フロート形面積流量計における脈動誤差

—レイノルズ数が高い場合の脈動誤差—

金 住 順 二*

Pulsation Error of Float-Type Flowmeter

—Pulsation Error at High Reynolds Numbers—

Junji KANAZUMI*

This report concerns the problem of pulsation error in the measurement of pulsating flow at high Reynolds numbers by making use of float-type flowmeter. The motion of the float is discussed theoretically on the basis of equation of motion taking into account the extra pressure due to unsteadiness of the flow. The effect of the extra pressure on the pulsation error is examined by making comparison of the present solution with previous one in which the extra pressure was neglected. Following points may be noted:

- 1) Pulsation error is more or less reduced by the effect of unsteady extra pressure.
- 2) The results for the pulsation error obtained in a previous paper¹⁾ are valid only for the case of low pulsation frequency or the case of small scale factor of the extra pressure effect (flow of gas in particular).

Key Words: flowmeter, pulsation error

1. はじめに

前報告¹⁾では、脈動する流量をフロート形面積流量計によって測定した場合に生ずる脈動誤差の問題を、レイノルズ数の広範囲にわたって理論、実験の両面から検討した。本報告では流れのレイノルズ数が高い場合について問題を再考する。ただし、先の解析が準定常流れを仮定しているのに対し、ここでは、流れの時間的变化にともなう圧力の非定常部分を考慮に入れて理論解析を行う。これによって両者の理論解に異なる差異を生じるか、また圧力の非定常部分は脈動誤

差にどのような影響を与えるか、さらには、前報の準定常の仮定にもとづく脈動誤差の式が脈動流のいかなる諸条件のときに適用できるか、などの点を明らかにする。

2. 非定常性を考えた圧力場

まず、以下の解析のためにつぎの3個の仮定を設ける：

- (1) Fig. 1 に示すような、フロートに相対的な流れの模様において、テーバ管入口より最狭流路C付近までの流れは完全流体の渦なし流れとみなす。
- (2) フロート周端から剥離した流線の形はC位置を越えるあたりまでは流量変動にかかわらずほぼ一定している。
- (3) フロートの背面付近の流れはよどんでおり、その圧力は上記(1)の流れのC位置における圧力 p_c にほぼ等しい。

ところで、流れの脈動とフロートの振動により、テーバ管入口における相対流速 $\hat{U}$ は時間的に変化し、またテーバ管とフロートの相対位置も変化するから、上

Fig. 1 Flow model of float-type flowmeter

* 大阪産業大学工学部 大東市中垣内 3-1-1

* Faculty of Engineering, Osaka Industrial University, Daito

(Received September 19, 1985)

(Revised March 3, 1986)

記(1)の流れは定常流ではない。

さて、フロート前面のよどみ点Aを原点とし、フロートとともに動く直角座標系 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ を Fig. 1 のようにとる。仮定(1)での流れの任意点 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ における相対流速を $\hat{\mathbf{v}}$ とすれば $\hat{\mathbf{v}}$ は

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{r}} \hat{\phi}, \quad \hat{\mathbf{r}} \equiv (\partial/\partial \hat{x}, \partial/\partial \hat{y}, \partial/\partial \hat{z}) \quad (1)$$

のように表わすことができる。ここに $\hat{\phi} = f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, t)$ は相対流れの速度ポテンシャル (t は時間) で、 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ の調和関数である。

つぎに、テーパ管に固定した(絶対)座標系 (x, y, z) を各座標軸の方向が上記の動座標軸と一致するようにとる。フロートの絶対速度を $V(t)$ (x 方向)、点Aの絶対座標を x_A とすれば

$$x = x_A + \hat{x}, y = \hat{y}, z = \hat{z}; V = dx_A/dt \quad (2)$$

である。また任意点における絶対流速を $\mathbf{v}$ とすれば

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + V\mathbf{i} \quad (3)$$

ただし、 $\mathbf{i}$ は x 方向の単位ベクトルとする。特に、テーパ管入口の絶対流速 U は

$$U = \hat{U} + V \quad \text{すなわち} \quad \hat{U} = U - V \quad (4)$$

である。なお、流体の密度を ρ とし、 dV/dt を $\dot{V}$ と書くとき、任意点の圧力 p は次式によって与えられる(付記参照)：

$$p = \hat{p} - \rho \hat{V} x. \quad (5)$$

ここに、 $\hat{p}$ は並進加速系における見かけの圧力であり、 $\hat{T}(t)$ を t だけの任意関数とすると、つぎの圧力方程式を満たす：

$$\hat{p} + \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 + \rho \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = \hat{T}(t). \quad (6)$$

(5), (6)式より、よどみ点A ($\hat{\mathbf{v}}=0$) の圧力 p_A と最狭位置 c の圧力 p_c との差は

$$p_A - p_c = \frac{1}{2} \rho \hat{v}_c^2 + \rho \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\phi}_c - \hat{\phi}_A) + \rho \dot{V} (x_c - x_A),$$

$$\hat{\phi}_c - \hat{\phi}_A = \int_0^{l_c} \hat{v}_l dl \quad (7)$$

のように表わされる。ここに添字 A はよどみ点、添字 c は最狭点における値を表わす。また l はよどみ点から C 点に至る任意の積分路長であり、 $\hat{v}_l$ は相対流速 $\hat{\mathbf{v}}$ の接線成分である。積分路として、よどみ点からフロート前面、剥離流線を経て C 点に至るものをとれば、 C 点における流路面積がテーパ管の断面積に比べて著しく小さいことから、フロートの前面上では $\hat{v}_l$ は $\hat{v}_c$ に比べて無視できる程度に小さい。剥離流線上では、 $\hat{v}_l = O(\hat{v}_c)$ であり、また積分路の長さは $x_c - x_A \equiv L$ (仮定(2)により一定)と同程度である。したがって積分 $\int_0^L \hat{v}_l dl$ は $O(1)$ の適当な数値 N を用いて $NL\hat{v}_c$ に等しいとすることができる。そこで、(7)式の右辺

第2項と第3項とをまとめると $\rho L(\partial/\partial t)(N\hat{v}_c + V)$ となるが、 $N=O(1)$ だから $N\hat{v}_c$ に比べて V を無視することができ、結局(7)式はつぎのようになる：

$$p_A - p_c \approx \frac{1}{2} \rho \hat{v}_c^2 + \rho NL \frac{\partial}{\partial t} \hat{v}_c. \quad (8)$$

さて、フロートの断面積 (= テーパ管入口断面積) を S 、フロート位置における流路断面積を s 、最狭流路断面積を κs (κ は収縮係数で $O(1)$ の定数) とすれば、連続の関係より

$$\kappa s \hat{v}_c = S \hat{U} + O(s \hat{U}) \approx S \hat{U} \quad (9)$$

を得る(注1)。

また、(4)式より

$$S \hat{U} = S(U - V) = Q - S \dot{x}_A \quad (10)$$

である。ここに $Q = SU$ は絶対流量、 $\dot{x}_A = V$ はフロートの速度である。(9), (10)式より

$$\hat{v}_c = \frac{Q - S \dot{x}_A}{\kappa s} \quad (11)$$

となる。(11)式の関係(8)式に代入するとともに、 x_A を改めて x と書けば(8)式はつぎのようになる：

$$p_A - p_c = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q - S \dot{x}}{\kappa s} \right)^2 + \rho NL \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q - S \dot{x}}{\kappa s} \right) \quad (12)$$

3. フロートの運動方程式

$s/S \ll 1$ であるから、フロート前面の相対流速は端付近を除きほぼ全的に小さく、したがって圧力はよどみ点圧 p_A に近い。よって、フロートに作用する圧力差による力は近似的に $(p_A - p_c)S$ とすることができる。また、 x の原点をフロート入口にとれば、管のテーパは小さいので $s \approx b x$ (b は微小定数) と表わすことができる。そこで、フロートの質量を m 、液中重量を $m * g$ (g は重力加速度) とすれば、つぎのようなフロートの運動方程式を立てることができる：

$$m \ddot{x} = \frac{1}{2} \rho S \left(\frac{Q - S \dot{x}}{\kappa b x} \right)^2 + \rho N L S \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q - S \dot{x}}{\kappa b x} \right) - m * g \quad (13)$$

流量に脈動がない場合 ($Q = Q_0, \dot{Q} = 0$) において、フロートが均合の状態 ($\dot{x} = \ddot{x} = 0$) にあるときの位置を $x = x_0$ とすれば、(13)式より

$$\frac{1}{2} \rho S \left(\frac{Q_0}{\kappa b x_0} \right)^2 - m * g = 0 \quad (14)$$

の関係があることがわかる。さらに(13)式で

$$Q = Q_0(1 + q), \quad x = x_0(1 + \xi) \quad (15)$$

(注1) (9)式の $O(s\hat{U})$ はテーパ管壁の後退を埋めるための流量であって管のテーパ角が小さいとき、近似的に $-V(S_c - S)$ (S_c は点 c における管の断面積) に等しく、 $V = O(\hat{U})$, $S_c - S = O(s)$ だから、これは $O(s\hat{U})$ の微小量である。

と置き (q は無次元変動流量, ξ は無次元フロート変位), (14) 式の関係を用いると, ξ と q に関する方程式がつぎのように得られる:

$$(1+\xi)^2 \ddot{\xi} = \frac{m_* g}{m x_0} (2+q+\xi-K\dot{\xi})(q-\xi-K\dot{\xi}) \\ + NL \left(\frac{2m_* g}{m x_0} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\rho S}{m x_0} \right)^{1/2} \\ \cdot \{ (1+\xi)(q-K\dot{\xi}) - (1+q+K\dot{\xi})\dot{\xi} \}, \\ K = \frac{x_0 S}{Q_0} \quad (16)$$

ここで, 無限小振幅 ($|\xi| \ll 1$), 非減衰 ($K=0$) の自由振動 ($q=0$) の場合を考えると, (16) 式はつぎのような単振動の式

$$\ddot{\xi} = -t_*^2 \xi, \quad t_* = \left(\frac{m x_0}{2m_* g} \right)^{1/2} \quad (17)$$

になり, その周期は $2\pi t_*$ である. そこで, この t_* を時間の尺度にとり

$$t = t_* \tau \quad (18)$$

によって, 無次元時間 τ (τ についての微分を dash で表す) を導入すれば, (16) 式はつぎの微分方程式になる:

$$(1+\xi) \{ 2(1+\xi) + kH \} \xi'' - k(k+H)\xi'^2 \\ + (2k+H)(1+q)\xi' + (2-Hq')\xi + \xi^2 \\ = q(2+q) + Hq'. \quad (19)$$

ただし,

$$H = 2NL(\rho S/(m x_0))^{1/2}, \quad k = K/t_* = x_0 S/(Q_0 t_*).$$

なお, 方程式(19)で $H=0$ と置けば, 前報¹⁾の運動方程式で $R_* \rightarrow \infty$ ($\sigma \rightarrow \infty$) としたものと一致する.

ところで, (19) 式における圧力の非定常部分の影響パラメータ H について, おおよその値を見積るためにたとえば $x_0=2\text{cm}$, $m=5\text{g}$, $L=0.5\text{cm}$ ($d/2$ 程度と仮定), $d=1\text{cm}$ (フロート直径), $S=\pi d^2/4$, $N=1$ とすれば, 液体 (水) では $H=0.28$, 気体 (空気) では $H=0.0088$ 程度となる.

さて, 前報告¹⁾と同様に以後, 流量変動 q は余弦的, すなわち,

$$q = \varepsilon \cos \lambda \tau \quad (\varepsilon \text{ は振幅定数, } \lambda \text{ は脈動周波数}) \quad (20)$$

である場合を想定して解析を進める.

4. $\lambda \gg 1$ に対する解析解

方程式(19)は ξ に対する2階の常微分方程式であるが, 非線形であるために解析的な一般解を求めることは困難である. 脈動振幅 ε が小さいとして $O(\varepsilon^2)$ 程度までの摂動解を求めることは可能であるが, 前報²⁾におけるこの種の解析 (ただし $H=0$) と重複する部

分も多くなるので本報告では省略する. 解析的取扱いができる別の場合として脈動の周波数 λ が非常に大きい場合が考えられるが, 以下, これについて簡単に述べる. なお, パラメータ ε , λ , k , H の値を適当に与えて (19) 式を数値的に解くことには本質的困難はなく, これによる一般の結果とその検討については次節で述べることにする.

まず, フロートの変位 ξ をつぎのように λ の降べき級数形に仮定する:

$$\xi = C + \lambda^{-1} A \sin(\lambda \tau) + \lambda^{-2} f(\lambda \tau) + O(\lambda^{-3}). \quad (21)$$

ここで, C と A は未知定数, $f(\lambda \tau)$ は未定の関数である. (21) 式を (19) 式に代入すると

$$\lambda [- \{ 2(1+C)^2 + kH(1+C) \} A + H\varepsilon C] \sin(\lambda \tau) \\ + (2k+H)A \cos(\lambda \tau) + \frac{1}{2} [4(1+C) - k^2] A^2 \\ + 2k\varepsilon A \cos(2\lambda \tau) - \frac{1}{2} [4(1+C) + 2kH + k^2] A^2 \\ + (k+H)\varepsilon A + 2C + C^2 + \{ 2(1+C)^2 \\ + kH(1+C) \} f''(\lambda \tau) + O(\lambda^{-1}) \\ = -\lambda H\varepsilon \sin(\lambda \tau) + \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\varepsilon \cos(\lambda \tau) + \frac{\varepsilon^2}{2} \cos(2\lambda \tau) \quad (22)$$

となる. ただし, $f'(\lambda \tau) \equiv df(\lambda \tau)/d(\lambda \tau)$ などとする. ここで両辺の $\sin(\lambda \tau)$ の係数および定数項をそれぞれ等置すると

$$- \{ 2(1+C)^2 + kH(1+C) \} A + H\varepsilon C = -H\varepsilon, \quad (23)$$

$$C^2 + 2C - \frac{1}{2} [4(1+C) + 2kH + k^2] A^2 + (k+H)\varepsilon A \\ = \frac{\varepsilon^2}{2} \quad (24)$$

となる. (23) 式より

$$A = \frac{H\varepsilon}{2(1+C) + kH} \quad (25)$$

これを (24) 式に代入し, $C+1=I$ とおけば

$$4I^4 + 4HkI^3 + \{ H^2 k^2 - 2(2+\varepsilon^2) \} I^2 - 4HkI - H^2 k^2 = 0. \quad (26)$$

これを I に対して解けば, $C+1=I$ によって偏差 C が定まる. 特に $H=0$ (前報¹⁾) の場合には

$$I^2 - \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) = 0 \quad (27)$$

となり, これより C は

$$C = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{2}}. \quad (28)$$

ただし, $\varepsilon=0$ で $C=0$ となるべきだから複号は+のほうをとる.

つぎに, (22) 式の両辺の比較から任意関数 $f(\lambda \tau)$ を

$$f(\lambda\tau) = B_1 \cos(\lambda\tau) + B_2 \cos(2\lambda\tau) \quad (29)$$

のようとり、両辺の $\cos(\lambda\tau)$, $\cos(2\lambda\tau)$ の係数を等置すると

$$(2k+H)A - \{2(1+C)^2 + kH(1+C)\} B_1 = 2\varepsilon \quad (30)$$

$$\frac{1}{2} [\{4(1+C) - k^2\} A^2 + 2k\varepsilon A] - 4 \{2(1+C)^2 + kH(1+C)\} B_2 = \frac{\varepsilon^2}{2} \quad (31)$$

この両式より B_1 , B_2 も定まる。

5. 脈動誤差の検討

フロートの運動方程式(19)を数値解法によって解いた結果の吟味、特に流れの脈動によるフロートの浮上がり、“脈動誤差”の問題を検討する。誤差の表示としてはフロートの平均位置 $\bar{x}$ と定常流れ下でのフロートの平衡位置 x_0 との差を x_0 で無次元化した値 $E = (\bar{x} - x_0)/x_0$ を用いる。これは前節における定数 C と同じものである。まず、Fig. 2 はフロートの振動の様子 $\xi(\tau)$ を、脈動周波数 λ の二つの場合 ($\lambda=2$ および 6) について、圧力の非定常部分を取り入れた場合 ($H=0.7$) とこれを無視した場合 ($H=0$, 前報^{1),2)} の場合) について示したものである。ここで、制動係数 k の値は共通に $k=3$ と定め、また、強制力にあたる流量の脈動振幅も同一の値 $\varepsilon=0.2$ と取っている。にもかかわらず、周波数が高い場合には、フロートの振幅は非常に小さくなるのがまず目につく。また、いずれの場合においても振動の中心が $\xi=0$ ($x=x_0$) より正の側にずれているのが見られる (フロートの浮上がり)。これが脈動誤差にほかならない。つぎに、問題の H の影響については、これは図に見られるように、フロートの運動をやや抑制するとともに、脈動誤差を小さくさせる効果を及ぼすことがわかる。

つぎに、制動係数 k の値そのものもフロート運動 (特に共振現象) に大きい影響を及ぼすが、Fig. 3 では $k=3$, Fig. 4 では $k=1$ と取り、脈動振幅はともに $\varepsilon=0.2$ として、圧力の非定常部分のパラメータ H に種々の値を与えて、脈動誤差 E を周波数 λ の関数とし

Fig. 2 Numerical solution for float-displacement ξ

Fig. 3 Pulsation error characteristics

Fig. 4 Pulsation error characteristics

て数値計算した結果を示す。両図を比べてまず目につくことは、Fig. 3 の場合には共振現象の影響がまったくみられないのに対して、Fig. 4 では E の曲線が $\lambda=1$ 付近において共振にもとづく大きいピークをもつことである。また、パラメータ H の影響としては、いずれの図においても H の増加にともない E の曲線の低下が共通的にみられる。すなわち、前にも述べたように圧力の非定常部分の存在は脈動誤差を抑制する方向に影響を及ぼす。また、Fig. 3 および Fig. 4 からわかるように H の影響自体は低周波領域 ($\lambda \leq 1$) においては一般に微小である。なお、両図における E の各曲線の右端に記した丸印は、4 章で求めた $\lambda \gg 1$ に対する近似解からの偏差 $C(=E)$ の値を示したものである。

さて、フロート形面積流量計の力学については、これまで数多くの研究³⁾⁻⁵⁾ が報告されており、なかでも H. H. Dijkstra³⁾ の先駆的な研究が注目される。彼は本報告におけるものと本質的に同様な考察にもとづいて、フロートの運動方程式を導いているが、その結果は本報の方程式 (19) において $H(1+q)\xi' - Hk(\xi')^2$

Fig. 5 Comparison of pulsation errors from different equations

の項を欠いたものになっている（その他、多少の本質的でない相違もある）。その源を調べてみると、(12)式の圧力の非定常部分 $\rho NL(\partial/\partial t)\{(Q-Sx)/(ks)\}$ において分母の ks を近似的に一定（ t によらない）としている疑問点が浮び上がる。 s はテーパ管とフロートとの隙間面積であって、フロートの振動につれて増減し、その影響を無視可能と理由づけることは困難であるように思われる。数量的な差をみるために、(19)式および同式から問題の項を落した式（Dijstelbergenの式に相当）の双方について $\epsilon=0.2$, $H=0.7$ と取り $k=1$ および 3 の二つの場合について脈動誤差 $E(\lambda)$ を計算してみた結果を Fig. 5 に示す。この結果から Dijstelbergen の式は $H \neq 0$ の場合に E を過大に見積る傾向があることがわかる。なお、他の文献^{4), 5)}については、本報告および Dijstelbergen の報告にみるような、圧力の非定常成分の影響を理論に含めていないため、圧力の非定常成分の導入といった共通の観点で比較することができないので、ここではこれらの文献との比較検討には立ち入らない。

6. 結 言

以上、フロート形面積流量計の脈動誤差の問題（レイノズル数が大きい場合）を流れの時間的变化にともなう圧力の非定常部分を考慮して理論解析を行った。その結果、つぎのことが明らかになった。

- 1) 圧力の非定常部分の存在は脈動誤差を抑制する方向に影響を及ぼし、その程度は流れの非定常部分の大きさを表わすパラメータ H の値に比例して大きい。
- 2) 準定常流れを仮定した理論解（前報¹⁾）と圧力の非定常部分を考慮した本報の理論解との比較が

ら、前者の解は脈動周波数 λ が 1 程度以下か、圧力の非定常部分のパラメータ H の値が小さい場合（特に気体の場合）に限って適用するのが無難である。

この研究に終始、ご指導、ご鞭撻を賜った大阪産業大学工学部交通機械工学科玉田 玠教授に深く感謝の意を表わすものである。

参 考 文 献

- 1) 金住：フロート形面積流量計による脈動流の平均流量測定時の誤差，計測自動制御学会論文集，20-2，64/69 (1984)
- 2) 金住，杉田：フロート形面積流量計による脈動流の平均流量測定時の誤差（流量変動が大きい場合の誤差と流量波形による影響），計測自動制御学会論文集，21-2，43/48 (1985)
- 3) H. H. Dijstelbergen: Rotameter Dynamics, Chemical Engineering Science, 19, 853/865 (1964)
- 4) 森，牧，ほか：浮子面積流量計の研究（改良された分流量能および動特性について），精密機械，31-4，33/40 (1965)
- 5) 牧，池田：浮子面積流量計による脈動流の流量測定，日本機械学会第 903 回講演論文集，790-10 (1979)

《付録》 並進加速系と圧力

フロートとともに動く並進加速系と，テーパ管に固定した静止系との間には任意点の座標および流速について本文の(2)，(3)式の関係がなりたつ。ゆえに，フロートに相対的な流速 $\hat{v}$ に対する速度ポテンシャル $\hat{\phi}$ ，絶対流速 v に対するものを ϕ とすれば

$$\nabla\phi = v = \hat{v} + V\hat{i} = \nabla\hat{\phi} + \nabla(Vx)$$

である。したがって ϕ は

$$\phi = \hat{\phi} + Vx. \quad (A.1)$$

つぎに， $T(t)$ を t だけの任意関数とすると，任意点の圧力 p は圧力方程式

$$p = T(t) - \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (A.2)$$

によって与えられる。ここで

$$v^2 = (\hat{v} + V\hat{i})^2 = \hat{v}^2 + V^2 + 2V\hat{u} \quad (A.3)$$

である。ただし， $\hat{u}$ は $\hat{v}$ の x 成分である。また (A.1) と本文(2)式とから

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \dot{V}x = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} - \hat{u}V + \dot{V}x \quad (A.4)$$

である。(A.3)，(A.4)式を(A.2)式に入れると圧力方程式は

$$p = \hat{T}(t) - \frac{1}{2}\rho \hat{v}^2 - \rho \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} - \rho \dot{V}x \quad (A.5)$$

となる。ただし， $\hat{T}(t) = T(t) - (1/2)\rho V^2$ は t だけの任意関数である。並進加速系における見かけの圧力 $\hat{p}$ を本文(6)式のように定義すれば，(A.5)式より p と $\hat{p}$ の関係がつぎのように導かれる：

$$p = \hat{p} - \rho \dot{V}x.$$