シンプレックス法における収束性向上 のための一アルゴリズム[†]

関 口 隆*・大 里 有 生*・鈴 木 和 清*
小 館 英 實**・斎 藤 康**

An Improved Algorithm of a Simplex Method on Convergence in Function Optimization

Takashi SEKIGUCHI*, Ario OHSATO*, Kazukiyo SUZUKI*
Hidemi KODATE** and Susumu SAITO**

1. はじめに

Spendley ら¹⁾によって開発され Nelder ら²⁾によって改良されたシンプレックス法は、目的関数の導関数を利用しない場合あるいは利用できない場合における制約条件なし非線形最適化問題に対する有力な試行探索法の一つである³⁾。また、制約条件つき非線形最適化問題に対しても有効であることが示されている^{4)~7)}。

本報告では、Nelder らのシンプレックス更新アルゴリズムのうち、最適点あるいは関数の狭い谷の近傍において重要となるシンプレックスの収縮操作を改良し、収束性を向上させるための一アルゴリズムを提案する。

まず最初に、制約のない n 変数関数 $f: R^n \rightarrow R^1$ の極小化を考える。 n 次元空間における $(n+1)$ 個の点 $P_i, i \in I, I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ を頂点とするシンプレックスにおいて、頂点 P_i に対する関数値を y_i と書く。さらにシンプレックス頂点の最良点 P_L 、最悪点 P_H に対する関数値をそれぞれ y_L, y_H とする。

Nelder らのシンプレックス更新アルゴリズムは、シンプレックスが関数の局所的形状に即して適応する

ように、最悪点 P_H を鏡映、伸長、収縮の操作によって新しい頂点と入れ替えてシンプレックスを逐次的に更新し、最適点へ収束させる方法である。

Nelder らのシンプレックス更新アルゴリズムのなかで改良の余地があると考えられる操作は、収縮操作における収縮点の取扱いである。すなわち、収縮操作を必要とする場合は最悪点 P_H の鏡映点 P^* が再び新しい最悪点となるときのであるが、これは、 P^* が最適点の近傍もしくは関数の狭い谷を飛び越えたり、あるいは、シンプレックスが最適点近傍を内包しているような場合に生じやすいと考えられる。したがって、このとき、収縮点 P^{**} が新しい最良点となる可能性があるので、収縮点 P^{**} を最悪点 P_H から P^{**} への向きに逆に伸長した点 P^{***} を考えればさらに関数値の小さい点を得ることが期待できる。

そこで、シンプレックス法における収束性を向上させるための一アルゴリズムとして、収縮操作における最良点発見時の伸長操作を以下に提案する。

2. 収束性向上のための一アルゴリズム

従来のシンプレックス更新アルゴリズム²⁾における収縮操作に以下のアルゴリズムを追加する⁸⁾。

追加アルゴリズム：収縮点 P^{**} が $y^{**} \leq y_H$ を満たすとき、さらに、 $y^{**} < y_L$ が成立するか否かを判定する。もし $y^{**} < y_L$ ならば収縮点 P^{**} が新しい最良点となる場合であるので、次式によって伸長点 P^{***} を定める。

$$P^{***} = P_H + \gamma'(P^{**} - P_H), \quad 1 < \gamma' < 2 \quad (1)$$

このとき、 $y^{***} < y_L$ ならば P_H を P^{***} と入れ替え、 $y^{***} \geq y_L$ ならば伸長失敗であるので、 P_H を

[†] 第25回自動制御連合講演会で発表(昭57・11)

* 横浜国立大学工学部 横浜市保土ヶ谷区常盤台 156

** (株)東芝 東京都港区芝浦 1-1-1

* Faculty of Engineering, Yokohama National University, Yokohama

** Toshiba Corp., Minato-ku, Tokyo

(Received November 13, 1985)

(Revised February 3, 1986)

Key Words: simplex, non-linear function, unconstrained optimization, water distribution network, pressure optimization

Fig. 1 Convergence of function minimization by means of the improved simplex method

P^{**} と入れ替えてシンプレックスを更新する。一方、 $v^{**} \geq v_L$ の場合には、伸長操作をせずに P_H を P^{**} と入れ替えてシンプレックスを更新する。

ただし、このアルゴリズムにおいて、収縮時伸長係数 γ' の値を $1 < \gamma' < 2$ に制約したのは、伸長点 P^{***} を現行シンプレックスの内点に配置させるためである。

3. 数 値 例

上水道配水管網の圧力最適化問題にシンプレックス法を適用し、本アルゴリズムの有効性を確かめる。以下では、多点注入系すなわち二つ以上の配水基地をもつ配水管網⁹⁾を対象として、配水基地のエネルギー位 (mAq) e_i を制御変数とした管網節点エネルギー位 (mAq) e_j の最適化問題を扱う⁹⁾。

目的関数 (偏差2乗和) :

$$J = \sum_{j \in \text{INR}} (e_j - E_j^d)^2 \rightarrow \min_{e_i, i \in \text{INC}}$$

制約条件式 (流量式, 節点方程式) :

$$\sum_k q_{kj} - W_j = 0, j \in \text{INR}$$

$$q_{kj} = \begin{cases} R_{kj} |e_k - e_j|^{a-1} (e_k - e_j) & (\text{バルブなし}) \\ U_{kj} |e_k - e_j|^{b-1} (e_k - e_j) & (\text{バルブあり}) \end{cases}$$

$$j \in \text{INR}$$

ただし、 q_{kj} は節点 k から j への管路流量 (m^3/s) を示し、 E_j^d は目標エネルギー位、 W_j は各節点からの既知の需要流量を示し、INC は配水基地節点の集合、INR は配水基地節点以外の節点の集合、 R_{kj} 、 U_{kj} はそれぞれ節点 k と j を結ぶ管路の摩擦損失係数、バルブ損失係数、 $a=0.54$ 、 $b=0.5$ とする。

節点数 174, 管路数 222, バルブ数 6, 配水基地数

4 の K 市の配水管網を対象として、節点の目標エネルギー位 E_j^d を (節点の標高 + 30 mAq) としたときの計算結果を Fig. 1 に示す。Fig. 1 は従来のシンプレックス法と本報告で提案した改良型シンプレックス法を適用した場合の収束性を比較している。従来法に比べてシンプレックス更新回数の少ない時点で目的関数値が減少しており、最適点近傍への接近が速い。

4. おわりに

シンプレックス法は同じ試行探索法の一つである Powell 法¹⁰⁾ に比べて理論的ではないが計算が簡単であり多変数あるいは多峰性関数の最適点探索にも有用であるので¹¹⁾、実用面での利用が期待できると考える。特に、近年その実用化が叫ばれている上水道配水管網の圧力最適化に対する実用的方策として有効である。

参 考 文 献

- 1) W. Spendley, G. R. Hext and F. R. Himsworth: Sequential Application of Simplex Designs in Optimization and Evolutionary Operation, Technometrics, 4-4, 441/461 (1962)
- 2) J. A. Nelder and R. Mead: A Simplex Method for Function Minimization, The Computer Journal, 7, 308/313 (1965)
- 3) W. H. Swan: Direct Search Methods, Numerical Methods for Unconstrained Optimization (Ed. W. Murray), 13/28, Academic Press (1972)
- 4) M. J. Box: A New Method of Constrained Optimization and a Comparison with Other Methods, The Computer Journal, 8, 42/52 (1965)
- 5) 志水: システム最適化理論, 92/99, コロナ社 (1971)
- 6) M. J. Box: A Comparison of Several Current Optimization Methods, and the Use of Transformation in Constrained Problems, The Computer Journal, 9, 67/77 (1966)
- 7) 宮岡, 船橋: ネットワーク・フロー理論の応用による大規模配水システムの圧力最適化法, 電気学会論文誌 C, 102-3, 59/66 (1982)
- 8) 鈴木, 大里, 関口: 改良型シンプレックス法による配水管網の圧力最適化, 第25回自動制御連合講演会前刷, 123/124 (1982)
- 9) 高桑: 配水管網の解析と設計, 93/141, 森北出版 (1978)
- 10) M. J. D. Powell: An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives, The Computer Journal, 7, 155/162 (1964)
- 11) 寺野, 野本: システム工学の手法, 163/164, 日刊工業新聞社 (1972)