時変連続系の適応同定†

市川 邦彦*

Adaptive Identification for Time-Varying Continuous-Time Systems

Kunihiko ICHIKAWA*

Adaptive identification for time-varying continuous-time systems is considered in this paper. Although the convergence speed of least square adaptive law is extremely rapid, its performance becomes deteriorate remarkably when it is applied to time-varying systems. In order to overcome its defect while making full use of its advantage, an adaptive identifying scheme using least square algorithm with intermittent reset is proposed. When parameters to be identified vary as an exactly quadratic function of time, the identification problem can be reduced to the one with constant parameters by introducing two additional parameters for each time-varying parameter. The adaptive identifying scheme using least square algorithm is applied over a prescribed short period by assuming that parameters vary quadratically with time. At the end of the period, the matrix $\Gamma(t)$ is reset to $\Gamma(0)$ of large value, while the initial values for the estimates are chosen so as the estimated value and its derivative continue at the connecting instant. The scheme is confirmed to be of satisfactory tracking performance through simulation studies. Besides, the least square algorithm for continuous-time systems is developed in this paper.

Key Words: adaptive identification, time-varying system, continuous-time system, least square algorithm

1. ま え が き

適応同定は、それ自体が重要であるばかりでなく、適応制御においても必ず適応同定の場合と同様な適応動作が必要とされる。適応法則には種々のものが提案

されているが¹⁾、それらは主として安定性の観点からのみ論じられ、収束速度に関する議論はわずかしかないう²⁾。

最小 2 乗法は、もともと物理実験における測定精度を高めるための原理的方法であって、システム同定にも広く用いられる。最小 2 乗法は、その原理からいって、もし測定誤差がないならば、同定すべきパラメータの次元に等しいだけの測定データから、パラメータの真値が得られるというデッド・ビート特性をもつので、適応同定において極めて速い収束速度をもっている。しかし、連続時間系に対する定式化については、これまであまり論じられていない。この論文ではその定式化が行われている。

最小 2 乗法は、その原理からいって、プラント・パラメータが時間的に変化すると、その特性は著しく劣化する。適応制御は、その定式化においては、プラント・パラメータを未知の定数としているが、本来は、プラント・パラメータがゆるやかに変動する状況に対処すべきものであるから、最小 2 乗法をそのままの形で適用することはできない。この研究は、最小 2 乗法の速い収束特性を活用し、また時変系に対する特性劣化を防止するために、リセットを併用したものである。

2. 連続時間最小 2 乗法適応法則

n 階の線形時不変プラントの運動は、つぎのパラメトリック表示によって表わすことができる。

$$y(t) = \theta^T \omega(t) \quad (1)$$

(付録 1 参照)

ここに、 $y(t)$ はプラント出力、 θ は $2n$ 次プラント・パラメータ、 $\omega(t)$ は入手可能な $2n$ 次元信号である。最小 2 乗法適応法則を導出するために、プラント出力に観測誤差 $e(t)$ が含まれるものとする。すなわち

$$y(t) = \theta^T \omega(t) + e(t) \quad (2)$$

最小 2 乗法とは、未知ベクトル θ を、区間 $[0, t]$ にわ

† 第 24 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 60・7)

* 上智大学理工学部 東京都千代田区紀尾井町 7-1

* Faculty of Science and Technology, Sophia University, Chiyoda-ku, Tokyo
(Received September 18, 1985)

(Revised March 13, 1986)

たる観測にもとづいて、 $J = \int_0^t e^2(\tau) d\tau$ が最小となるように、定めることをいう。そのような θ は時間の関数となるので、 $\hat{\theta}(t)$ と表わす。

$$J(\hat{\theta}(t)) = \int_0^t [\dot{y}(\tau) - \hat{\theta}^T(\tau)\omega(\tau)]^2 d\tau \quad (3)$$

より、 $\hat{\theta}(t)$ はつぎのようにもとまる。

$$\hat{\theta}(t) = \left[\int_0^t \omega(\tau)\omega^T(\tau) d\tau \right]^{-1} \cdot \int_0^t \omega(\tau)\dot{y}(\tau) d\tau \quad (4)$$

この式によって $\hat{\theta}(t)$ を求めるのはバッチ方式であって適応的ではない。以下、適応的に $\hat{\theta}(t)$ を定める方法を述べる。

$\hat{\theta}^T(t)\omega(t)$ は、時刻 t における y の推定値と考えられ同定値という。これを $\hat{y}(t)$ で表わす。すなわち

$$\hat{y}(t) = \hat{\theta}^T(t)\omega(t) \quad (5)$$

$\hat{y}(t) - y(t)$ を同定誤差といい $\varepsilon(t)$ で表わす。すなわち

$$\varepsilon(t) = [\hat{\theta}(t) - \theta]^T \omega(t) \quad (6)$$

(4)式より

$$\hat{\theta}(t) = - \left[\int_0^t \omega(\tau)\omega^T(\tau) d\tau \right]^{-1} \omega(t)\varepsilon(t) \quad (7)$$

(付録2参照)

いま

$$\Gamma(t) = \left[\int_0^t \omega(\tau)\omega^T(\tau) d\tau \right]^{-1} \quad (8)$$

とおくと、適応法則は

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}(t) &= -\Gamma(t)\omega(t)\omega^T(t)\Gamma(t) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= -\Gamma(t)\omega(t)\varepsilon(t) \end{aligned} \quad (9)$$

として得られる。 $\hat{\theta}(t)$ の初期値は任意でよいが、 $\Gamma(t)$ の初期値は(8)式より αI 、 $\alpha \gg 1$ とすべきであることがわかる。実際の数値計算では、 α を無限に大きくすることはできないので、理想的な最小2乗法は実行できない。

《定理1》 $\omega(t)$ が有界なとき、(9)式の適応法則によって $t \rightarrow \infty$ で $\varepsilon(t) = 0$ 、 $\dot{\hat{\theta}}(t) = 0$ が得られる。

(証明) $\Gamma(0) > 0$ なるゆえ $\Gamma^{-1}(0) > 0$ である。

$\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t) = I$ と、(9)式より $[\Gamma^{-1}(t)]^* = \omega(t)\omega^T(t)$ を得る、よって $\Gamma^{-1}(t) > 0 \quad \forall t$ が得られる。

Lyapunov 関数候補として

$$V = [\hat{\theta}(t) - \theta]^T \Gamma^{-1}(t) [\hat{\theta}(t) - \theta] \quad (10)$$

を考える。 $V > 0$ であり、また V は $\|\hat{\theta}(t) - \theta\| \rightarrow \infty$ のとき、またそのときに限って無限大となる。 $\dot{V}(t)$ を求めると

$$\dot{V}(t) = -\varepsilon^2(t) \leq 0 \quad (11)$$

となる。 V は単調減少するから $\|\hat{\theta}(t) - \theta\|$ は $\|\hat{\theta}(0) - \theta\|$ が有界ならば、つねに有界である。 V は下に有界であるから一定値に収束し、 $\dot{V}(t)$ は0に収束する。よって $\varepsilon(t)$ は0に収束する。(7)式において、 $\varepsilon(t)$ が0

に収束し、 $\omega(t)$ が有界であるから、 $\dot{\hat{\theta}}(t)$ は0に収束する。
Q. E. D.

(注意) (6)式において、 $\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{\theta}(t) - \theta]$ と $\omega(t)$ は直交し、また $\hat{\theta}(t) \rightarrow 0$ である。よって、 $\omega(t)$ が有限時間区間で $2n$ 次元空間をスパンするなら、 $\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{\theta}(t) - \theta]$ は0となり、パラメータ同定が完了する。すなわち、適応法則そのものは $\varepsilon(t)$ と $\hat{\theta}(t)$ を0ならしめるだけの効力しかなく、これに $\omega(t)$ が sufficiently rich の条件が付加されて同定が完了する^{3), 4)}。

3. 収束速度

どのような適応法則も、その収束速度を解析的に求めることはできない。ここではシミュレーションによって収束速度を検討する。前節に述べた最小2乗法適応法則を、よく用いられる適応法則⁵⁾

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\Gamma \frac{\omega(t)\varepsilon(t)}{c + \omega^T(t)\omega(t)}, \quad \Gamma^T = \Gamma > 0 \quad (12)$$

と比較する。同定すべきプラントは

$$t(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+3}$$

とする。 θ の真値は

$$\theta = [1/3, 8/3, 2/3, 1/3]^T$$

である。また $\omega(t)$ はつぎのように選んだ。

$$\omega(t) = \left[\frac{1}{p+2}y(t), \frac{1}{p+5}y(t), \frac{1}{p+2}u(t), \frac{1}{p+5}u(t) \right]^T$$

入力信号は

$$u(t) = 2\sin t + 4\sin 2t + 8\sin 8t + 20\sin 10t$$

とした。 $\hat{\theta}(t)$ の初期値は

$$\hat{\theta}(0) = -[-3, 3, 3, -3]^T$$

とした。

Fig. 1 Least square adaptive identification

Fig. 2 Adaptive law of eq. (12)

Fig. 3 Application of least square for abrupt change of parameter

Fig. 4 Application of eq. (12) for abrupt change of parameter

最小2乗法では、適応アルゴリズムで選定すべきパラメータは $\Gamma(0)$ のみで、しかも、一般にそれは大きいほどよいのであるから試行錯誤はない。これに比べて(12)式を用いる場合、 c は小さいほどよいが、 Γ には適正值があって、その選定には多大の試行錯誤が必要である。 $c=0.00001$ とし、また $\Gamma=30I$ とした。Fig. 1 は最小2乗法を用いたとき、Fig. 2 は(12)式を用いたときのパラメータの収束状況で、最小2乗法はおおよそ収束所要時間が1けた小さい。

Fig. 3 は、最小2乗法を用いているときに、パラメータが突変したとき、それ以降の同定性能がきわめて悪いことを示す。一方 Fig. 4 は、(12)式を用いた場合で、かなりよく追従していることがわかる。すなわち、時変系では、最小2乗法は極端に劣化し、(12)式の適応法則よりも劣ることがわかる。

4. 時変系の適応同定

前節のシミュレーションに用いた例題で、 θ_1 が真値 $1/3$ のまわりに変動し

$$\theta_1(t) = 1/3 + 0.04 \sin(0.785t)$$

となったとしよう。この変動にもかかわらず最小2乗法を採用した結果をFig. 5に示す。

パラメータが変動する場合の対策としては forgetting factor を導入する方法が考えられている⁶⁾。しかし、それはきわめて危険な bursting を伴いやすい⁷⁾。

最小2乗法の速い収束速度の長所を活用し、かつ、それがパラメータ変動にはきわめて弱い欠点を補うため、Xianya and Evans の研究⁸⁾に動機づけられて、パラメータを時間に対する2次曲線で近似したリセット方式を採用し、以下に述べるように優れた結果を得た。

パラメータが緩やかに変動する場合、かなり短い時間区間のパラメータ値を2次曲線で近似することができる。もちろん、長時間にわたって一つの2次曲線をあてはめることはできないから、一定時間ごとに新しく2次曲線近似を行うのである。そして、新しい区間に入ると、そこは初期時刻とみなし、 $\Gamma(t)$ を αI にリセットする。

簡単のため θ_1 のみが2次曲線的に変化し、 θ_1 以外は一定値をもっているとする。このとき、プラント・ダイナミクスは(1)式の代わりに

$$y(t) = (\theta_{10} + \theta_{11}t + \theta_{12}t^2)\omega_1 + \sum_{i=2}^{2n} \theta_i \omega_i(t) \quad (13)$$

Fig. 5 Application of least square without reset for sinusoidal change of parameter

Fig. 6 Application of least square with reset for sinusoidal change of parameter

あるいは

$$y(t) = [\theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_2, \dots, \theta_{2n}] \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_1(t)t \\ \omega_1(t)t^2 \\ \omega_2(t) \\ \vdots \\ \omega_{2n}(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

と書ける。よって新たに $[\theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_2, \dots, \theta_{2n}]^T$ を θ^T と定義し、また $[\omega_1(t), \omega_1(t)t, \omega_1(t)t^2, \omega_2(t), \dots, \omega_{2n}(t)]^T$ を $\omega^T(t)$ と定義すれば、プラント・ダイナミクスの表現は(1)式に帰着する。

Fig. 6 は、2秒ごとにリセットした結果である。リセットに際し、接続点で $\tilde{\theta}_1(t) = \tilde{\theta}_{10}(t) + \tilde{\theta}_{11}(t)t + \tilde{\theta}_{12}(t)t^2$ の値およびその導関数が接続するように、つぎの時間区間の $\tilde{\theta}_{10}(t), \tilde{\theta}_{11}(t), \tilde{\theta}_{12}(t)$ の初期値を与えることに注意をする(付録 3 参照)。これによって、同定値が真値をきわめて高い精度で追跡していることがわかる。

5. む す び

最小 2 乗法の長所を活用し、かつその短所を抑制するため、時変系のパラメータ値を 2 次曲線で近似しながら、リセットを繰返すことによって、きわめて高い精度の追従特性をもつ適応同定法が得られた。この適応方式は、適応制御にも応用して効力を発揮するものと思われる。

参 考 文 献

- 1) 鈴木 隆: 適応制御, 自動制御ハンドブック基礎編Ⅲ部 3 章, 701/733, オーム社 (1983)
- 2) 岩井, ほか: 指数減衰的収束性を有する適応観測器, 計測自動制御学会論文集, 18-4, 343/348 (1982)
- 3) K. S. Narendra and Y. Lin: Design of Stable Model Reference Adaptive Controllers in Applications of Adaptive Control ed. by K. S. Narendra and R. V. Monopoli, 69/130, Academic Press (1980)
- 4) 新中, 鈴木: 一般化パラメータ適応則の拡張とその性質, 計測自動制御学会論文集, 19-11, 881/888 (1982)
- 5) 市川邦彦: 新しい適応法則をもつ適応観測器, 計測自動制御学会第 2 回適応制御シンポジウム資料, 35/38 (1982)
- 6) E. Irving: New Developments in Improving Power Network Stability with Adaptive Generator Control in Applications of Adaptive Control ed. by K. S. Narendra and R. V. Monopoli, 221/244, Academic Press (1980)
- 7) K. J. Astrom and B. Wittenmark: Self-Tuning Controllers Based on Pole-Zero Placement, IEEE 127 D, 120/130 (1980)
- 8) X. Xianya and R. J. Evans: Adaptive Control of Discrete-Time Time-Varying Systems with Unknown Deterministic Disturbance, IEEE 131 D, 81/84 (1984)

《付 録》

〈付録 1〉

プラントの伝達関数を

$$t(s) \triangleq \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{r_{n-1}s^{n-1} + \dots + r_0}{s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_0} \quad (\text{A. 1. 1})$$

とおく。 $f(s)$ を任意の n 次モノック安定多項式とする。 $t(s)$ の分母を $f(s)$ で割ると、つぎのように変形することができる。

$$t(s) = \frac{b_{n-1}(s^{n-1}/f(s)) + \dots + b_0(1/f(s))}{1 - a_{n-1}(s^{n-1}/f(s)) - \dots - a_0(1/f(s))} \quad (\text{A. 1. 2})$$

これより、つぎの表現が得られる。

$$y(t) = a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{f(p)} y(t) + \dots + a_0 \frac{1}{f(p)} y(t)$$

$$+b_{n-1}\frac{p^{n-1}}{f(p)}u(t)+\cdots+b_0\frac{1}{f(p)}u(t) \quad (\text{A. 1. 3})$$

いま

$$\theta=[a_{n-1}\cdots a_0 \ b_{n-1}\cdots b_0]^T$$

$$\omega(t)=\left[\frac{p^{n-1}}{f(p)}y(t)\cdots\frac{1}{f(p)}y(t) \ \frac{p^{n-1}}{f(p)}u(t)\cdots\frac{1}{f(p)}u(t)\right]^T \quad (\text{A. 1. 4})$$

とおけば(1)式が得られる。

上の方法は $f(p)$ の零が実数でなくてもよいが、特に $f(s)=\prod_{i=1}^n (s+\lambda_i)$, $\lambda_i>0$, $i=1, 2, \dots, n$, とすると、つぎのような誘導ができる。 $t(s)$ の分母分子を $f(s)$ で割って、さらに部分分数展開すると

$$t(s)=\frac{\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s+\lambda_i}}{1-\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s+\lambda_i}} \quad (\text{A. 1. 5})$$

という形が得られる。これより

$$y(t)=\alpha_1\frac{1}{p+\lambda_1}y(t)+\cdots+\alpha_n\frac{1}{p+\lambda_n}y(t)$$

$$+\beta_1\frac{1}{p+\lambda_1}u(t)+\cdots+\beta_n\frac{1}{p+\lambda_n}u(t) \quad (\text{A. 1. 6})$$

を得る。いま

$$\theta=[\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n \ \beta_1 \ \cdots \ \beta_n]^T$$

$$\omega(t)=\left[\frac{1}{p+\lambda_1}y(t) \ \cdots \ \frac{1}{p+\lambda_n}y(t) \ \frac{1}{p+\lambda_1}u(t) \ \cdots \ \frac{1}{p+\lambda_n}u(t)\right]^T \quad (\text{A. 1. 7})$$

とおけば(1)式が得られる。後者のほうが $\omega(t)$ の各成分が均等化される点望ましい。

〈付録 2〉

$$\tilde{\theta}(t)=\left[\int_0^t \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\right]^{-1}\cdot\int_0^t \omega(\tau)y(\tau)d\tau \quad (4)$$

より

$$\left[\int_0^t \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\right]\tilde{\theta}(t)=\int_0^t \omega(\tau)y(\tau)d\tau \quad (\text{A. 2. 1})$$

これを t で微分して

$$\omega(t)\omega^T(t)\tilde{\theta}(t)+\left[\int_0^t \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\right]\dot{\tilde{\theta}}(t)=\omega(t)y(t)$$

あるいは

$$\left[\int_0^t \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\right]\dot{\tilde{\theta}}(t)=-\omega(t)[\omega^T(t)\tilde{\theta}(t)-y(t)]$$

$$=-\omega(t)[\tilde{y}(t)-y(t)]$$

$$=-\omega(t)\varepsilon(t) \quad (\text{A. 2. 2})$$

これより(7)式を得る。

〈付録 3〉 リセット時における推定パラメータの初期値の設定について

この例題では、パラメータの真値は $[a_1(t) \ a_2 \ b_1 \ b_2]^T$ であって、リセットをしてからの経過時間を τ とすると、 $a_1(t)$ の推定は $\tilde{a}_{10}(t)+\tilde{a}_{11}(\tau)\tau+\tilde{a}_{12}(\tau)\tau^2$ という形で行われている。1 区間 T (この例題では $T=2$) の終りで

$$\tilde{a}_1(T)=\tilde{a}_{10}(T)+\tilde{a}_{11}(T)T+\tilde{a}_{12}(T)T^2$$

$$\dot{\tilde{a}}_1(T)=\tilde{a}_{11}(T)+\tilde{a}_{12}(T)\cdot 2T$$

となっている。 $\tilde{a}_1(t)$ と $\dot{\tilde{a}}_1(t)$ を接続させるというのは新しい区間の $\tilde{a}_1(0)$ を前の区間の終りの $\tilde{a}_1(T)$ に等しく、また $\dot{\tilde{a}}_1(0)$ を前の区間の終りの $\dot{\tilde{a}}_1(T)$ に等しくとることである。よって

$$\tilde{a}_{10}(0)=\tilde{a}_{10}(T)+\tilde{a}_{11}(T)T+\tilde{a}_{12}(T)T^2$$

$$\tilde{a}_{11}(0)=\tilde{a}_{11}(T)+\tilde{a}_{12}(T)\cdot 2T$$

とする。他の推定値に関する初期値は単なる接続でよい。すなわち $\tilde{a}_{12}(0)=\tilde{a}_{12}(T)$, $\tilde{a}_2(0)=\tilde{a}_2(T)$, $\tilde{b}_1(0)=\tilde{b}_1(T)$, $\tilde{b}_2(0)=\tilde{b}_2(T)$ とする。