観測雑音を伴う線形系の適応観測器の一設計[†]

田 淵 敏 明*・添 田 喬**

A Design of Adaptive Observer of Linear Systems with Measurement Noise

Toshiaki TABUCHI* and Takashi SOEDA**

This paper is concerned with the design of an adaptive observer which would identify the parameters and estimate the state of single-input single-output discrete-time linear system with measurement noise.

The observer design is done by using the parametric representation of original system to separate the parameter identification process and the state estimation one. Parameter identification is carried out by using a method similar to RML (Recursive Maximum Likelihood) identifier. The main difference from RML method is the estimation of measurement vector. Since the proposed method utilizes the full available information in this estimation, the improvement of parameter estimation accuracy can be expected as compared with RML method. Once obtained the parameter estimate, the state estimate is obtained by simple manipulation of the parameter estimate.

A simulation result for two order system indicates the acceptable performance of the proposed method in both deterministic and stochastic environments.

Key Words: adaptive observer, parameter identification, state estimation, Kalman filter, RML method

1. ま え が き

線形系の状態量を入出力情報を用いて観測する場合、系のパラメータが事前に既知であれば、確定系に

対しては Luenberger の観測器を、確率系に対しては Kalman フィルタを用いればよい。しかし系のパラメータが未知の場合は、適応観測器が必要になる。この適応観測器は、確定系に対しては多くの成果が得られている¹⁾。しかし、観測雑音が存在するような確率系に対する成果は、確定系に比べると少ないようである。文献 2) には、観測雑音が存在する場合の構成法が提案されているが、この方法は補助入力が必要とし、構成が少し複雑になる。

本論文は、白色性の観測雑音を伴う 1 入力、1 出力の離散時間線形系の適応観測器を、パラメトリック型で構成することを扱うものである。したがって補助入力の発生の必要がなく、構成が簡単である。またパラメータ同定と状態推定が分離されるので、同定器としても利用できる。パラメータ同定は、系の状態量を消去して得られる入出力関係式と、この関係式の状態空間表現の二つを利用し、RML 法と類似な方法を用いて行う。この場合、本手法は観測ベクトルの推定に、入出力関係の状態空間表現を用いるので、RML 法に比べ、よりきめ細かい推定を行うことができ、したがってパラメータ推定値の精度の向上が期待される。状態推定については、パラメータ推定値が得られたら、簡単な静的演算によって得られる。数値実験では、本手法を確率系、確定系の両方に適用した場合に、良好な結果が得られ、本手法が有効であることが示される。

2. 問題の記述および本手法の概略

次式で表わされる n 次の離散時間線形系を考える。

$$x(t) = Ax(t-1) + bu(t-1), \quad t=1, 2, \dots \quad (1)$$

$$y(t) = c^T x(t) + e(t), \quad t=1, 2, \dots \quad (2)$$

ここで、 $x(t) \in R^{n \times 1}$ は状態ベクトル、 $u(t-1)$ 、 $y(t)$ はそれぞれスカラーの入出力、 $e(t)$ は平均が 0、分散が

[†] 第 5 回適応制御シンポジウムで発表 (昭和 60・1)

* 徳島工業短期大学自動車工業学科 徳島県板野郡板野町

** 徳島大学本部 徳島市新蔵町 2-24

* Department of Automotive Engineering, Tokushima Technical College, Itano-gun, Tokushima

** The Head Office, University of Tokushima, Tokushima

(Received March 15, 1985)

(Revised February 17, 1986)

σ^2 (未知) の白色性観測雑音である。また $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ はそれぞれつぎのような形をしているものとする。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで $a_i, b_i, (i=1, \dots, n)$, は未知であり, $\mathbf{A}$ は安定であるとする。このとき問題は, 入出力列 $\{u(t-1)\}$, $\{y(t)\}$ を用いて a_i, b_i を同定しながら, $\mathbf{x}(t)$ を推定することである。

さて, 本手法では $\mathbf{x}(t)$ の推定とパラメータ同定を分離するために, (1) をつぎのように書く (注1)。

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t-1) + \mathbf{a}[y(t-1) - e(t-1)] + \mathbf{b}u(t-1) \quad (4)$$

ここで

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

である。このとき, (4), (2) より $\mathbf{x}(t)$ を消去すると, (1), (2) の系に対する入出力関係として, 次式を得る。

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) + e(t) \quad (\text{注2}) \quad (6)$$

$$= \phi^T(t)\alpha + e(t) \quad (7)$$

ここで

$$\phi^T(t) = [y(t-1) - e(t-1) \cdots y(t-n) - e(t-n)] \quad (8)$$

$$\triangleq [\mathbf{z}^T(t-1) : \mathbf{u}^T(t-1)] \quad (9)$$

$$\alpha = [\mathbf{a}^T : \mathbf{b}^T]^T \quad (10)$$

$$\mathbf{z}^T(t) = [y(t) - e(t) \cdots y(t-n+1) - e(t-n+1)] \quad (11)$$

$$\mathbf{u}^T(t) = [u(t) \cdots u(t-n+1)] \quad (12)$$

であり, 記号 T はベクトルもしくは行列の転置を表わす。ところで(6)あるいは(7)は, (11)の $\mathbf{z}(t)$ を用いると, つぎのようなダイナミカルシステムとして表わすことができる。

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{z}(t-1) + \mathbf{c} \mathbf{b}^T u(t-1) \quad (13)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t) + e(t) \quad (14)$$

また (14) より $y(t-l) - e(t-l) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t-l)$, ($l=1, \dots$,

n), を(4)に代入するとつぎようになる。

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t-1) + \mathbf{a}\mathbf{c}^T \mathbf{z}(t-1) + \mathbf{b}u(t-1) \quad (15)$$

本手法は, (6)あるいは(7)をもとに α を推定し, 得られた推定値を用いて (15) より $\mathbf{x}(t)$ を推定するものである。

3. パラメータ同定

3.1 α の推定

RML 法を用いて α を推定する場合, $\hat{\alpha}(t-1)$ を時刻 $t-1$ における α の既知の推定値として, まず $e(t)$ を $\hat{\alpha}(t-1)$ の回りで線形化する³⁾。すなわち

$$\begin{aligned} e(t) &\triangleq e(t, \hat{\alpha}(t-1)) + \left. \frac{\partial e(t)}{\partial \alpha^T} \right|_{\hat{\alpha}(t-1)} [\alpha - \hat{\alpha}(t-1)] \\ &= \varepsilon(t) - \phi^T(t, \hat{\alpha}(t-1)) [\alpha - \hat{\alpha}(t-1)] \end{aligned} \quad (16)$$

ここで

$$\varepsilon(t) = e(t, \hat{\alpha}(t-1)) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \phi^T(t, \hat{\alpha}(t-1)) &= - \left. \frac{\partial e(t)}{\partial \alpha^T} \right|_{\hat{\alpha}(t-1)} \\ &= \frac{\phi^T(t)}{\hat{A}_{t-1}(q^{-1})} \quad (\text{注3}) \end{aligned} \quad (18)$$

であり, (18) は(6)をもとに得られる。(16)を

$$\varepsilon(t) + \phi^T(t, \hat{\alpha}(t-1)) \hat{\alpha}(t-1) \triangleq \phi^T(t, \hat{\alpha}(t-1)) \alpha + e(t) \quad (19)$$

と書いて, これに形式的に最小2乗法を適用すれば, $\hat{\alpha}(t)$ は次式で得られる。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(t) &= \mathbf{P}(t) \sum_{i=1}^t \phi(i, \hat{\alpha}(i-1)) \\ &\quad \times [\varepsilon(i) + \phi^T(i, \hat{\alpha}(i-1)) \hat{\alpha}(i-1)] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mathbf{P}(t) = \left[\sum_{i=1}^t \phi(i, \hat{\alpha}(i-1)) \phi^T(i, \hat{\alpha}(i-1)) \right]^{-1} \quad (21)$$

このとき, 推定誤差 $\tilde{\alpha}(t) \triangleq \alpha - \hat{\alpha}(t)$ の共分散行列は, 近似的に次式で与えられる。

$$\text{cov}\{\tilde{\alpha}(t)\} \triangleq \sigma^2 \mathbf{P}(t) \quad (22)$$

したがって $\mathbf{P}(t)$ あるいは $\mathbf{P}^{-1}(t)$ は, 推定器の一つの情報処理能力を表わすと考えられる。ところで $\phi^T(t, \hat{\alpha}(t-1))$ は, (18) より $\phi^T(t)$ が関係しているために計算できない。そこで (20), (21) の計算には, $\phi(t, \hat{\alpha}(t-1))$ を推定値 $\hat{\phi}(t, \hat{\alpha}(t-1))$ で代用せざるをえない。 $\hat{\phi}(t, \hat{\alpha}(t-1))$ を決定するために, (21) の $\mathbf{P}(t)$ に注目する。この式の逆行列の両辺に期待値を施すとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{P}^{-1}(t)\} &= \sum_{i=1}^t E\{\phi(i, \hat{\alpha}(i-1)) \phi^T(i, \hat{\alpha}(i-1))\} \\ &= \sum_{i=1}^t E\{E\{\phi(i, \hat{\alpha}(i-1)) \phi^T(i, \hat{\alpha}(i-1)) | y^{i-1}\}\} \end{aligned}$$

(注1) (1) の $\mathbf{A}$ に $\mathbf{A} = \mathbf{F} + \mathbf{a}\mathbf{c}^T$ を代入し, (2) を用いる。

(注2) $A(q^{-1}) = 1 - a_1 q^{-1} - \cdots - a_n q^{-n}$, $B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \cdots + b_n q^{-n}$ であり, q^{-1} は単位時間遅延演算子である。

(注3) $\hat{A}_{t-1}(q^{-1}) = 1 - \hat{a}_1(t-1)q^{-1} - \cdots - \hat{a}_n(t-1)q^{-n}$

$$= \sum_{i=1}^t E\{\hat{\phi}(i, \hat{\alpha}(i-1))\hat{\phi}^T(i, \hat{\alpha}(i-1))\} \\ + \sum_{i=1}^t E\{\hat{\phi}(i, \hat{\alpha}(i-1))\hat{\phi}^T(i, \hat{\alpha}(i-1))\} \quad (23)$$

ここで

$$\hat{\phi}^T(t, \hat{\alpha}(t-1)) = E\{\phi(t, \hat{\alpha}(t-1))|y^{t-1}\} \quad (24)$$

であり、また $\hat{\phi}(t, \hat{\alpha}(t-1)) \triangleq \phi(t, \hat{\alpha}(t-1)) - \hat{\phi}(t, \hat{\alpha}(t-1))$, $y^{t-1} \triangleq \{y(t-1), \dots, y(0)\}$ である。このとき、(23)の右辺第1項に注目して

$$\hat{P}^{-1}(t) = \sum_{i=1}^t \hat{\phi}(i, \hat{\alpha}(i-1))\hat{\phi}^T(i, \hat{\alpha}(i-1)) \quad (25)$$

とすると、(24)は

$$E\{\hat{P}^{-1}(t) - \hat{P}^{-1}(t)\} \quad (26)$$

を最小にする。というのは、 $\hat{\phi}$ として(24)の条件付期待値を用いているので、 $E\{\hat{\phi}(t, \hat{\alpha}(t-1))\hat{\phi}^T(t, \hat{\alpha}(t-1))\}$ が最小になり、その結果(23)の右辺第2項全体も最小になるからである。すなわち(24)の $\hat{\phi}$ を用いることにより、(26)が最小になるという意味で、 $\hat{P}^{-1}(t)$ はすべての見本系列を考えた場合に、平均的には $P^{-1}(t)$ のうちで最大限の情報処理能力を吸収していると考えられる。そこで、(20)、(21)の $\phi(t, \hat{\alpha}(t-1))$ は、(24)で代用する。

今、(24)を評価するために、(18)に注目する。(18)の両辺に $\beta \in R^{2n \times 1}$ をかけてスカラー化すると $\phi^T(t, \hat{\alpha}(t-1))\beta = \phi^T(t, \hat{\alpha}(t-1))\beta / \hat{A}_{t-1}(q^{-1})$ となり、これを状態空間で表わすつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} r(t) &= \Phi(t, t-1)r(t-1) + c\phi^T(t)\beta \\ \phi^T(t, \hat{\alpha}(t-1))\beta &= c^T r(t) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここで

$$\Phi(t, i) = \hat{A}(t-1) \cdots \hat{A}(i), \Phi(t, t) = I \quad (28)$$

であり、 I は単位行列である。(27)を convolution sum の形に書いて、 $\Phi(t, i)$ の安定性を仮定するとき、 $t \gg 1$ で

$$\phi^T(t, \hat{\alpha}(t-1))\beta = c^T \sum_{i=1}^t \Phi(t, i)c\phi^T(i)\beta \quad (29)$$

となり、両辺比較して(9.)を用いるとき

$$\phi^T(t, \hat{\alpha}(t-1)) = c^T \sum_{i=1}^t \Phi(t, i)c[z^T(i-1) : u^T(i-1)] \quad (30)$$

となる。したがって、(24)は $t \gg 1$ で

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^T(t, \hat{\alpha}(t-1)) \\ = c^T \sum_{i=1}^t \Phi(t, i)c[z^T(i-1|t-1) : u^T(i-1)] \end{aligned} \quad (31)$$

となる。ここで

$$\hat{z}(i|j) = E\{z(i)|y^j\} \quad (32)$$

である。(31)より、 $\hat{\phi}(t, \hat{\alpha}(t-1))$ は、 z の平滑推定値

が関係してくるので、計算が複雑になる。そこで $\hat{z}(i-1|t-1)$ を平滑推定値 $\hat{z}(i-1|i-1)$ で代用すれば

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^T(t, \hat{\alpha}(t-1)) \\ \cong c^T \sum_{i=1}^t \Phi(t, i)c[\hat{z}^T(i-1|i-1) : u^T(i-1)] \\ = \frac{\hat{\phi}^T(t)}{\hat{A}_{t-1}(q^{-1})} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\hat{\phi}^T(t) = [\hat{z}^T(t-1|t-1) : u^T(t-1)] \quad (34)$$

となる。したがって $\hat{z}(t|t)$ を評価すれば、 $\hat{\phi}(t, \hat{\alpha}(t-1))$ は計算できる。 $\hat{z}(t|t)$ は、(13)、(14)をもとに評価するが、 α が未知であるので、拡散 Kalman フィルタを用いる。この場合、 z , α の近似共分散行列 Q_z , Q_α および z , α の相互共分散行列 $Q_{z\alpha}$, $Q_{\alpha z}$ が関係してくるが、 $Q_{z\alpha}$, $Q_{\alpha z}$ については無視したほうが、フィルタの性能が向上することが報告されている⁵⁾。そこでこれらは無視するとき、 $\hat{z}(t|t)$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{z}(t|t) &= \hat{z}(t|t-1) + k_z(t)\varepsilon(t) \\ \hat{z}(t|t-1) &= \hat{A}^T(t-1)\hat{z}(t-1|t-1) \\ &\quad + c\delta^T(t-1)u(t-1) \\ \varepsilon(t) &= y(t) - c^T\hat{z}(t|t-1) \\ k_z(t) &= Q_z(t|t-1)c/[c^T Q_z(t|t-1)c + \delta^2(t-1)] \\ Q_z(t|t-1) &= \hat{A}^T(t-1)Q_z(t-1|t-1)\hat{A}(t-1) \\ &\quad + H(t)Q_\alpha(t-1)H^T(t) \\ Q_z(t|t) &= [I - k_z(t)c^T]Q_z(t|t-1) \\ Q_\alpha(t) &= [I - k_\alpha(t)\hat{\phi}^T(t)]Q_\alpha(t-1) \\ k_\alpha(t) &= Q_\alpha(t-1)\hat{\phi}(t)/[c^T Q_z(t|t-1)c + \delta^2(t-1)] \\ H(t) &= \begin{bmatrix} \hat{\phi}^T(t) \\ \vdots \\ 0^{(n-1) \times 2n} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

(17)の $\varepsilon(t)$ は、上式の $\varepsilon(t)$ を用いるものとし、また $Q_\alpha(t)$ の初期値については、次式のように選定するものとする。

$$Q_\alpha(0) = P(0) \quad (36)$$

$\hat{\phi}(t, \hat{\alpha}(t-1))$ を $\hat{\phi}(t)$ と書いて、(20)、(21)を繰返し形に直すと、Table 1 のようになる。

3.2 σ^2 の推定

σ^2 の時刻 t における推定値を $\hat{\sigma}^2(t)$ として、これを次式で評価する。

$$\hat{\sigma}^2(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t E\{e^2(i)|y^i\} \quad (37)$$

このとき、上式は不偏推定量となり、(13)、(14)に対する Kalman フィルタよりつぎの繰返し式を得ることができる。

$$\hat{\sigma}^2(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \{[y(i) - c^T\hat{z}(i|i)]^2 + c^T Q_z(i|i)c\}$$

Table 1 Adaptive observation algorithm

Original System:
$x(t) = Ax(t-1) + bu(t-1)$
$y(t) = c^T x(t) + e(t)$
Parameter Identifier:
$\hat{a}(t) = \hat{a}(t-1) + g(t)\varepsilon(t)$
$\varepsilon(t) = y(t) - c^T \hat{z}(t t-1)$
$g(t) = P(t-1)\hat{\phi}(t)/[\hat{\phi}^T(t)P(t-1)\hat{\phi}(t) + 1]$
$P(t) = [I - g(t)\hat{\phi}^T(t)]P(t-1)$
$\hat{\phi}(t) = \hat{\phi}(t)/\hat{A}_{t-1}(q^{-1})$
$\hat{\phi}^T(t) = [\hat{z}^T(t-1 t-1) : u^T(t-1)]$
Estimator of $z(t)$:
$\hat{z}(t t) = \hat{z}(t t-1) + k_z(t)\varepsilon(t)$
$\hat{z}(t t-1) = \hat{A}^T(t-1)\hat{z}(t-1 t-1) + c\hat{b}^T(t-1)u(t-1)$
$k_z(t) = Q_z(t t-1)c/[c^T Q_z(t t-1)c + \sigma^2(t-1)]$
$Q_z(t t-1) = \hat{A}^T(t-1)Q_z(t-1 t-1)\hat{A}(t-1)$ $+ H(t)Q_a(t-1)H^T(t)$
$Q_z(t t) = [I - k_z(t)c^T]Q_z(t t-1)$
$Q_a(t) = [I - k_a(t)\hat{\phi}^T(t)]Q_a(t-1)$
$k_a(t) = Q_a(t-1)\hat{\phi}(t)/[c^T Q_a(t-1)c + \sigma^2(t-1)]$
$\sigma^2(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)\sigma^2(t-1) + \frac{1}{t}[\{y(t) - c^T \hat{z}(t t)\}^2$ $+ c^T Q_z(t t)c]$
$H(t) = \begin{bmatrix} \hat{\phi}^T(t) \\ \dots\dots\dots \\ 0_{(n-1) \times 2n} \end{bmatrix}$
State Estimator:
$\hat{x}(t) = \hat{x}(t) + S_1(t)\hat{a}(t) + S_2(t)\hat{b}(t)$
$x(t) = Fx(t-1), x(0) = \hat{x}(0)$
$S_1(t) = FS_1(t-1) + c^T \hat{z}(t-1 t-1)I, S_1(0) = 0^{n \times n}$
$S_2(t) = FS_2(t-1) + u(t-1)I, S_2(0) = 0^{n \times n}$

$$= \left(1 - \frac{1}{t}\right)\hat{\sigma}^2(t-1) + \frac{1}{t}\{[y(t) - c^T \hat{z}(t|t)]^2 + c^T Q_z(t|t)c\} \quad (38)$$

しかし、実際には α, σ^2 は未知であるので、上式の $\hat{z}(t|t), Q_z(t|t)$ は計算できず、したがって (35) と連動させて用いる。このとき、 $\hat{\sigma}^2(t)$ はもはや不偏推定量ではなくなる。

4. 状態推定

(15) を convolution sum の形に書くと、つぎのようになる。

$$x(t) = \hat{x}(t) + S_1(t)\alpha + S_2(t)b \quad (39)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(t) &= F^t x(0) \\ S_1(t) &= \sum_{i=1}^t F^{t-i} c^T z(i-1) \\ S_2(t) &= \sum_{i=1}^t F^{t-i} u(i-1) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

である。 $x(t)$ の推定値を $\hat{x}(t)$ とするとき、 $\hat{z}(t), \hat{\alpha}(t)$ が得られれば、(39) の α, b には $\hat{\alpha}(t)$ を、また (40) の

$S_1(t)$ の $z(i-1)$ には $\hat{z}(i-1|i-1)$ を用いると、 $\hat{x}(t)$ はつぎのようになる。

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(t) + S_1(t)\hat{\alpha}(t) + S_2(t)\hat{b}(t) \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(t) &= F\hat{x}(t-1), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}(0) \\ S_1(t) &= FS_1(t-1) + c^T \hat{z}(t-1|t-1)I, \\ S_1(0) &= 0^{n \times n} \\ S_2(t) &= FS_2(t-1) + u(t-1)I, \quad S_2(0) = 0^{n \times n} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Table 1 に適応観測器のアルゴリズムを示す。これが、本論文の主要結果である。

5. パラメータ同定の収束性

Ljung の ODE 法⁴⁾ によれば、Table 1 の $\hat{\alpha}(t)$ の収束性は

$$f(\alpha) = 0^{2n \times 1} \quad (43)$$

が満足され、さらに

$$G^{-1}(\alpha) \left[\frac{df(\alpha)}{d\alpha} \right]_{\hat{\alpha}=\alpha} \quad (44)$$

のすべての固有値が負の実部をもてば、真値 α は可能な収束点の一つである。ここで

$$\begin{aligned} f(\hat{\alpha}) &= E\{\hat{\phi}(t, \hat{\alpha})\varepsilon(t, \hat{\alpha})\}, \\ G(\hat{\alpha}) &= E\{\hat{\phi}(t, \hat{\alpha})\hat{\phi}^T(t, \hat{\alpha})\} \end{aligned} \quad (45)$$

であり、 $\hat{\phi}(t, \hat{\alpha}), \varepsilon(t, \hat{\alpha})$ は、 $\hat{\phi}(t), \varepsilon(t)$ を生成しているパラメータ $\hat{\alpha}(s)$ 、($0 \leq s \leq t-1$)、をすべての s に対して一定値 $\hat{\alpha} \in D_s = \{\hat{\alpha} \mid \|\hat{A}\| < 1\}$ に固定した場合の定常過程である。したがって Table 1 の $\hat{\alpha}(t)$ の収束性を (43), (44) を用いて調べるためには、 $\varepsilon(t, \hat{\alpha}), \hat{\phi}(t, \hat{\alpha})$ を評価しなければならない。そこでまず $\varepsilon(t, \hat{\alpha})$ を評価する。Table 1 の $\varepsilon(t)$ をもとに

$$\varepsilon(t, \hat{\alpha}) = y(t) - c^T \hat{z}(t|t-1, \hat{\alpha}) \quad (46)$$

となるが、 $\hat{z}(t|t-1, \hat{\alpha})$ は $\hat{z}(t|t-1)$ を生成している $\hat{\alpha}(s)$ をすべての s に対して一定値 $\hat{\alpha}(s) = \hat{\alpha} \in D_s$ に固定した場合に得られるものである。 $\hat{\alpha}(s) = \hat{\alpha}$ とすることは、Table 1 の $\hat{\alpha}(t)$ において $g(t) \equiv 0$ 、すなわち $P(t) \equiv 0$ とすることである。これより $P(0) = 0$ となり、したがって (36) より $Q_a(0) = 0$ となる。このとき $Q_a(t) \equiv 0$ となり、 $Q_z(t|t-1)$ の右辺第 2 項は消滅する。したがって $t \gg 1$ で $K_z(t) = 0$ となり、 $\hat{z}(t|t, \hat{\alpha}), \hat{z}(t|t-1, \hat{\alpha})$ は $t \gg 1$ で等しくなり、これを $\hat{z}(t, \hat{\alpha})$ とすると

$$\hat{z}(t, \hat{\alpha}) = \hat{A}^T \hat{z}(t-1, \hat{\alpha}) + c\hat{b}^T u(t-1), \quad (t \gg 1) \quad (47)$$

となる。このとき (46) は

$$\varepsilon(t, \hat{\alpha}) = y(t) - c^T \hat{z}(t, \hat{\alpha}), \quad (t \gg 1) \quad (48)$$

となる。(47), (48) より $\hat{z}(t, \hat{\alpha})$ を消去すると、入力関係

$$\hat{A}(q^{-1})\varepsilon(t, \hat{\alpha}) = \hat{A}(q^{-1})y(t) - \hat{B}(q^{-1})u(t), \quad (t \gg 1) \quad (49)$$

が得られる。 $\hat{\alpha} \in D_s$ と仮定しているの、 $\hat{A}(q^{-1})$ は安定であり、したがって $\varepsilon(t, \hat{\alpha})$ は $t \gg 1$ で定常過程である。また

$$\hat{\phi}^T(t, \hat{\alpha}) = \frac{\hat{\phi}^T(t, \hat{\alpha})}{\hat{A}(q^{-1})} \quad (50)$$

であるが、

$$\hat{\phi}^T(t, \hat{\alpha}) = [\hat{z}^T(t-1, \hat{\alpha}) : u^T(t-1)], \quad (t \gg 1) \quad (51)$$

であり、 $\hat{z}(t, \hat{\alpha})$ は $\hat{A}$ を安定と仮定しているの、(47)より定常過程となる。したがって $\hat{\phi}^T(t, \hat{\alpha})$ も定常過程となる。

さて(48)を参考に、 $t \gg 1$ で $\varepsilon(t, \alpha) = e(t)$ となるので(45)をもとに

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= E\{\hat{\phi}^T(t, \alpha)\varepsilon(t, \alpha)\} \\ &= 0_{2n \times 1} \end{aligned} \quad (52)$$

となり、(43)が満足される。つぎに(44)については文献4)と同様にして $t \gg 1$ で

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(\hat{\alpha})}{d\hat{\alpha}} \right|_a &= E \left\{ \left. \frac{d\hat{\phi}^T(t, \hat{\alpha})}{d\hat{\alpha}} \right|_a \cdot e(t) - \hat{\phi}^T(t, \alpha) \frac{\phi^T(t)}{A(q^{-1})} \right\} \\ &= -E\{\hat{\phi}^T(t, \alpha)\phi^T(t, \alpha)\} \\ &= -E\{\hat{\phi}^T(t, \alpha)\hat{\phi}^T(t, \alpha)\} \\ &= -G(\alpha) \end{aligned} \quad (53)$$

となるので、(44)が満足される。したがって α は Table 1 の $\hat{\alpha}(t)$ の $t \rightarrow \infty$ での可能な収束点の一つである。

6. パラメータ同定の RML 法との関連

パラメータ同定における本手法と RML 法の違いは $\varepsilon(t)$, $\hat{\phi}(t)$ において本手法は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(t) &= y(t) - c^T \hat{z}(t|t-1) \\ \hat{\phi}^T(t) &= [\hat{z}^T(t-1|t-1) : u^T(t-1)] \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

としているのに対し、RML 法では

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(t) &= y(t) - \hat{\phi}^T(t) \hat{\alpha}(t-1) \\ \hat{\phi}^T(t) &= [y(t-1) - \varepsilon(t-1) \cdots y(t-n) \\ &\quad - \varepsilon(t-n) : u^T(t-1)] \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

としている点である。本手法の $\hat{z}(t|t-1)$ を $\hat{z}(t)$ に、 $\hat{z}(t-1|t-1)$ を $\hat{z}(t-1)$ とすれば RML 法になる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(t) &= y(t) - c^T \hat{z}(t) \\ \hat{\phi}^T(t) &= [\hat{z}^T(t-1) : u^T(t-1)] \\ \hat{z}(t) &= \hat{A}^T(t-1) \hat{z}(t-1) + c \hat{b}^T(t-1) u(t-1) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

とした場合に RML 法になる。このことはつぎのようにしてわかる。今 $\hat{z}^T(t) = [\hat{z}_1(t) \cdots \hat{z}_n(t)]$ として(56)の第3式を書き直すつぎようになる。

$$\hat{A}_{i-1}(q^{-1}) \hat{z}_i(t) = \hat{B}_{i-1}(q^{-1}) u(t) \quad (57)$$

また(55)の第1式を書き直すと

$$\hat{A}_{i-1}(q^{-1}) \{y(t) - \varepsilon(t)\} = \hat{B}_{i-1}(q^{-1}) u(t) \quad (58)$$

となる。このとき(57)と(58)を比較して

$$\hat{z}_i(t) = y(t) - \varepsilon(t) \quad (59)$$

となり、したがってこれより

$$c^T \hat{z}(t) = \hat{\phi}^T(t) \hat{\alpha}(t-1) \quad (60)$$

となる。このとき(55)の $\varepsilon(t)$ と(56)の $\varepsilon(t)$ は同じになる。また(59)を考慮して(56)の第3式を用いると

$$\begin{aligned} \hat{z}^T(t) &= [\hat{z}_1(t) \cdots \hat{z}_n(t)] \\ &= [\hat{z}_1(t) \cdots \hat{z}_1(t-n+1)] \\ &= [y(t) - \varepsilon(t) \cdots y(t-n+1) - \varepsilon(t-n+1)] \end{aligned} \quad (61)$$

となるので、(55)の $\hat{\phi}^T(t)$ と(56)の $\hat{\phi}^T(t)$ も同じになる。

上述のことから、RML 法では $\hat{\phi}^T(t) = [z^T(t-1) : u^T(t-1)]$ の $z(t-1)$ の推定において、(13), (14)の系における(14)の観測機構は利用されていない。これに対し、本手法では推定器の情報処理能力を高めるために、 $z(t-1)$ の推定に(13)のダイナミクスのほかに(14)の観測機構も利用している。この分だけ本手法は RML 法に比べて、よりきめ細かい推定を行うことができると思われる。そしてパラメータの推定精度の向上が期待される。

7. 数値実験結果

つぎの2次の系²⁾について実験を行った。

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ -0.7 & 0 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t-1) \quad (62)$$

$$y(t) = [1 \ 0] x(t) + e(t) \quad (63)$$

入力 $u(t-1)$ は、周期が1023の、+1, -1の2値をとる擬似不規則信号を用い、また $e(t)$ は $\sigma^2=1$ の正規性白色乱数を用いた。実験は5本の見本系列について行い、推定精度の評価は、パラメータ同定、状態推定ともにそれぞれ推定誤差ベクトルの大きさを、5本の見本系列について平均したもの、すなわち

$$d_\alpha(t) = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \|\alpha - \hat{\alpha}^{(j)}(t)\| \quad (64)$$

$$d_x(t) = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \|x(t) - \hat{x}^{(j)}(t)\| \quad (65)$$

を用いた。また σ^2 の推定精度の評価は

$$\hat{\sigma}^2(t) = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \hat{\sigma}^{2(j)}(t) \quad (66)$$

を用いた。ここで、 $\hat{\alpha}^{(j)}(t)$, $\hat{x}^{(j)}(t)$, $\hat{\sigma}^{2(j)}(t)$ はそれぞれ j 番目の見本系列に対する推定値である。アルゴリズムの初期値は

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(0) &= 0, \hat{z}(0) = 0, \hat{\alpha}(0) = 0, \\ P(0) &= Q_\alpha(0) = 10^3 I, Q_x(0|0) = 10 I, \\ \hat{\sigma}^2(0) &= 10^{-5} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Fig. 1 Time evolution of parameter estimation errors

とした。

Fig. 1 は、パラメータ同定精度を示すものであるが、本手法を用いた場合は、5 本の見本系列すべてに対して、推定値は真値に収束する傾向を示した。一方、RML 法を用いた場合は、5 本の見本系列のうち、2 本の見本系列については、推定値は明らかに真値以外に収束する傾向を示した。これは推定途中で $\hat{A}_{t-1}(q^{-1})$ が不安定になり、 $\hat{\phi}(t)$ が大きくなりすぎて、急速に $P(t) \equiv 0$ 、したがって $g(t) \equiv 0$ となり、その結果真値に収束しないままに $\hat{a}(t) = \hat{a}(t-1)$ となったためである。一般に RML 法では、 $\hat{A}_{t-1}(q^{-1})$ の安定性に関する監視が必要であるが、本実験ではこれは行っていない。したがって、 $d_a(t)$ は本手法のほうが RML 法に比べ、はるかに小さくなっている。そこで、Fig. 2 は、5 本の見本系列のうちで、RML 法での推定値が真値に収束する傾向を示した、ある特定の 1 本の見本系列に対する同定結果を見たものである。予期したとおり、 t が比較的小さいところでは、本手法は推定精度が RML 法に比べ改善されていることがわかる。このことは、 $\hat{\phi}^T(t)$ の推定が、より改善されているためであると考えられる。

Fig. 3 は、状態推定の精度を示すものであるが、パラメータ同定がうまく行えているので、状態推定もうまく行えていることがわかる。

Fig. 4 は、観測雑音の分散の推定精度を示す。こ

Fig. 2 Time evolution of parameter estimation errors (one sample path)

Fig. 3 Time evolution of state estimation error

れも時間経過とともに、真値へ収束する傾向を示している。

Fig. 5 は、 $e(t) \equiv 0$ の場合に形式的に本手法を適用した結果である。この場合は、確定系であるので、1

Fig. 4 Time evolution of noise variance estimate

回だけの実験を行った。パラメータ推定値，状態推定値とともに，Fig. 1, Fig. 3 と比べると収束速度は早くなっていることがわかる。

8. あとがき

本論文は，白色性の観測雑音を伴う離散時間線形系の適応観測器を構成することを考えた。パラメータ同定については，本手法の推定形式は RML 法と大体同じであるが，観測ベクトル $\phi^T(t)$ の推定において，RML 法と異なっている。RML 法では， $z(t)$ の推定に (14) の観測機構は考慮されていないが，本手法はこれを考慮しており，その結果パラメータ推定値および状態推定値の精度の向上が期待される。状態推定値は，パラメータ推定値が得られれば，確定系における場合と同様に，簡単な計算によって得られる。

数値実験では，観測雑音が伴う場合に，5 本の見本系列に対して適応観測を行った結果，本手法を用いた場合は良好な結果が得られ，適応観測の目的が達せられた。また観測雑音が存在しない場合に，形式的に本手法を適用した結果も良好であった。特に，収束速度は観測雑音が存在する場合に比べて，早くなった。しかし確定系専用の適応観測器¹⁾の収束速度と比べると劣る。これは，本手法は対象とする系が最初から確率系であることを前提にしているために，(13) の $z(t)$ の推定を必要とするからである。確定系の場合は，

Fig. 5 Time evolution of parameter and state estimation errors

$z(t)$ は既知の量となり，推定の必要がないので，収束速度をいくらでも加速することができる。

実際には，観測雑音が存在しているか，存在していないかを判断することは困難である。したがって，確率的環境，確定的環境のどちらにも耐える適応観測器が理想であるが，本手法は，数値実験結果より，この両方の環境である程度耐えることができるという意味で，頑健さをもっているものと思われる。

最後に，本論文の数値実験を行うにあたり，徳島大学教授河田照茂博士に多大の便宜を図っていただいたことを記し，謝意を表する次第である。

参考文献

- 1) 岩井：適応観測器と適応同定，計測と制御，**23**-5，422/427 (1984)
- 2) L. Dugard, I. D. Landau and H. W. Silveira: Adaptive State Estimation Using MRAS Techniques-Convergence Analysis and Evaluation, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-25**-6, 1169/1182 (1980)
- 3) 得丸，添田，中溝，秋月：計数・測定＝ランダムデータ処理の理論と応用，205/206，培風館 (1982)
- 4) T. Söderström, L. Ljung and I. Gustavsson: A Theoretical Analysis of Recursive Identification Methods, Automatica, **14**, 231/244 (1978)
- 5) T. Yoshimura, K. Konishi, R. Kiyozumi and T. Soeda: Identification of Unknown Parameters in Linear Discrete-Time Systems by a Modified Extended Kalman Filter, International J. of Systems Sci., **11**-1, 97/105 (1980)