適応極配置系に関する一考察

—評価関数を有する制御系への対応—

新 中 新 二*・鈴 木 隆*

An Investigation on Adaptive Pole Placers

—Association with Self-Tuning Controllers with Cost-Function—

Shinji SHINNAKA* and Takashi SUZUKI*

1. ま え が き

非最小位相プラントにも適用可能な適応制御法としては、まず、ロバスト性にすぐれた適応極配置法が挙げられる。これに関しては、これまで多くの研究がなされ、主要な設計法については新中により one-to-one の対応性も明らかにされている¹⁾。つぎには、Clarke らの提唱による評価関数に基づく設計法が挙げられる²⁾。この設計法はあらかじめ定めた評価関数を最小にするように制御則を定めるものであるが、これにより設計された制御系は、ある極配置系に帰着されることが Allidina らにより指摘されている。また、これを利用した設計法も提案されている^{3), 4)}。

これらの結果に関連して、つぎの興味ある疑問が生ずる。任意の極配置系に対し、これに対応する評価関数を有する制御系を常に考えることができるのであろうか。もしできるとすれば、その評価関数はいかなるものであり、評価関数を形成する諸パラメータは、極配置系を構成するコントローラパラメータとどのように関係づけられるのであろうか。本論文では、従来曖昧にされてきたこれらの点について考察する。

2. 考 察

制御対象たるプラントとして、時間遅れ演算子 z^{-1} で記述されるつぎのものを考える。

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) \quad (1)$$

ここに、 $u(k)$ 、 $y(k)$ はプラントの入力、出力であり、 $d \geq 1$ はむだ時間である。また、 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ は互いに既約なつぎのような多項式である。

$$\left. \begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_A} z^{-n_A}; a_{n_A} \neq 0 \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_B} z^{-n_B}; b_0 \neq 0, b_{n_B} \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

上のプラントに対する制御則としては、外部規範入力 $u_r(k)$ を有するつぎのものを考える(注)。

$$R(z^{-1})u(k) = u_r(k) - S(z^{-1})y(k) \quad (3)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} R(z^{-1}) &= r_0 + r_1 z^{-1} + \dots + r_{n_R} z^{-n_R}; r_0 \neq 0 \\ S(z^{-1}) &= s_0 + s_1 z^{-1} + \dots + s_{n_S} z^{-n_S} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(3)式を(1)式に用い整理すると、次式が得られる。

$$D(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u_r(k) \quad (5)$$

ただし、

$$\begin{aligned} D(z^{-1}) &\triangleq A(z^{-1})R(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})S(z^{-1}) \\ &= d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{n_D} z^{-n_D}; d_0 = r_0 \neq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

(1)式と(5)式の比較より明らかのように、(3)式の制御則は極配置系を構成する。この系に関しては、つぎの定理が成立する。

《定理 1》

(3)式の制御則により構成される極配置系は、つぎの形式の多項式 $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 、 $H'(z^{-1})$

$$\left. \begin{aligned} G(z^{-1}) &= g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{n_G} z^{-n_G}; g_0 \neq 0 \\ H(z^{-1}) &= h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{n_H} z^{-n_H} \\ H'(z^{-1}) &= h'_0 + h'_1 z^{-1} + \dots + h'_{n_H} z^{-n_H} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を重みとする評価関数 $J_1(k+d)$ 、 $J_2(k+d)$

$$\left. \begin{aligned} J_1(k+d) &= (G(z^{-1})y(k+d) - u_r(k) + H(z^{-1})u(k))^2 \\ J_2(k+d) &= (G(z^{-1})y(k+d) - u_r(k))^2 \\ &\quad + (H'(z^{-1})u(k))^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

を $u(k)$ に関して最小とする制御系と等価である。ただし、上式における $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 、 $H'(z^{-1})$ は、ある多項式 $Q(z^{-1})$

* 防衛大学校 横須賀市走水 1-10-20

* The National Defense Academy, Yokosuka

(Received September 12, 1985)

(Revised November 28, 1985)

Key Words: adaptive control, adaptive pole placement, self-tuning control

(注) ここでは、制御系の解析に際し、Clarke, Allidina らと同様、制御則におけるパラメータは収束完了、あるいは、これに準ずる状況にあるものとする。

$$Q(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_n z^{-n}$$

より成るつぎの関係式に従うものとする。

(i) $R(z^{-1})$ が $B(z^{-1})$ 因子を有する場合

$Q(z^{-1}) = R(z^{-1})/B(z^{-1})$ により定められる $Q(z^{-1})$ に対して、

$$\left. \begin{aligned} G(z^{-1}) &= A(z^{-1})Q(z^{-1}) + z^{-d}S(z^{-1}) \\ H(z^{-1}) &= 0 \\ H'(z^{-1}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(ii) $R(z^{-1})$ が $B(z^{-1})$ 因子を有しない場合

つぎの条件

$$\left. \begin{aligned} 0 < q_0 < r_0/b_0; b_0 r_0 > 0 \\ r_0/b_0 < q_0 < 0; b_0 r_0 < 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

を満足する任意の多項式 $Q(z^{-1})$ に対して、

$$\left. \begin{aligned} G(z^{-1}) &= A(z^{-1})Q(z^{-1}) + z^{-d}S(z^{-1}) \\ H(z^{-1}) &= -B(z^{-1})Q(z^{-1}) + R(z^{-1}); h_0 \neq 0 \\ H'(z^{-1}) &= (b_0 q_0/h_0)H(z^{-1}); h_0 \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(証明)

(9), (11)式の第1式に $y(k+d)$ を乗じ、(1)式を用いると、

$$G(z^{-1})y(k+d) = B(z^{-1})Q(z^{-1})u(k) + S(z^{-1})y(k) \quad (12)$$

(8)式の評価関数 $J_1(k+d)$, $J_2(k+d)$ は、上式を用いると、それぞれつぎのように書き改められる。

$$\begin{aligned} J_1(k+d) &= ((B(z^{-1})Q(z^{-1}) + H(z^{-1}))u(k) \\ &\quad + S(z^{-1})y(k) - u_r(k))^2 \\ J_2(k+d) &= (B(z^{-1})Q(z^{-1})u(k) + S(z^{-1})y(k) \\ &\quad - u_r(k))^2 + (H'(z^{-1})u(k))^2 \end{aligned}$$

上式を $u(k)$ で微分すると、

$$\frac{\partial J_1(k+d)}{\partial u(k)} = 2(b_0 q_0 + h_0)((B(z^{-1})Q(z^{-1}) + H(z^{-1}))u(k) + S(z^{-1})y(k) - u_r(k))$$

$$\frac{\partial J_2(k+d)}{\partial u(k)} = 2b_0 q_0(B(z^{-1})Q(z^{-1})u(k) + S(z^{-1})y(k) - u_r(k)) + 2h_0' H'(z^{-1})u(k)$$

したがって、 $J_1(k+d)$, $J_2(k+d)$ を最小とする制御則は、 $h_0' H'(z^{-1}) = b_0 q_0 H(z^{-1})$ とすれば、いずれも次式で与えられる。

$$(B(z^{-1})Q(z^{-1}) + H(z^{-1}))u(k) = u_r(k) - S(z^{-1})y(k)$$

上式は、 $H(z^{-1}) = -B(z^{-1})Q(z^{-1}) + R(z^{-1})$ とすれば、

(3)式の制御則を意味する。

なお、(10)式の条件は、 $q_0 \neq 0$, $(h_0')^2 = b_0 q_0 h_0 > 0$ なる関係より導かれる。

上の定理は、(3)式の制御則により構成される極配置系は、(8)式の評価関数を有する制御系として考えて差支えないことを意味するものである。定理より明らかのように、あるコントローラ多項式 $\{R(z^{-1}), S(z^{-1})\}$ に対して、評価関数を形成する多項式 $\{G(z^{-1}),$

Fig. 1 Transformation from $R(z^{-1}), S(z^{-1})$ to $G(z^{-1}), H(z^{-1})$

$H(z^{-1})$, $\{G(z^{-1}), H'(z^{-1})\}$ は、(i)の場合には one-to-one, (ii)の場合には onto の対応性で存在する (Fig. 1 参照)。この onto の一般的関係の中で最もコンパクトな評価多項式 $\{G(z^{-1}), H(z^{-1})\}$, $\{G(z^{-1}), H'(z^{-1})\}$ はどのように関係づけられるのであろうか。以下では、この問題について考える。

《定理 2》

$Q(z^{-1})$ の係数 q_0 を(10)式の範囲であらかじめ指定し、次数 n_Q を $n_Q = 0$ と限定する場合には、 $\{R(z^{-1}), S(z^{-1})\}$ に対する $\{G(z^{-1}), H(z^{-1})\}$, $\{G(z^{-1}), H'(z^{-1})\}$; $h_0' > 0$, $\{G(z^{-1}), H'(z^{-1})\}$; $h_0' < 0$ が一意的に存在する。

(証明)

$\{G(z^{-1}), H(z^{-1})\}$ の一意的存在は明らか。 $\{G(z^{-1}), H'(z^{-1})\}$; $h_0' > 0$, $\{G(z^{-1}), H'(z^{-1})\}$; $h_0' < 0$ の一意性は、 $h_0' H'(z^{-1}) = b_0 q_0 H(z^{-1})$ なる関係より明らか。

《定理 3》

$G(z^{-1})$ の係数 g_0 をつぎの範囲であらかじめ指定し、

$$\left. \begin{aligned} 0 < g_0 < r_0/b_0; b_0 r_0 > 0 \\ r_0/b_0 < g_0 < 0; b_0 r_0 < 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

次数 n_G, n_H を

$$n_G = n_A, n_H = \max(n_B, n_R, n_B + n_S + d - n_A) \quad (14)$$

または、

$$n_G = \max(n_A, n_S + d, n_A + n_R - n_B), n_H = n_B \quad (15)$$

と限定する場合には、 $\{R(z^{-1}), S(z^{-1})\}$ に対する $\{G(z^{-1}), H(z^{-1})\}$, $\{G(z^{-1}), H'(z^{-1})\}$; $h_0' > 0$, $\{G(z^{-1}), H'(z^{-1})\}$; $h_0' < 0$ が一意的に存在する。

(証明)

(11)式第1式より $g_0 = q_0$ であるので、これと(10)式より、(13)式の条件が発生する。この条件を踏まえて、(11)式より $Q(z^{-1})$ の消去を図る。(11)式の第1式に $B(z^{-1})$ を、第2式に $A(z^{-1})$ を乗じ、これらをええ合わせると、

$$\begin{aligned} A(z^{-1})H(z^{-1}) + B(z^{-1})G(z^{-1}) \\ = A(z^{-1})R(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})S(z^{-1}) \end{aligned} \quad (16)$$

上式の左辺を未決定パラメータ $\{g_1, \dots, g_{n_G}, h_0, \dots, h_{n_H}\}$ に関する項のみに整理すると、

$$A(z^{-1})H(z^{-1}) + B(z^{-1})(G(z^{-1}) - g_0)$$

$$= A(z^{-1})R(z^{-1}) + B(z^{-1})(z^{-d}S(z^{-1}) - g_0) \\ = d'_0 + d'_0 z^{-1} + \dots + d'_{n_D} z^{-n_D} \quad (17)$$

上式は、未決定パラメータに関する連立1次方程式を意味し、これは、次数の関係から、以下の二つの場合に分けられる。

(i) $n_A + n_H \geq n_B + n_G$ の場合

この場合、(17)式はつぎのように書き改められる。

$$\begin{array}{c} \leftarrow n_G + n_H + 1 \rightarrow \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ n_A + n_H + 1 \\ \downarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & & 0 & \\ a_1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & 1 & \\ a_{n_A} & & & \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ b_0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & b_0 & \\ & & b_{n_B} & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} h_0 \\ \vdots \\ h_{n_H} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n_G} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} d'_0 \\ d'_1 \\ \vdots \\ d'_{n_D} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (18)$$

上式の第 i 行は $(i-1)$ 次項を示す。未決定パラメータの一意的存在のための一般的条件としては、まず、行列の正方性 $n_A + n_H + 1 = n_G + n_H + 1$ より、

$$n_G = n_A$$

また、行列の行数は、右辺の非零の要素の数より大きくなくてはならないので、 $n_A + n_H + 1 \geq \max(n_A + n_R + 1, n_B + n_S + d + 1)$ 。これに、この場合の条件 $n_A + n_H \geq n_B + n_G$ を再び考慮すると、

$$n_H \geq \max(n_B, n_R, n_B + n_S + d - n_A)$$

このときの(18)式の左辺の正方行列は、 $a_{n_A} \neq 0$ であり、 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ が既約であるので、正則となる。したがって、これらの条件の下では、 $\{R(z^{-1}), S(z^{-1})\}$ に対応して $\{G(z^{-1}), H(z^{-1})\}$ が一意的に存在する。 $\{G(z^{-1}), H'(z^{-1}); h'_0 > 0\}$ 、 $\{G(z^{-1}), H'(z^{-1}); h'_0 < 0\}$ の一意性は、 $h'_0 H'(z^{-1}) = b_0 g_0 H(z^{-1})$ なる関係より明らか。

(ii) $n_A + n_H \leq n_B + n_G$ の場合

(i)の場合と同様の手順により証明される。 ■

上の定理2は次数 n_G の最小性、また、定理3は次

数 n_G の最小性 ((14)式参照) あるいは次数 n_H の最小性 ((15)式参照) という意味において、ある $\{R(z^{-1}), S(z^{-1})\}$ に関し、これに対応する最もコンパクトな評価多項式 $\{G(z^{-1}), H(z^{-1})\}$ 、 $\{G(z^{-1}), H'(z^{-1})\}$ を関係づけるものである。しかも、これらの評価多項式は、 q_0 を(10)式の範囲で、あるいは、 g_0 を(13)式の範囲であらかじめ指定するならば、one-to-one に対応する。なお、これらの定理より、

$$n_R \leq n_B, \quad n_S \leq n_A - d$$

なる場合には、次数 n_G, n_G, n_H を同時に最小とするような評価多項式が存在することが明らかである。

(注意) 評価関数 $J_1(k+d)$ を構成する $[G(z^{-1})y(k+d) - u_r(k) + H(z^{-1})u(k)]$ は、出力 $y(k)$ に対し、一般化出力と呼ばれる²⁾。しかし、その制御工学的意味合いは明確にされていない²⁾⁻⁴⁾。ここでは、制御工学的意味合いの高い評価関数 $J_2(k+d)$ を考えるうえでの一過程として $J_1(k+d)$ を導入した。

3. あとがき

以上、極配置系に対応する、評価関数を有する制御系について考察し、対応関係を明らかにした。ここに得られた結果は、極配置系を、評価関数を有する制御系として考えることを可能とするものであり、極配置系設計の一助になるものと思われる。

参考文献

- 1) 新中新二：適応極配置に関する一考察，計測自動制御学会論文集，20-12，1172/1174 (1984)
- 2) D. W. Clarke and P. J. Gawthrop: Self-Tuning Controller, IEE, Proc., 122-9, 929/934 (1975)
- 3) A. Y. Allidina and F. M. Hughes: Generalised Self-Tuning Controller with Pole Assignment, IEE, Proc., 127-D-1, 13/18 (1980)
- 4) A. Y. Allidina and F. M. Hughes: Self-Tuning Controllers for Deterministic Systems, International J. of Control, 37-4, 831/841 (1983)