ペトリネットにおける無競合なプレースの存在と 行列方程式の解の発火可能性[†]

平石 邦彦*・市川 惇信**

Conflict-Free Places and Fireability of a Solution of Matrix Equation in Petri Net

Kunihiko HIRAISHI* and Atsunobu ICHIKAWA**

Non-negative integer solutions of a matrix equation of a Petri net play an important role in the analysis of the reachability of the net. A solution x of the matrix equation is expressed as $x = \alpha + \beta$ where α is a non-negative integer solution of the matrix equation and β is a solution of the homogeneous equation. Number of solutions of the matrix equation is, therefore, infinite in general and this causes serious difficulty in examining whether or not any of the solutions has fireable sequence. The difficulty will be considerably relieved if the condition is found under which the solution α has fireable sequence when the solution $\alpha + \beta$ has fireable sequence. This paper gives a sufficient condition, that some places specified by the solutions α and β are to be either forward or backward conflict-free places. This condition, though sufficient, is very much weaker than those previously obtained, that the net is structurally conflict-free, in other words, all the places of the net are to be conflict-free.

Key Words: discrete event system, Petri nets, conflict-free, reachability

1. はじめに

近年、シーケンス制御、オフィス業務、並列計算、知識表現などの離散事象のモデル化にペトリネットの

有用性が指摘されている^{1),2)}。ペトリネットの解析において最も本質的な問題は、ペトリネットを初期マーキングから目標マーキングに推移させる可達問題である。他の多くの重要な問題が可達問題に帰着できることが明らかにされている³⁾。

ペトリネットを行列表現したときの行列方程式の非負整数解の存在は可達問題の解決に一つの手掛りを与えるが、その解が発火可能系列をもつかどうかについては、マークグラフ³⁾、無競合ペトリネット⁴⁾について必要十分条件が得られているが、それ以外については未検討である。

行列方程式の解の発火可能性を検討するときには、ペトリネット全体について考える必要はない。解の零でない成分に対応するトランジションおよびそれに接続するプレースの集合からなる部分ネットを考察すればよい。したがって、部分ネットのもつ構造的性質と行列方程式の解との関係を考察することは有用である。

行列方程式の解が発火可能な系列をもつかどうかを判定するうえでの本質的な問題は、マーキングを変化させないような非負整数解、すなわち、斉次方程式の非負整数解、の存在にある。行列方程式のある非負整数解が発火可能系列をもたないとき、これに斉次方程式の解を加えて得られる行列方程式の解が発火可能系列をもつ可能性がある。斉次方程式の極小な解は有限個であるが、それを無限回加えることはできるので、無限個の解について発火可能系列をもつかどうかを調べる必要がある。

無競合ペトリネットにおいては、行列方程式の極小非負整数解が発火可能系列をもたなければ、これに斉次方程式の解を加えた解も発火可能系列をもたないことが明らかにされており^{5),6)}、解が発火可能な発火系列をもつための必要十分条件を求めるうえできわめて

* 第24回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭60・7)

* 富士通(株)国際情報社会科学研究所 沼津市宮本 140

** 東京工業大学大学院総合理工学研究科
横浜市緑区長津田町 4259

* International Institute of Advanced Study of
Social Information Science, Fujitsu, Numazu

** Graduate School at Nagatsuta, Tokyo Institute
of Technology, Yokohama

(Received April 26, 1985)

(Revised March 5, 1986)

有用な役割を果たしている⁴⁾。本論文では、より一般的なペトリネットについて、この性質を考察した結果を報告する。

2. 準備

ペトリネット構造を4項組 $C=(P, T, B^+, B^-)$ で表わし、ペトリネットを5項組 $M=(C, m)$ で表現する。ここで、 P はプレースの有限集合、 T はトランジションの有限集合、 $B^+=[b_{ij}^+]$ はトランジションからプレースへの接続を表わす入力接続行列、 $B^-=[b_{ij}^-]$ はプレースからトランジションへの接続を表わす出力接続行列、 $m: P \rightarrow N$ はマーキングである。

ペトリネットのマーキングの推移はつぎの推移方程式と発火制約式で記述される。

$$m(k+1)=m(k)+Be[i] \quad (1)$$

$$m(k)-B^-e[i] \geq 0 \quad (2)$$

ここで、 $k=0, 1, 2, \dots$ は推移が生起する離散時刻、 $e[i]$ は第 i 成分が1である単位ベクトル、 $B=B^+-B^-$ である。

トランジションの零でない任意の長さの系列を発火系列という。発火系列を単に系列ということもある。発火系列の集合に長さ零の系列を加えたものを T^* とする。発火系列 $\sigma \in T^*$ の発火回数ベクトルを $\phi(\sigma)$ と書く。発火系列の間の演算である shuf をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} \text{shuf}(X, Y) &= \{x_1y_1x_2y_2 \cdots x_ny_n \mid \\ &X = x_1x_2 \cdots x_n, Y = y_1y_2 \cdots y_n, \\ &x_i, y_i \in T^*\} \end{aligned} \quad (3)$$

発火系列を $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_r, \sigma \in T^*$ とするとき、 m^0 から $\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_r$ と順次発火可能であるならば、 σ は m^0 で発火可能であるという。このとき、 σ の発火により、状態は m^0 から

$$m^T = m^0 + B \sum_{i=1}^r \phi(\sigma_i) \quad (4)$$

に推移する。これを $m^0 \xrightarrow{\sigma} m^T$ と書く。

マーキング m^0 において発火可能なすべての発火系列の発火により実現されるマーキングの集合を可達集合といい、 $R(C, m^0)$ で表わす。また、 $R(C, m^0)$ に属するマーキングは m^0 から可達であるという。

つぎのことは明らかである。

《定理1》 m^T が m^0 から可達であるならば、

$$\Delta m = m^T - m^0 = Bx \quad (5)$$

を満たす非負整数ベクトル解 x が存在する。◇

以後、(5)式をペトリネットの行列方程式、その非負整数ベクトル解を単に解という。解 x は、 m^0 を m^T に推移させる発火系列の発火回数ベクトルとなってい

る。よく知られているように、(5)式の解は、(5)式を満たす極小の解、 $s_a, a=1, 2, \dots, n$ と斉次方程式 $0=Bx$ の解 $h_b, b=1, 2, \dots, m$ の和として、

$$x = s_a + \sum_{b=1}^m k_b h_b, a=1, 2, \dots, n \quad (6)$$

と表わされる。ここで、 k_b は任意の非負整数係数である。極小解 s および h の個数は有限であるが、(6)式で表わされる解 x の個数は一般には無限である。

解 x が $\phi(\sigma)=x$ となる発火可能な系列 σ をもつとき、解 x が発火可能系列をもつ、あるいは、解 x が発火可能である、という。

(6)式で表わされる解の任意の一つを

$$x = \alpha + \beta \quad (7)$$

と書く。ここで、 α は(6)式の第1項を含むいくつかの項の和であり、 β は残りの項の和である。当然のことながら、 α は行列方程式の解であり、 β は斉次方程式の解となる。

行列方程式の解 x が発火可能かどうかを検討するときには解 x の正成分に対応するトランジションの発火可能性だけを考えればよい。このため、 $M=(C, m)$ において、行列方程式の解に対応する部分ネットを定義する。

〔行列方程式の解に対応する部分ネット〕 ペトリネット $M=(C, m)$ について、つぎで定義される部分ネットを行列方程式の解 x に対応する部分ネットという。

$$M_x = (C_x, m_x) = (P_x, T_x, B_x^+, B_x^-, m_x) \quad (8)$$

ここで、 $T_x = \{t_i \mid t_i \in T, x_i > 0\}$ 、 $P_x = \{p_k \mid p_k \in P, (\exists t_i \in T_x)(b_{ki}^- > 0)\}$ 、 B_x^+ 、 B_x^- および m_x は、それぞれ、 B^+ 、 B^- 、 m の P_x 、 T_x への射影である。◇

行列方程式の解の発火可能性を検討するとき、無競合なプレースの存在は重要な役割を果たす。

〔無競合プレース〕 あるプレースの出力トランジションがたかだか一つであるとき、そのプレースは構造的に前向け無競合であるという。すべてのプレースが構造的に前向け無競合であるペトリネットを構造的に前向け無競合なペトリネットという。あるプレースの入力トランジションがたかだか一つであるとき、そのプレースは構造的に後向け無競合であるという。すべてのプレースが構造的に後向け無競合なペトリネットを構造的に後向け無競合なペトリネットという。なお、以下の記述においては、「構造的に」を省略する(注1)。

(注1) プレースは構造的に無競合でないときにも、そのトークンの数によっては出力トランジションが互いに競合しないことがある。これが「挙動的」無競合である。本論文では、「挙動的」無競合は考慮に入れないので、「構造的」を省略する。

〔トラップ〕 プレースの部分集合 $Q \subset P$ を考える. Q に少なくとも一つの入力プレースをもつすべてのトランジションが, Q に少なくとも一つの出力プレースをもつとき, Q をトラップという. ◇

トークンが存在するトラップは, いかなるトランジションの発火によっても, トークンを完全に失うことはない.

〔デッドロック〕 プレースの部分集合 $Q \subset P$ を考える. Q に少なくとも一つの出力プレースをもつすべてのトランジションが, Q に少なくとも一つの入力プレースをもつとき, Q をデッドロックという. ◇

トークンをもたないデッドロックは, いかなるトランジションの発火によっても, 再びトークンをもつことはない.

3. 行列方程式の解の発火可能性

行列方程式の解が発火可能な系列をもつかどうかを判定するときに, つぎの命題は重要な役割を果たす.

〔命題 1〕 ペトリネット $M=(C, m)$ において, $m^0 \xrightarrow{\sigma} m^T$, $\phi(\sigma)=\alpha+\beta$ ならば, $m^0 \xrightarrow{\nu} m^T$, $\phi(\nu)=\alpha$ であるような発火系列 ν が存在する. ここで, α は行列方程式 $\Delta m = m^T - m^0 = Bx$ の解, β は斉次方程式 $0 = Bx$ の解である. ◇

3.1 無競合な部分ネット

任意の α, β について〔命題 1〕が成立するならば, 行列方程式の極小な解が発火可能系列をもたないとき, 発火可能系列をもつ解は存在しないことになる. 極小な解の個数は有限であるので, 可達問題は有限の手続きで解ける. このことは, 前向け無競合ペトリネットについては保証されている⁹⁾.

《定理 2》 前向け無競合なペトリネットにおいて, 任意の α, β について, 〔命題 1〕が成立する. ◇

前向け無競合なペトリネットであることは, 〔命題 1〕が成立するための十分条件である. とくに, α はペトリネットの構造および与えられた初期マーキングと目標マーキングにより定まる行列方程式の解であり, β はペトリネットの構造から定まる斉次方程式の解であることを考慮すれば, より一般的なペトリネットについて, 〔命題 1〕が成立することが期待できる.

直ちにわかることは, ペトリネット全体が前向け無競合である必要はなく, 与えられた α, β について, $\alpha+\beta$ に対応する部分ネット $M_{\alpha+\beta}$ が前向け無競合なペトリネットであればよいことである. よって, つぎの系を得る.

〔系 1〕 ある α , および, ある β に対し, $\alpha+\beta$ に対応する部分ネット $M_{\alpha+\beta}$ が前向け無競合であるなら

ば, その α, β について, 〔命題 1〕が成立する. ◇

部分ネット $M_{\alpha+\beta}$ が前向け無競合であるときには, $M_{\alpha+\beta}$ の部分ネット M_α も前向け無競合である. よって, 〔系 1〕と〔命題 1〕を繰返し適用することにより, つぎの系が得られる.

〔系 2〕 行列方程式のある解 α が発火可能な系列をもち, かつ, α に対応する部分ネット $M_\alpha=(C_\alpha, m_\alpha)$ が前向け無競合であるならば, 解 α に含まれる極小解 s は発火可能系列をもつ. ◇

3.2 前向け無競合なプレース

部分ネット $M_{\alpha+\beta}$ のすべてのプレースが前向け無競合である必要はない. α と β では, ペトリネットに対する作用が異なるからである. $\phi(\sigma)=\beta$ を満たす発火系列 σ を発火させてもマーキングは変化しないことから, つぎの補題が成立する.

〔補題 1〕 ペトリネット $M=(C, m)$ の斉次方程式 $0=Bx$ の解 β に対応する部分ネット M_β において, すべてのプレースは入力トランジションと出力トランジションをもつ. ◇

(証明) 部分ネットのトランジションは, 定義により少なくとも 1 回は発火する. したがって, あるプレースが入力トランジションのみ, または, 出力トランジションのみをもつならば, そのトークン数は $\phi(\sigma)=\beta$ を満たす発火系列 σ の発火により変化することになる. ◇

すなわち, 部分ネットに属するプレースはその入力または出力トランジションが T_α に属するか, T_β に属するかにより, 区別して取り扱うことが可能になりつぎの定理が得られる.

《定理 3》 部分ネット $M_{\alpha+\beta}$ のプレース p_k が T_α に属する出力トランジションをもち, かつ, T_β に属する入出力トランジションをもつときに,

〈条件 1〉 p_k は $M_{\alpha+\beta}$ において前向け無競合なプレースである,

〈条件 2〉 p_k は T_α に属する入力トランジションをもたない,

のいずれかが成り立つならば, 〔命題 1〕が成立する. ◇

なお, この定理および以下の定理において, p_k が T_β に属する入出力トランジションをもたないときには, 定理の前提は成立しているものとする.

(証明) 発火系列 σ を, $\sigma \in \text{shuf}(\nu, \xi)$, $\phi(\nu)=\alpha$, $\phi(\xi)=\beta$ となるような二つの発火系列 ν と ξ に分解する. このとき, 一つのトランジションが ν と ξ の両方に属するときには, σ において, ξ に属するものが ν に属するものより前にあるように ν, ξ を選ぶ.

$\nu = \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_{r-1} \nu_r \nu_{r+1} \cdots$ としたとき、 $\nu_r (= t_i)$ が発火可能であることを示す。 ν を ν_r の所で分け、 $\nu = g_1 \cdot \nu_r \cdot g_2$ とする。同様に、 $\sigma = h_1 \cdot \nu_r \cdot h_2$ とする。ここで、 $\phi(g_1) = \alpha^1$ 、 $\phi(h_1) = \alpha^1 + \beta^1$ 、 $\phi(g_2) = \alpha^2$ 、 $\phi(h_2) = \alpha^2 + \beta^2$ とおく。 ν_r は σ において発火可能であるから、 t_i の任意の入力プレース p_k について、

$$m_k^0 + \sum_j b_{kj}(\alpha_j^1 + \beta_j^1) - b_{ki} \geq 0 \quad (9)$$

が成立している。もし、

$$m_k^0 + \sum_j b_{kj} \alpha_j^1 - b_{ki} \geq 0 \quad (10)$$

が成立するならば、 ν において ν_r は発火可能である。

1) p_k が〈条件 1〉を満たす場合

p_k が T_β に属する出力トランジションをもたないときには、[補題 1] より、 p_k は T_β に属する入力トランジションをもたないので、(10)式が成立する。 p_k が T_β に属する出力トランジションをもつときには、〈条件 1〉からその出力トランジションは $M_{\alpha+\beta}$ において t_i だけである。このとき、 ν の作り方から $\beta_i^1 = 0$ 、 $\beta_j^1 \geq 0$ ($j \neq i$) が成り立ち、また、 $\beta = \beta^1 + \beta^2$ であるから、

$$\sum_j b_{kj} \beta_j^1 = - \sum_{j \neq i} b_{kj} \beta_j^1 \leq 0 \quad (11)$$

となる。(9)式と(11)式から(10)式が成立する。

2) p_k が条件 2 を満たす場合

α は行列方程式の解であるから、

$$m_k^0 + \sum_j b_{kj} \alpha_j^1 + b_{ki} + \sum_j b_{kj} \alpha_j^2 = m_k^T \geq 0 \quad (12)$$

が成り立つが、〈条件 2〉より、 $\sum_j b_{kj} \alpha_j^2 \leq 0$ 、 $b_{ki} = -b_{ki}$

であるから、(10)式が得られる。◇

3.3 後向け無競合なプレース

同様な定理が後向け無競合なプレースについて成立する。

《定理 4》部分ネット $M_{\alpha+\beta}$ のプレース p_k が T_α に属する出力トランジションをもち、かつ、 T_β に属する入出力トランジションをもつときに、

〈条件 3〉 p_k は $M_{\alpha+\beta}$ において後ろ向け無競合なプレースである、

〈条件 2〉 p_k は T_α に属する入力トランジションをもたない、

のいずれかが成り立つならば、[命題 1] が成立する。◇

(証明) 発火系列 σ を、 $\sigma \in \text{shuf}(\nu, \xi)$ 、 $\phi(\nu) = \alpha$ 、 $\phi(\xi) = \beta$ であるような二つの発火系列 ν 、 ξ に分解する。このとき、一つのトランジションが ν と ξ の二つの系列に属するときには、 σ において ξ に属するものが ν に属するものより後方にくるように ν 、 ξ を選ぶ。 $\nu = \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_{r-1} \nu_r \nu_{r+1} \cdots$ としたときに $\nu_r = t_i$ が

発火可能となることを証明する。(9)式が成立すること、および $\nu_r = t_i$ の発火条件である(10)式は《定理 3》の証明に同じである。さらに、 p_k が〈条件 2〉を満たす場合に(10)式が成立することも《定理 3》の証明に同じである。

p_k が〈条件 3〉を満たす場合を考える。 p_k が T_β に属する入力トランジションをもたないときには、(10)式が成り立つことは明らかである。 p_k が T_β に属する入力トランジションをもつときには、〈条件 3〉から、 $M_{\alpha+\beta}$ においてそれだけが入力トランジションである。これを、 t_s とする。

a) $\beta_i^1 > 0$ の場合： α は行列方程式の解なので、(12)式が成り立つが、 ν の作り方から $\alpha_i^2 = 0$ となるので、

$$\sum_j b_{kj} \alpha_j^2 = b_{ki} \alpha_i^2 + \sum_{j \neq s} b_{kj} \alpha_j^2 \leq 0 \quad (13)$$

である。また、 $t_s = t_i$ であるとする、 ν の作り方に反するので、 $t_s \neq t_i$ であり、したがって、 $b_{ki} = -b_{ki}$ である。このことから、(10)式が成り立つ。

b) $\beta_i^1 = 0$ の場合：

$$\sum_j b_{kj} \beta_j^1 = b_{ki} \beta_i^1 + \sum_{j \neq s} b_{kj} \beta_j^1 \leq 0 \quad (14)$$

である。(11)式と(14)式から(10)式が得られる。◇

《定理 4》から直ちに下記の系を得る。

[系 2] 後向き無競合ペトリネットにおいては、任意の α 、 β について、[命題 1] が成立する。◇

3.4 前向け無競合なプレースと後ろ向け無競合なプレースの両方が存在する場合

《定理 3》と《定理 4》の前提条件をあわせた、「部分ネット $M_{\alpha+\beta}$ の $p_k \in P_\alpha$ が〈条件 1〉、〈条件 2〉、または〈条件 3〉のいずれかを満たすならば[命題 1] が成立する」については、つぎの反例が存在する。

[反例] Fig. 1 に示すペトリネットを考える。発火系列 $\sigma = \cdots t_2 t_3 \cdots$ について、発火系列の前のほうを ξ とすると、 p_1 は〈条件 1〉を満たすので、 t_2 は発火可能になるが、 p_2 は〈条件 3〉しか満たさないの、 t_3 の発火可能性は保証されない。◇

一般に、部分ネット $M_{\alpha+\beta}$ において、〈条件 1〉しか満たさないプレースから、有向路に沿ってその上の P_α に属するプレースをたどっていった先に、〈条件 3〉しか満たさないプレースが存在する場合がある。

Fig. 1 A counter example

上記の反例はこの場合の一つである。このような場合を除外するために、〈条件 4〉をおき、つぎの定理を得る。

《定理 5》 部分ネット $M_{\alpha+\beta}$ のプレース p_k が T_α に属する出力トランジションをもち、かつ、 T_β に属する入出力トランジションをもつときに、

〈条件 3〉 p_k は $M_{\alpha+\beta}$ において後ろ向け無競合なプレースである、

〈条件 2〉 p_k は T_α に属する入力トランジションをもたない、

〈条件 4〉 p_k は $M_{\alpha+\beta}$ において前向け無競合なプレースであり、かつ、 p_k を始点とする M_α の有向路上にあるプレースが T_β に属する入出力トランジションをもつときには $M_{\alpha+\beta}$ において前向け無競合なプレースである、

のいずれかが成り立つならば、[命題 1] が成立する。◇

(証明) 発火系列 σ において発火系列 ξ に属するトランジションをつぎのように選べば m^0 において発火可能な発火系列を作ることができる。

(1) 〈条件 4〉を満たし P_α に属するすべてのプレースについては、その出力トランジションは系列の前のほうを ξ とする、

(2) その他のトランジションは、系列の後ろのほうを ξ とする。◇

4. 考 察

前節においては、ある α , β について [命題 1] の成立を検討した。ここでは、それから得られるいくつかの性質を述べる。最も一般的である、《定理 5》について考察する。

[系 3] ある α および β について、《定理 5》の前提条件が成立するならば、 α から β をすべて取り除いて得られる α' は発火可能系列をもつ。◇

(証明) α が β を含んでいないときには自明である。 α が β を含んでいる場合を考える。 $\alpha = \alpha' + \beta$ とする。《定理 5》から、 $\alpha' + \beta$ は発火可能である。よって、 $\alpha' + \beta$ について、《定理 5》の前提条件が成立するかどうかを検討する。 α と β について《定理 5》の前提条件は成立しているから、 α の部分集合である α' と β についても《定理 5》の前提条件は成立している。これを繰返せば、 β を含まない α' が発火可能であることが示される。◇

[系 3] から、ある斉次方程式の解、 h_i を含んだ $\alpha + h_i = (s_\alpha + \sum_b k_b h_b) + h_i$ について、《定理 5》の前提条件が成立するならば、 h_i を含まない行列方程式の解

$s_\alpha + \sum_{b \neq i} k_b h_b$ が発火系列をもつことは明らかである。

また、ある行列方程式の非負整数解 s_α が発火可能系列をもたないとき、これにある斉次方程式の解 h_i を加えた解が《定理 5》の条件を満足するならば、 $s_\alpha + k h_i$, $k=2, 3, \dots$ について発火可能性を調べる必要はない。

これらのことから、つぎに示す二つのアルゴリズムが得られる。[アルゴリズム 1] は発火可能な系列が既知のときに、斉次方程式の解を用いて、発火可能な極小な系列を求めるものである。[アルゴリズム 2] は、行列方程式の極小解および斉次方程式の解から発火可能な系列を探索するものである。

[アルゴリズム 1]

1) 発火可能な系列 σ の発火回数ベクトルを x とする。

2) 斉次方程式の解 h_b , $b=1, 2, \dots, m$ について、 $x \geq h_b$ となる h_b を見出す。このような h_b が存在しなければ、 σ は極小解であり、アルゴリズムは終了する。

3) $x \geq h_b$ である h_b を β とし、 x と β について《定理 5》の前提条件が成立するかどうか調べる。成立するときには、 $x' = x - n\beta$ を求める。ここで、 n は x' が非負整数ベクトルであるような最大の非負整数である。 $x = x'$ として、ステップ 1) に戻る。成立しないときにはステップ 4) に進む。

4) すべての h_b についてステップ 3) が終了していれば、アルゴリズムは終了する。そうでないときはステップ 2) に戻る。◇

このアルゴリズムがステップ 2) で終了したときには、得られた系列は発火可能な極小の系列である。ステップ 4) で終了したときには、その保証はない。

[アルゴリズム 2]

1) 極小解 s_a , $a=1, 2, \dots, n$ について、発火可能であるかどうかを調べる。発火可能なものが存在すればアルゴリズムは終了する。

2) 発火不能な極小解 s_a と斉次方程式の解 h_b について《定理 5》の前提条件を満たすものがあれば、その s_a と h_b の対を削除する。これをすべての s_a と h_b の対について繰返す。すべての s_a と h_b が削除されたならばアルゴリズムは終了する。このとき、発火可能な系列は存在しない。

3) ステップ 2) で削除されなかった s_a と h_b の組合せについて $x = s_a + \sum k_b h_b$ の発火可能性を調べる。◇

《定理 5》によらないときには、すべての極小解

とすべての斉次方程式の解 h_b の組合せについて、 $x = s_a + \sum k_b h_b$ を調べる必要がある。したがって、[アルゴリズム 2] ではステップ 2) で削除される s_a と h_b の組合せの数だけ調べるべき個数が減少する。この減少個数はペトリネットの構造に依存するので、《定理 5》の条件を満たす部分ネットがもつ構造を検討する。

《定理 6》《定理 5》の条件を満たすペトリネット $M_{\alpha+\beta}$ において、 M_α のサーキットのうち、 P_β に属するプレースを含むものは、トラップまたはデッドロックである。◇

(証明) 部分ネット M_α におけるサーキットのうち、 P_β に属するプレースを含むサーキットを考える。その一つを c_i とする。 c_i 上の P_β に属するプレース $p_k \in P_\beta$ を考える。 c_i は M_α 上のサーキットであるから、 c_i 上のプレースは T_α に属する入力トランジションをもち、したがって、《条件 2》を満たさない。よって、 c_i の $M_{\alpha+\beta}$ における構造を《条件 4》について調べる。

1) p_k が《条件 4》を満たす場合

c_i 上の任意のプレースは P_α に属するので、《条件 4》を満たす。 p_k は T_β に属する入出力トランジションをもつから、《条件 1》から、 $M_{\alpha+\beta}$ において、その出力トランジションは一つだけで、それは T_β にも属する。そのトランジションを t_i とすれば、 t_i の c_i 上の出力プレース p_j においても同様のことがいえる。結局、 $M_{\alpha+\beta}$ において、 c_i 上の任意のプレースの出力トランジションは唯一つになり、 c_i 上のプレースの集合はトラップとなる。

2) p_k が《条件 4》を満たさない場合

c_i 上の任意のプレースから c_i 上のプレースを順次たどれば p_i に到達できるので、 c_i 上の p_k 以外の任意のプレースも《条件 4》を満たさない。 p_k は T_β に属する入出力トランジションをもつから、《条件 3》から、 $M_{\alpha+\beta}$ において、その入力トランジションは一つだけで、それは T_β にも属する。そのトランジションを t_i とすると、 t_i の c_i 上の入力プレース p_j においても同様のことがいえる。したがって、 $M_{\alpha+\beta}$ において、 c_i 上の任意のプレースの入力トランジションは一つだけになり、 c_i 上のプレースの集合はデッドロックとなる。◇

【例題】《定理 5》が成立する例を示す。Fig. 2 に示すペトリネットを考える。このペトリネットは構造的に前向きあるいは後ろ向き無競合ではない。初期マーキングを $m^0 = (0120)'$ 、目標マーキングを $m^T = (1010)'$ とすれば、行列方程式 $\Delta m = Bx$ の極小の非

Fig. 2 Illustrative example

負整数解は $\alpha = (1011)'$ であり、斉次方程式 $0 = Bx$ の解は $\beta = (1111)'$ である。

m^0 においてつぎの発火系列 σ は発火可能である。

$$\sigma = t_1 t_2 t_3 t_4 t_1 t_2 t_3 t_4, \quad \phi(\sigma) = \alpha + \beta$$

また、 $P_\alpha = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ である。

このペトリネットについて部分ネット $M_{\alpha+\beta}$ は $\alpha = (1011)'$ 、 $\beta = (1111)'$ について、《条件 3》を満たしている。よって、 α は発火可能な系列をもつ。

系列 σ から系列 ν をつぎのように作る。 p_1, p_2 は《条件 3》を満たすので、 t_1, t_2 は系列の後ろのほうを ν とし、 p_3, p_4 は《条件 4》を満たすので、 t_3, t_4 は系列の前のほうを ν とする。このようにして、作られた系列 $\nu = t_1 t_3 t_4$ 、 $\phi(\nu) = \alpha$ もまた、 m^0 において発火可能である。

5. あとがき

本論文においては、行列方程式の解 α と斉次方程式の解 β について、 $\alpha + \beta$ が発火可能な系列をもつときに、 α が発火可能系列をもつための十分条件を明らかにした。これらは十分条件ではあるが、行列方程式の解の発火可能性を判定するうえで、計算の手間を著しく減少させる。今後はこれらの十分条件をさらに必要条件に近づける努力が必要である。

参考文献

- 1) J. L. Peterson: Petri Net Theory and the Modeling of Systems, Prentice Hall (1981)
- 2) 市川, 小林: 事象駆動型システムの表現と制御, 計測と制御, 21-10, 929/940 (1982)
- 3) T. Murata: Circuit Theoretic Analysis and Synthesis of Marked Graphs, IEEE Trans. on Circuit and System, CAS-24-7, 400/405 (1977)
- 4) 市川, 横山, 黒木: 事象駆動システムの制御—無競合ペトリネットの可達性の必要十分条件—, 計測自動制御学会論文集, 21-4, 324/330 (1985)
- 5) L. H. Landweber and E. L. Robertson: Properties of Conflict-Free and Persistent Petri Net, ACM-25-3, 352/364 (1978)
- 6) S. Crespi-Reghizzi and D. Mandoriori: A Decidability Theorem for a Class of Vector Addition Systems, Inf. Proc. Lett., 3-3 (1975)