta_{hk} \end{aligned} \quad (27)$$

という変換によって

$$\hat{\theta}_{hk+1}^f = \hat{A}_{a1}\hat{\theta}_{hk}^f + \hat{B}_{a1}^f \mathbf{v}_{hk} \quad (28)$$

$$\hat{E}_{a1}\hat{\theta}_{hk+1}^b = \hat{\theta}_{hk}^b + \hat{B}_{a1}^b \mathbf{v}_{hk} \quad (29)$$

となる(Forward/backward decomposition, Lewis⁵⁾)。これから $\theta_{hk}(0 \leq k \leq M)$ は $\mathbf{v}_{hk}(0 \leq k \leq M)$ と適当な初期値 $\hat{\theta}_{h0}^f$, 終端値 $\hat{\theta}_{hM}^b$ が与えられれば逐次的に, 両方向に求めることができる。 $\mathbf{v}_{0k}(0 \leq k \leq M)$ は初期値として与えられる。 ξ_{hk} も同様に適当な初期, 終端値と入力系列 $\mathbf{u}_{hk}$ より求まる。(11)式より $\mathbf{v}_{h+1k}$ が θ_{hk}, ξ_{hk} より求まり, これから再び(12), (13)式より $\theta_{h+1k}, \xi_{h+1k}$ が求まるという過程が $h=N$ まで繰返される。(15)~(17)式, (19)~(21)式でも同様であるが, (15)~(17)式では水平方向の終端値 $\mathbf{w}_{Nk}(0 \leq k \leq M)$ が与えられて k が減少する方向に解かれる。

3. 既約性

(23), (24)式によって求められた(25), (26)式から $T(z, \omega)=C(zE+\omega F-A)^{-1}B$ となるので(23), (24)式の実現が最小実現であるためには $zE+\omega F-A$ と B, C がそれぞれ左, 右既約であることが必要である。

《定理》 $zE+\omega F-A$ と B が左既約であるなら(6), (7), (8)式で

(a) $\begin{bmatrix} zI_{n1}-A_1(\omega) & 0 \\ 0 & zA_2(\omega)-I_{n2} \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} B_1(\omega) \\ B_2(\omega) \end{bmatrix}$ は左既約, また C と $zE+\omega F-A$ が右既約であるなら

(b) $[C_1(\omega) \ C_2(\omega)]$ と $\begin{bmatrix} zI_{n1}-A_1(\omega) & 0 \\ 0 & zA_2(\omega)-I_{n2} \end{bmatrix}$ は右既約

である。ただしここで既約というのは ω の有理関数体 $R(\omega)$ に係数をもつ z の多項式の集合 $R(\omega)[z]$ に関して既約という意味である。

(証明) (a) が成り立たないとし, $zI_{n1}-A_1(\omega)$ と $B_1(\omega)$ が $R(\omega)[z]$ 上ユニモジュラでない左共通因子 $L_1(z, \omega)$ をもつとすると(23)式で