改良形の被覆モンテカルロ法による システム故障確率の評価

熊 本 博 光*・田 中 庸 彦**・井 上 紘 一*

A New Coverage Monte Carlo Method for Evaluating System Failure Probability

Hiromitsu KUMAMOTO*, Tsunehiko TANAKA** and Koichi INOUE*

This paper proposes a new "Coverage Monte Carlo" for evaluating a failure probability of a system described by a monotonic Boolean function. All the minimal cut sets are assumed to be known. It is first clarified that the Karp-Luby's coverage Monte Carlo evaluates effects of the second and the higher terms of an inclusion-exclusion formula. The first and the second terms, however, can often be calculated by ordinary, deterministic algorithms, and thus the new Monte Carlo is derived to evaluate only contributions of the third and the higher terms. The Monte Carlo estimate always falls in between the known upper (the first term) and lower (the first minus the second term) bounds. It is proven that the proposed Monte Carlo estimator has a smaller variance than the Karp-Luby estimator under reasonable assumptions. The estimator variance and the coefficient of variation can be evaluated before and after Monte Carlo executions. In contrast to the direct Monte Carlo, the coefficient of variation is proven to approach to zero as the system becomes more reliable and hence rare-event characteristics become more dominant. A numerical example is given.

Key Words: Monte Carlo method, system reliability, variance reduction technique, coverage Monte Carlo, inclusion-exclusion formula

1. 緒 言

本論文では、単調な論理関数で記述されたシステムに対し、その故障確率の計算を考える。この問題は論理関数の期待値計算に帰着され、NP-hard になることが知られている¹⁾。すなわち、通常の決定論的方法で厳密解を求めようとすると、システム要素数とともに計算量が指数関数的に増大してしまう。含意-排除公式 (inclusion-exclusion formula)¹³⁾や Esary-Prochan²⁾ によるシステム故障確率の上限・下限評価があるが、これらの上下限の精度を知る手段が見当らない。また、必ずしも良好な近似が得られるとは限らない。

近年、システム故障確率の計算に、決定論的方法ではなく、モンテカルロ法を用いる研究がなされている。モンテカルロ法は、複数個の独立な試行に基づいて解を得るので、並列プロセッサの出現とともに、その利用価値は一層高まりつつある。しかしながら、現実のシステムは高い信頼性をもつことが多く、システムの故障はいわゆる希有事象 (rare event) となる。このため、直接的モンテカルロ法では精度のよい評価を期待できず、従来の研究においても分散減少法 (variance reduction technique) の適用が中心課題となっていた。

Van Slyke (1972) らは、故障する要素の数で要素状態ベクトルを分類し、層別サンプリングを適用している³⁾。Kumamoto らは、標本発生領域の縮小による加重サンプリング (1977)⁴⁾、構造関数の単調性に基づく負相関法 (1980)⁵⁾、隠れマルコフ連鎖上での解析的期待値操作 (1980)⁶⁾ を用いている。Easton (1980) らは、ランダム順列に基づく逐次破壊法 (sequential destruction method) を提案している⁷⁾。このほか、Fishman による研究がある^{8), 9)}。

* 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

** 日本 IBM (株)サイエンス・インスティテュート
東京都千代田区三番町 5-19

* Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto

** IBM Japan Corp., Science Institute, Chiyoda-ku, Tokyo

(Received November 5, 1985)

(Revised May 9, 1986)

最近, Karp & Luby は, システムの最小カットがすべて既知であるという条件下で, 被覆 (coverage) モンテカルロという興味深い手法を考案している¹⁰⁾. 後で明らかにするように, これは含意-排他公式の第 2 項以降を, モンテカルロで評価しようとするものである. ところで, 含意-排他公式の第 2 項までは, 通常の計算で求められる場合が多い. そこで本論文では, 第 3 項以降の寄与だけを評価するような被覆モンテカルロ法を提案する.

2 節では問題を記述する. 3 節では, 以後の議論の展開のため, Karp-Luby 法について述べる. 新たな被覆モンテカルロ法を 4 節で与える. 5 節では, 両者のモンテカルロ法の精度を比較するとともに, 提案した手法の事前と事後の誤差評価法を与える. 6 節は数値例である.

2. 問題の記述

2.1 仮定

1) システムおよび要素は, 正常あるいは故障のいずれかの状態をとる. なお, 正常状態を真理値の 0 で, 故障状態を真理値の 1 で表わす.

2) システムの状態は要素の状態の単調増加論理関数である. すなわち, 要素が故障することによって, システムが故障から正常状態に復帰することはない. なお, すべての要素が正常なときは, システムも正常であるとする.

3) 要素の状態は互いに独立な確率変数である.

4) 要素の故障確率は正であり, 1 未満である.

5) システムのすべての最小カットが既知である. ここに最小カットとは, システムが故障するために故障すべき, 必要十分な要素の集合である.

2.2 記法

n , システム要素の総数.

$\mathbf{x}$, $(x_1, \dots, x_n)$, 要素の状態ベクトル.

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{要素 } i \text{ が正常,} \\ 1, & \text{要素 } i \text{ が故障.} \end{cases} \quad (2.1)$$

$\mathbf{b}$, $(b_1, \dots, b_n)$, n 次元 0-1 ベクトル.

$\phi(\mathbf{b})$, システムの構造関数. すなわち, 要素の状態ベクトルとシステム状態との関係を表わす論理関数.

$$\phi(\mathbf{b}) = \begin{cases} 0, & \text{システムが正常,} \\ 1, & \text{システムが故障.} \end{cases} \quad (2.2)$$

m , 最小カットの総数.

C_j , 最小カット j の別称, $(j=1, \dots, m)$

$\mathbf{a}_j$, $(a_{1j}, \dots, a_{nj})$, 最小カット C_j の定義ベクトル.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{要素 } i \text{ が } C_j \text{ に属する,} \\ 0, & \text{要素 } i \text{ が } C_j \text{ に属さない.} \end{cases} \quad (2.3)$$

$g_j(\mathbf{b})$, 最小カット C_j の定義関数. 一つの論理関数である. 構造関数 $\phi(\mathbf{b})$ は $g_j(\mathbf{b})$, $j=1, \dots, m$ の論理和となる.

$$g_j(\mathbf{b}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{b} \geq \mathbf{a}_j \text{ のとき,} \\ 0, & \text{上記以外} \end{cases} \quad (2.4)$$

$\alpha(\mathbf{b})$, ベクトル $\mathbf{b}$ の被覆 (coverage) 数, 非負の整数.

$$\alpha(\mathbf{b}) = \sum_{j=1}^m g_j(\mathbf{b}) \quad (2.5)$$

X_k , 被覆数が k 以上のベクトル $\mathbf{b}$ の集合.

$$X_k = \{\mathbf{b} | \alpha(\mathbf{b}) \geq k\} \quad (2.6)$$

q_i , $Pr\{x_i=1\}$, 要素 i の故障確率.

Q_s , $Pr\{\phi(\mathbf{x})=1\}$, システムの故障確率.

Q_1 , 含意-排他公式の第 1 項.

$$Q_1 = \sum_{j=1}^m Pr\{C_j\} \quad (2.7)$$

Q_2 , 含意-排他公式の第 2 項.

$$Q_2 = \sum_{j=1}^m \sum_{k>j}^m Pr\{C_j \cap C_k\} \quad (2.8) \text{ (注1)}$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{k>j}^m \left[\prod_{i \in C_j \cup C_k} q_i \right] \quad (2.9)$$

Q_3 , 含意-排他公式の第 3 項.

$$Q_3 = \sum_{j=1}^m \sum_{k>j}^m \sum_{l>k}^m Pr\{C_j \cap C_k \cap C_l\} \quad (2.10)$$

$$\Delta Q_s, Q_1 - Q_s, \text{ 上限 } Q_1 \text{ の真値 } Q_s \text{ からの偏差.} \quad (2.11)$$

N , モンテカルロ法の標本数.

~, 左辺が右辺の確率に従う独立な標本であることを示す.

2.3 問題の記述

問題はシステムの故障確率

$$Q_s = Pr\{\phi(\mathbf{x})=1\} \quad (2.12)$$

$$= \sum_{\mathbf{b}} \phi(\mathbf{b}) Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\} \quad (2.13)$$

のモンテカルロ法による評価である. ここで直接的モンテカルロ法について触れておく. (2.13) 式は $\mathbf{b} \sim Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\}$ のときの関数 $\phi(\mathbf{b})$ の期待値であり, Q_s の不偏推定量として

$$Q_{s,D} = N^{-1} \sum_{v=1}^N \phi(\mathbf{b}_v), \quad \mathbf{b}_v \sim Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\} \quad (2.14)$$

を得る. 推定誤差分散は $Var\{Q_{s,D}\} = N^{-1}Q_s(1-Q_s)$ となり, 変動係数 $\sqrt{Var\{Q_{s,D}/Q_s\}}$ は, Q_s が零に近づくとともに無限大に発散する. 希有事象に対して直接的モンテカルロ法が使えないゆえんである^{4),7)}.

3. Karp-Luby の被覆モンテカルロ

4 節以降の議論の展開のため, 本論文の記法を用

(注 1) 右辺の確率はカット j と k の同時発生確率を意味する.

い、もとの文献¹⁰⁾とは異なった観点から、Karp-Luby法を導出する。集合 X_1 以外では、どの最小カットも生じていず、 $\phi(\mathbf{x})=0$ である。したがって、(2.13)式は

$$Q_S = \sum_{\mathbf{b} \in X_1} Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\} \quad (3.1)$$

と書ける。被覆数 $\alpha(\mathbf{b})$ の定義である (2.5) 式を用いると、上式はつぎのように変形できる。

$$Q_S = \sum_{\mathbf{b} \in X_1} \frac{1}{\alpha(\mathbf{b})} \sum_{j=1}^m g_j(\mathbf{b}) Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\} \quad (3.2)$$

$$= \sum_{\mathbf{b} \in X_1} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\alpha(\mathbf{b})} g_j(\mathbf{b}) Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\} \quad (3.3)$$

いま、 $\mathbf{b} \in X_1$ と最小カット j の新たな結合確率を

$$P_1\{\mathbf{b}, j\} \equiv g_j(\mathbf{b}) Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\} / Q_1 \quad (3.4)$$

で定義する。(2.7)式から明らかなように、

$$Q_1 = \sum_{\mathbf{b} \in X_1} \sum_{j=1}^m g_j(\mathbf{b}) Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\} \quad (3.5)$$

であるので、 Q_1 は確率 P_1 の規格化定数となっている。最小カット j の周辺確率は

$$P_1\{j\} = \frac{1}{Q_1} \sum_{\mathbf{b} \in X_1} g_j(\mathbf{b}) Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\} \quad (3.6)$$

$$= Pr\{C_j\} / Q_1 \quad (3.7)$$

となり、カット j が既知のときの $\mathbf{b}$ の条件付確率は

$$P_1\{\mathbf{b} | j\} = g_j(\mathbf{b}) Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\} / Pr\{C_j\} \quad (3.8)$$

となる。(3.4)式の結合確率で (3.3) 式を書き換えると、

$$Q_S = Q_1 \sum_{\mathbf{b} \in X_1} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\alpha(\mathbf{b})} P_1\{\mathbf{b}, j\} \quad (3.9)$$

$$= Q_1 \cdot E\left\{\frac{1}{\alpha(\mathbf{b})}\right\}, (\mathbf{b}, j) \sim P_1\{\mathbf{b}, j\} \quad (3.10)$$

を得る。

上式から、 Q_S を評価するための Karp-Luby 被覆モンテカルロを得る：

$$Q_{S,1} = N^{-1} Q_1 \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{\alpha(\mathbf{b}_\nu)} \quad (3.11)$$

$$j_\nu \sim P_1\{j_\nu\}, \quad \nu=1, \dots, N \quad (3.12)$$

$$\mathbf{b}_\nu \sim P_1\{\mathbf{b} | j_\nu\}, \quad \nu=1, \dots, N \quad (3.13)$$

(3.12)式は集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 上の離散分布からの標本発生であり、容易に行える。(3.13)式の標本 $\mathbf{b}_\nu = (b_{1,\nu}, \dots, b_{i,\nu}, \dots, b_{n,\nu})$ はつぎのようにして発生できる。

$$b_{i,\nu} = \begin{cases} 1, & i \text{ が最小カット } j_\nu \text{ の要素のとき,} \\ \sim Pr\{x_i = b_i\}, & \text{上記以外} \end{cases} \quad (3.14)$$

すなわち、 i がカット j_ν の要素でないときには、自然な確率 q_i で $b_{i,\nu}=1$ とし、 $1-q_i$ で $b_{i,\nu}=0$ とすればよい。推定量 $Q_{S,1}$ の推定誤差分散は、 $Q_1 < 1$ のとき、直接的モンテカルロ法 $Q_{S,D}$ の推定誤差分散よ

り小さいことがわかっている¹⁰⁾。

4. 改良形の被覆モンテカルロ法

4.1 問題の変形

(3.11)式の Karp-Luby 推定量の右辺に $Q_1 - Q_1 = 0$ を加えると、 $Q_{S,1}$ はつぎのように表現できる。

$$Q_{S,1} = Q_1 - N^{-1} Q_1 \sum_{\nu=1}^N \frac{\alpha(\mathbf{b}_\nu) - 1}{\alpha(\mathbf{b}_\nu)} \quad (4.1)$$

ところで、(2.11)式の偏差 ΔQ_S を用いると、 Q_S は

$$Q_S = Q_1 - \Delta Q_S \quad (4.2)$$

と表わされる。したがって、Karp-Luby 推定量 $Q_{S,1}$ は、偏差 ΔQ_S を (4.1) 式右辺第 2 項の標本平均 $\Delta Q_{S,1}$ で評価し、これと確定量 Q_1 から Q_S を評価していると解することができる。

偏差 ΔQ_S は含意-排他公式の 2 番目以降の項 Q_r , $r=2, \dots, m$ による寄与である。本節では、3 番目以降の寄与だけを求めるようなモンテカルロ法を構築する。もちろん、2 番目までの寄与 $Q_1 - Q_2$ は通常の決定論的計算法で求める。なお、つぎの関係はよく知られている¹³⁾。

$$\left. \begin{aligned} Q_1 - Q_2 &\leq Q_S \leq Q_1 \\ Q_1 - Q_2 + Q_3 &\geq Q_S \\ Q_S &= \sum_{r=1}^m (-1)^{r-1} Q_r \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

(3.5)式は確定項 Q_1 の一つの表現である。(3.3)式の両辺に $Q_1 - Q_1 = 0$ を加えると、

$$Q_S = Q_1 - \Delta Q_S \quad (4.4)$$

における ΔQ_S はつぎのように表現される。

$$\Delta Q_S = \sum_{\mathbf{b} \in X_1} \sum_{j=1}^m \frac{\alpha(\mathbf{b}) - 1}{\alpha(\mathbf{b})} g_j(\mathbf{b}) Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\} \quad (4.5)$$

包含関係 $X_1 \supset X_2$ は明らかであり、任意の $\mathbf{b} \in X_1 - X_2$ に対し、 $\alpha(\mathbf{b})=1$ である。つまり、 $X_1 - X_2$ の要素は ΔQ_S に寄与しない。したがって、 X_1 上の和を X_2 上の和に書き換えることができる：

$$\Delta Q_S = \sum_{\mathbf{b} \in X_2} \sum_{j=1}^m \frac{\alpha(\mathbf{b}) - 1}{\alpha(\mathbf{b})} g_j(\mathbf{b}) Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\} \quad (4.6)$$

さて、任意の $\mathbf{b} \in X_2$ に対し、恒等式

$$[\alpha(\mathbf{b}) - 1] g_j(\mathbf{b}) = g_j(\mathbf{b}) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m g_k(\mathbf{b}) \quad (4.7)$$

が成立する； $g_j(\mathbf{b})=0$ のときは明らかである； $g_j(\mathbf{b}) \neq 0$ 、すなわち $g_j(\mathbf{b})=1$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} (4.7) \text{ 式右辺} &= \left[\sum_{k=1}^m g_k(\mathbf{b}) \right] - 1 \\ &= \alpha(\mathbf{b}) - 1 = (4.7) \text{ 式左辺} \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる。

(4.7) 式を (4.6) 式に代入して整理すると、表現

$$\Delta Q_s = \sum_{\mathbf{b} \in X_2} \sum_{j=1}^m \sum_{k>j}^m \frac{2}{\alpha(\mathbf{b})} g_j(\mathbf{b}) g_k(\mathbf{b}) Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\} \quad (4.9)$$

を得る。いま、 $\mathbf{b} \in X_2$ と二つの最小カット $j < k$ との新たな結合確率を

$$P_2\{\mathbf{b}, j, k\} = g_j(\mathbf{b}) g_k(\mathbf{b}) Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\} / Q_2 \quad (4.10)$$

で定義する。(2.8)式から明らかなように

$$Q_2 = \sum_{\mathbf{b} \in X_2} \sum_{j=1}^m \sum_{k>j}^m g_j(\mathbf{b}) g_k(\mathbf{b}) Pr\{\mathbf{x}=\mathbf{b}\} \quad (4.11)$$

であるので、 Q_2 は確率 P_2 の規格化定数となっている。

確率 P_2 で(4.9)式を書き換えると

$$\begin{aligned} \Delta Q_s &= Q_2 \sum_{\mathbf{b} \in X_2} \sum_{j=1}^m \sum_{k>j}^m \frac{2}{\alpha(\mathbf{b})} P_2\{\mathbf{b}, j, k\} \quad (4.12) \\ &= Q_2 \cdot E \left\{ \frac{2}{\alpha(\mathbf{b})} \right\}, \quad (\mathbf{b}, j, k) \sim P_2\{\mathbf{b}, j, k\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

を得る。

4.2 改良形の被覆モンテカルロ法

(4.4)式と(4.13)式から、 Q_s を評価するためのつぎのモンテカルロ法を得る。

$$Q_{s,2} = Q_1 - N^{-1} Q_2 \sum_{\nu=1}^N \frac{2}{\alpha(\mathbf{b}_\nu)} \quad (4.14)$$

$$(\mathbf{b}_\nu, j_\nu, k_\nu) \sim P_2\{\mathbf{b}, j, k\}, \quad \nu=1, \dots, N \quad (4.15)$$

なお、 Q_1, Q_2 は次式で計算できる。

$$Q_1 = \sum_{j=1}^m \left[\prod_{i \in C_j} q_i \right] \quad (4.16)$$

$$Q_2 = \sum_{j=1}^m \sum_{k>j}^m \left[\prod_{i \in C_j \cup C_k} q_i \right] \quad (4.17)$$

ところで、(4.14)式の右辺に $-Q_2 + Q_2 = 0$ を加えると、推定量 $Q_{s,2}$ はつぎのように表現できる。

$$Q_{s,2} = Q_1 - Q_2 + N^{-1} Q_2 \sum_{\nu=1}^N \frac{\alpha(\mathbf{b}_\nu) - 2}{\alpha(\mathbf{b}_\nu)} \quad (4.18)$$

(4.3)式の最後の式から明らかなように、推定量 $Q_{s,2}$ は含意-排他公式の第3項以降をモンテカルロ法で評価している。なお、 $\alpha(\mathbf{b}_\nu) \geq 2$ であるので、

$$Q_1 - Q_2 \leq Q_{s,2} \leq Q_1 \quad (4.19)$$

は容易にわかる。すなわち、推定量 $Q_{s,2}$ は既知の上限 Q_1 と下限 $Q_1 - Q_2$ を逸脱することはない。

4.3 標本の発生

確率 P_2 はつぎのように分解できる。

$$P_2\{\mathbf{b}, j, k\} = P_2\{j\} P_2\{k|j\} P_2\{\mathbf{b}|j, k\} \quad (4.20)$$

周辺確率 $P_2\{j\}$ と条件付確率 $P_2\{k|j\}$ は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} P_2\{j\} &= \frac{1}{Q_2} \sum_{i>j} \left[\prod_{i \in C_j \cup C_i} q_i \right] \\ P_2\{k|j\} &= \left[\prod_{i \in C_j \cup C_k} q_i \right] / \sum_{i>j} \left[\prod_{i \in C_j \cup C_i} q_i \right], \quad k > j \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

これらの確率は(4.16)、(4.17)式を計算する過程で得ることができる。条件付確率 $P_2\{\mathbf{b}|j, k\}$ は

$$P_2\{\mathbf{b}|j, k\} = \left[\prod_{i \in C_j \cup C_k} b_i \right] \left[\prod_{i \notin C_j \cup C_k} q_i^{b_i} (1 - q_i)^{1-b_i} \right] \quad (4.22)$$

となる。

(4.15)式の標本発生はつぎのようになる。

$$j_\nu \sim P_2\{j\}; \quad k_\nu \sim P_2\{k|j_\nu\}, \quad k_\nu > j_\nu \quad (4.23)$$

$$b_{i,\nu} = \begin{cases} 1, & i \in C_{j_\nu} \cup C_{k_\nu} \text{ のとき} \\ \sim Pr\{x_i = b_i\}, & \text{上記以外} \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{b}_\nu = (b_{1,\nu}, \dots, b_{i,\nu}, \dots, b_{n,\nu}) \quad (4.25)$$

(4.23)式は離散分布からの標本発生であり、Walker (1977)¹¹⁾あるいはBrown (1981)¹²⁾の方法を用いれば、カット数 m にほとんど依存しない時間で行える。(4.24)式は(3.14)式と同様であるが、前者のほうが値1に確定してしまう場合が多く、容易である。

4.4 説明例

要素数 $n=3$ 、最小カット数 $m=3$ 、 $C_1 = \{1, 2\}$ 、 $C_2 = \{2, 3\}$ 、 $C_3 = \{3, 1\}$ とする。(4.16)、(4.17)式より

$$Q_1 = q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1 \quad (4.26)$$

$$Q_2 = q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3 = 3 q_1 q_2 q_3 \quad (4.27)$$

となる。(4.21)式の周辺確率は

$$\left. \begin{aligned} P_2\{1\} &= [q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3] / Q_2 = 2/3 \\ P_2\{2\} &= q_1 q_2 q_3 / Q_2 = 1/3 \\ P_2\{3\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

である。(4.21)式の条件付確率は

$$\left. \begin{aligned} P_2\{2|1\} &= q_1 q_2 q_3 / [q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3] = 1/2 \\ P_2\{3|1\} &= q_1 q_2 q_3 / [q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3] = 1/2 \\ P_2\{3|2\} &= q_1 q_2 q_3 / q_1 q_2 q_3 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

となる。(4.24)式の $b_{i,\nu}$ はすべて1に確定する。含意-排他公式の完全な展開は、(4.3)式よりつぎとなる。

$$\begin{aligned} Q_s &= Q_1 - Q_2 + Q_3 \\ &= q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1 - 2 q_1 q_2 q_3 \end{aligned} \quad (4.30)$$

5. 推定誤差分散の評価

モンテカルロ法の精度は、標本推定量の分散で定量化される。その根拠は中心極限定理、チェビシェフの不等式、あるいは2乗平均損失である。本節では、(3.11)式の $Q_{s,1}$ と(4.14)式の $Q_{s,2}$ につき、その分散を評価する。まず、以後の展開で必要なつぎの二つ

の恒等式を示しておく。証明は簡単であるので略す。

$$\Delta Q_s = \sum_{\mathbf{b} \in X_2} [\alpha(\mathbf{b}) - 1] Pr\{\mathbf{x} = \mathbf{b}\} \quad (5.1)$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k>j}^m g_j(\mathbf{b}) g_k(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{b}) [\alpha(\mathbf{b}) - 1] \quad (5.2)$$

なお、記法の便宜上、 $\alpha(\mathbf{b})$, $g_j(\mathbf{b})$, $g_k(\mathbf{b})$, $Pr\{\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ をそれぞれ α , g_j , g_k , $Pr\{\mathbf{b}\}$ と略記することがある。以後の議論においても、明記はしないが 2.1 節の仮定が成り立つものとする。さて、つぎの定理は改良形の被覆モンテカルロ法が Karp-Luby 法に比べて高精度であることを示すものである。量 Q_1 は 1 個以上の、 Q_2 は 2 個以上の最小カットの同時発生によるものである。実際問題では要素信頼度は高いことが多く、2 個以上の最小カットの同時発生は比較的まれである。したがって、 Q_1 のほうが支配的であり、(5.3) 式は妥当な仮定である。なお、Karp-Luby 法との比較ではなく、分散と変動係数の事前評価をする場合には、同様な仮定として定理 3 の (5.25) 式、定理 4 の (5.30) 式を置けばよい。

《定理 1》 含意-排他公式の第 1 項 Q_1 と第 2 項 Q_2 につき

$$2Q_2 < Q_1 \quad (5.3)$$

を仮定する。このとき、

$$Var\{Q_{s,2}\} \leq Var\{Q_{s,1}\} \quad (5.4)$$

が成立する。なお、等号はシステムがただ一つの最小カットをもつ場合にのみ成立する。

(証明) (4.1) 式と (4.14) 式において $N=1$ の場合を考え、右辺第 2 項の推定量をそれぞれ F_1 , F_2 と置く。すなわち、

$$F_1 = Q_1 \frac{\alpha(\mathbf{b}_1) - 1}{\alpha(\mathbf{b}_1)} \quad (5.5)$$

$$F_2 = Q_2 \frac{2}{\alpha(\mathbf{b}_1)} \quad (5.6)$$

明らかに、 F_1 と F_2 の分散は標本数 $N=1$ の場合の $Q_{s,1}$ と $Q_{s,2}$ の分散、すなわち母分散にそれぞれ等しい。標本は独立に抽出されるので、一般の N に対し、 $Q_{s,1}$ と $Q_{s,2}$ の分散は次式で与えられる。

$$Var\{Q_{s,1}\} = N^{-1} Var\{F_1\} \quad (5.7)$$

$$Var\{Q_{s,2}\} = N^{-1} Var\{F_2\} \quad (5.8)$$

推定量 F_1 と F_2 の期待値は同じで、偏差 $\Delta Q_s = Q_1 - Q_s$ に等しい。したがって、2 乗平均を比較すればよい。(3.4) 式と (5.5) 式から

$$E\{F_1^2\} = Q_1 \sum_{\mathbf{b} \in X_1} \sum_{j=1}^m \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2} g_j Pr\{\mathbf{b}\} \quad (5.9)$$

を得る。これに (2.5) 式を用いた後、集合 X_1 を X_2 に置き換えると次式を得る。

$$E\{F_1^2\} = Q_1 \sum_{\mathbf{b} \in X_2} \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} Pr\{\mathbf{b}\} \quad (5.10)$$

一方、(4.10) 式と (5.6) 式から

$$E\{F_2^2\} = Q_2 \sum_{\mathbf{b} \in X_2} \sum_{j=1}^m \sum_{k>j}^m \frac{4}{\alpha^2} g_j g_k Pr\{\mathbf{b}\} \quad (5.11)$$

であり、(5.2) 式から

$$E\{F_2^2\} = 2Q_2 \sum_{\mathbf{b} \in X_2} \frac{\alpha-1}{\alpha} Pr\{\mathbf{b}\} \quad (5.12)$$

となる。

上式に仮定の不等式 (5.3) を用いると

$$E\{F_2^2\} \leq Q_1 \sum_{\mathbf{b} \in X_2} \frac{\alpha-1}{\alpha} Pr\{\mathbf{b}\} \quad (5.13)$$

$$\leq Q_1 \sum_{\mathbf{b} \in X_2} \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} Pr\{\mathbf{b}\} \quad (5.14)$$

$$= E\{F_1^2\} \quad (5.15)$$

となる。したがって、(5.7), (5.8) 式から (5.4) 式が証明される。

2.1 節の仮定 4 から、 $Pr\{\mathbf{b}\} > 0, \forall \mathbf{b}$ であるので、(5.13) 式における等号の成立は、右辺の $\mathbf{b} \in X_2$ に関する和が零となる場合、すなわち $X_2 = \emptyset$ の場合に限る。これは $m=1$ であることを意味する。逆にこの場合には、(5.14) 式でも等号が成立し、定理 1 の等号成立条件を得る。Q. E. D.

つぎの定理は、モンテカルロ実行後の推定誤差分散の評価に、実用上の価値がある。すなわち、定理における未知の真値 Q_s を、モンテカルロ推定値で置き換えて用いる。

《定理 2》

$$Var\{Q_{s,2}\} \leq (Q_1 - Q_s)(Q_2 - Q_1 + Q_s)/N \quad (5.16)$$

$$Var\{Q_{s,1}\} \leq Q_s(Q_1 - Q_s)/N \quad (5.17)$$

(証明) (5.12) 式で $\alpha \geq 2$ であることに着目すると、

$$\begin{aligned} E\{F_2^2\} &\leq Q_2 \sum_{\mathbf{b} \in X_2} (\alpha-1) Pr\{\mathbf{b}\} \\ &= Q_2 \Delta Q_s \end{aligned} \quad (5.18)$$

推定量 F_2 の期待値は $\Delta Q_s = Q_1 - Q_s$ であるので

$$Var\{F_2^2\} \leq \Delta Q_s (Q_2 - \Delta Q_s) \quad (5.19)$$

$$= (Q_1 - Q_s)(Q_2 - Q_1 + Q_s) \quad (5.20)$$

となり、(5.8) 式から (5.16) 式が得られる。

一方、(5.5), (3.1) 式より

$$E\{(Q_1 - F_1)^2\} = Q_1 \sum_{\mathbf{b} \in X_1} \frac{1}{\alpha} Pr\{\mathbf{b}\} \quad (5.21)$$

$$\leq Q_1 Q_s \quad (5.22)$$

$$E\{Q_1 - F_1\} = Q_s$$

となる。したがって

$$Var\{F_1\} \leq Q_s(Q_1 - Q_s) \quad (5.23)$$

を得、(5.17) 式が証明される。Q. E. D.

なお, Karp-Luby は (5.17) 式を等式の形で与えているが, これは誤りである (5.22) 式参照).

定理 1 は分散の大小関係をいうだけで, その度合いは明らかでない. 定理 2 はその一つの解答を与える. すなわち, Q_s が $Q_1 - Q_s$ で, $Q_1 - Q_s$ が $Q_2 - Q_1 + Q_s$ で置換されている. つまり, (5.16) 式右辺は含意-排他公式の高次の剰余項で表現されている. 実用上重要な高信頼度システムに対しては, これらの剰余項は小さく, 本論文の推定量 $Q_{s,2}$ のほうが, はるかに小さな分散をもつことを示唆している.

(4.3) 式の不等式と (5.16) 式から, 分散の事前評価

$$\text{Var}\{Q_{s,2}\} \leq Q_2 Q_3 / N \quad (5.24)$$

を得る. しかし, 量 Q_3 が必要となり, 実用的でない. つぎの定理 3 は, 分散の事前評価に有用である. 記述の便宜上, (5.25) 式の不等式を仮定する.

$$\langle \text{定理 3} \rangle \quad Q_1 < 1, \quad Q_1 - Q_2 > 0 \quad (5.25)$$

とする. このとき, つぎの事前評価を得る.

$$\text{Var}\{Q_{s,2}\} \leq Q_2^2 / (4N) \quad (5.26)$$

$$\text{Var}\{Q_{s,1}\}$$

$$\leq \begin{cases} Q_2(Q_1 - Q_2) / N, & Q_1 - 2Q_2 > 0 \text{ のとき} \\ Q_1^2 / (4N), & \text{上記以外} \end{cases}$$

(5.27)

(証明) (5.16) 式右辺は Q_s の 2 次関数であり, $0 < Q_1 - Q_2 \leq Q_s^* = Q_1 - (Q_2/2) \leq Q_1 < 1$ なる Q_s^* において, (5.26) 式右辺の最大値をとる. (5.27) 式も同様にして証明できる. Q. E. D.

定理 3 において, Q_1, Q_2 はモンテカルロ実行前に既知である. したがって, 推定誤差分散が所与の値以下となるような標本数 N も, 事前にわかる. つぎの定理 4 は相対的な精度, すなわち $\text{Var}\{Q_{s,2}/Q_s\}$, $\text{Var}\{Q_{s,1}/Q_s\}$ に関するものである. これらの分散の平方根は変動係数と呼ばれている.

《定理 4》 相対誤差の事後評価として

$$\text{Var}\{Q_{s,2}/Q_s\} \leq \left(\frac{Q_1}{Q_s} - 1 \right) \left(\frac{Q_2}{Q_s} - \frac{Q_1}{Q_s} + 1 \right) / N \quad (5.28)$$

$$\text{Var}\{Q_{s,1}/Q_s\} \leq \left(\frac{Q_1}{Q_s} - 1 \right) / N \quad (5.29)$$

を得る. 一方,

$$Q_1 < 1, \quad Q_1 - Q_2 > 0 \quad (5.30)$$

とする. このとき, つぎの事前評価を得る.

$$\text{Var}\{Q_{s,2}/Q_s\} \leq \frac{Q_2^2}{4Q_1(Q_1 - Q_2)} \frac{1}{N} \quad (5.31)$$

$$\text{Var}\{Q_{s,1}/Q_s\} \leq \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \frac{1}{N} \quad (5.32)$$

(証明) 前半は定理 2 から明らかである. (5.28)

式は Q_s^{-1} の 2 次関数であり,

$$Q_s^* = \frac{2Q_1(Q_1 - Q_2)}{2Q_1 - Q_2} \quad (5.33)$$

において, (5.31) 式右辺を最大値としてとり, 同不等式を得る. なお, 次式が成立している.

$$Q_1 - Q_2 \leq Q_s^* \leq Q_1 \quad (5.34)$$

(5.32) 式も同様に証明できる. Q. E. D.

定理 4 の前半はモンテカルロ実行後の, 後半は実行前の評価に使用できる. なお, Karp-Luby は下限

$$Q_1^2 / (Q_1 + 2Q_2) \leq Q_s \quad (5.35)$$

をもとに, つぎの評価を得ている¹⁰⁾.

$$\text{Var}\{Q_{s,1}/Q_s\} \leq 2Q_2 / (Q_1 N) \quad (5.36)$$

(4.17) 式の Q_2 は 2 個以上の最小カットの同時発生による寄与である. 一方, (4.16) 式の Q_1 は 1 個以上の最小カットの発生による. このことに注目すると

$$\lim_{q \rightarrow 0} Q_2 / Q_1 = 0, \quad q = (q_1, \dots, q_n) \quad (5.37)$$

は容易に示すことができる. したがって, 定理 4 の事前評価公式からも明らかのように, $Q_{s,1}$ と $Q_{s,2}$ の変動係数はシステム要素が高信頼度になるにつれ, 零に収束する. これは 2.3 節で述べた直接モンテカルロ法と対照的である.

最後に, 計算量について触れておく. Karp-Luby 法においても, 事前の評価を行うには, Q_1, Q_2 を計算しておく必要がある. (4.21) 式の確率はその計算の過程で容易に得られる. したがって, 本論文のモンテカルロ法で新たに加わる計算量は, (4.23) 式内のカット k_r を発生する部分と考えてよい. しかしながら, 4.3 節で述べたように, カットの発生は容易である. また, b_r の発生は本論文のモンテカルロのほうが簡単である. さらに, 両者のモンテカルロとも, 主たる計算は被覆数 $\alpha(b_r)$ の決定が占める. したがって, 提案した手法を用いても, 計算量はそれほど増加しない.

事前の評価を行わない場合には, 定理 2 あるいは定理 4 の前半による事後の評価を行う. なお, これはあくまで便宜的な評価である; Q_s をその推定値で置換するので, 厳密な根拠はない. Karp-Luby 法に比べて分散減少の割合は顕著であると考えられ, 少なくとも高信頼度システムに対しては, 本論文の手法の有効性が期待できる. なお, (4.21) 式の確率を記憶しておくための容量の増加はある.

6. 数 値 例

Karp-Luby の例題である Fig. 1 のネットワークを考える¹⁰⁾. 孤 i はつぎの確率で切れる, すなわち故

Table 1 Min cuts for network of Fig. 1

j	Min cut C_j	$Pr\{C_j\}$
1	{7, 8}	.02
2	{5, 6, 7}	.008
3	{1, 4, 6, 8}	.0024
4	{3, 6, 8}	.032
5	{3, 5}	.08
6	{1, 4, 5}	.006
7	{2, 4, 6, 7}	.006
8	{2, 3, 4}	.06
9	{1, 2}	.05

Fig. 1 Two-terminal network problem

障する。

$$\mathbf{q} = (0.1, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.4, 0.1, 0.2) \quad (6.1)$$

要素の故障確率は大きく、本論文の手法にとっては不利な例題である。

システムが正常であるのは、ノード S と T が連結しているときに限る。最小カットとその確率を **Table 1** に示す。 $m=9$ である。最小カットを求める手法としては、Tsukiyama らのものがあ¹⁴⁾。量 Q_1, Q_2 と含意-排他公式は、

$$Q_1 = 0.26440, \quad Q_2 = 0.065472 \quad (6.2)$$

$$Q_1 - Q_2 = 0.198928 \leq Q_S \leq 0.26440 = Q_1 \quad (6.3)$$

となる。(5.35)式による下限は

$$0.176827 \leq Q_S \quad (6.4)$$

である。本例題の場合、 Q_S は (2.13) 式から計算できる：

$$Q_S = 0.21254 \quad (6.5)$$

定理 4 の後半による事前評価は

$$\text{Var}\{Q_{S,2}/Q_S\} \leq 0.020375N^{-1} \quad (6.6)$$

$$\text{Var}\{Q_{S,1}/Q_S\} \leq 0.329124N^{-1} \quad (6.7)$$

となる。(5.36)式の評価は (5.32) 式より精度が劣る。変動係数の目標値 $\beta=0.01$ に対する標本数 N の評価は、

$$N \geq 0.020375/\beta^2 \cong 204 \quad (\text{本論文}) \quad (6.8)$$

$$N \geq 3291 \quad (\text{Karp-Luby}) \quad (6.9)$$

となる。定理 4 の前半で (6.5) 式の実値を用いると

$$\text{Var}\{Q_{S,2}/Q_S\} \leq 0.015627N^{-1} \quad (6.10)$$

$$\text{Var}\{Q_{S,1}/Q_S\} \leq 0.244001N^{-1} \quad (6.11)$$

である。**Fig. 2** にモンテカルロ実行例を示す。 $N=204$ のとき、 $Q_{S,2}=0.21223$ である。乱数発生には、

Fig. 2 Results of new coverage Monte Carlo

つぎの合同法を用いた。

$$x_{i+1} = 16807x_i \pmod{2^{31}-1}, \quad x_0 = 1924673 \quad (6.12)$$

7. む す び

フォールト・ツリーやネットワーク・モデルの多くは、2.1 節の単調増加性の「仮定 2」を満たすと思われる。統計的独立性の「仮定 3」は、要素の隔離が不十分な場合には成立しない。

単調増加仮定を置けないときには、最小カットのかわりに、論理関数 $\psi(\mathbf{b})$ の主項 (prime implicant) を用いる必要がある。また、統計的独立仮定が成り立たないときには、4.3 節の標本発生法や (4.16), (4.17) 式の計算法を修正する必要がある。これらのいずれの場合にも、本論文の手法は容易に拡張できと思われるが、詳細は今後の課題である。なお、NP-hard 問題に対するモンテカルロ法の意義については、Richard M. Karp の 1985 年度チューリング賞受賞記念講演論文¹⁵⁾を参照されたい。

参 考 文 献

- 1) J.S. Provan and M.O. Ball: The Complexity of Counting Cuts and of Computing the Probability that a Graph Is Connected, Working Paper MS/S 81-002, Management Science and Statistics (1981)
- 2) R.E. Barlow and F. Proschan: Statistical Theory of Reliability and Life Testing Probability Models, Holt, Rinehart and Winston, Inc. (1975)
- 3) R.M. Van Slyke and H. Frank: Network Reliability Analysis, Networks, **1**, 279/290 (1972)
- 4) H. Kumamoto, K. Tanaka and K. Inoue: Efficient Evaluation of System Reliability by Monte Carlo

- Method, IEEE Trans. Reliability, **R-26-5**, 311/315 (1977)
- 5) H. Kumamoto, K. Tanaka, K. Inoue and E. J. Henley: Dagger Sampling Monte Carlo for System Unavailability Evaluations, IEEE Trans. Reliability, **R-29-2**, 122/125 (1980)
- 6) H. Kumamoto, K. Tanaka, K. Inoue and E. J. Henley: State-Transition Monte Carlo for Evaluating Large, Repairable Systems, IEEE Trans. Reliability, **R-29-5**, 376/380 (1980)
- 7) M. C. Easton and C. K. Wong: Sequential Destruction Method for Monte Carlo Evaluation of System Reliability, IEEE Trans. Reliability, **R-29-1**, 27/32 (1980)
- 8) G. S. Fishman: A Comparison of Four Monte Carlo Method for Estimating the Probability of s-t Correctness, Tech. Report UNC/ORSA/TR-84/14, Univ. North Carolina (1984)
- 9) G. S. Fishman: A Monte Carlo Sampling Plan for Estimating Network Reliability, Tech. Report, UNC/ORSA/TR-84/8, Univ. North Carolina (1984)
- 10) R. Karp and M. G. Luby: A New Monte Carlo Method for Estimating the Failure Probability of an n -Component System, Comput. Sci. Division, Univ. California, Berkeley (1983)
- 11) A. J. Walker: An Efficient Method for Generating Discrete Random Variables with General Distributions, ACM Trans. Math. Software, **3-3**, 253/256 (1977)
- 12) F. B. Brown, W. R. Martin and D. A. Calahan: A Discrete Sampling Method for Vectorized Monte Carlo Calculations, Trans. Am. Nucl. Soc., **38**, 354/355 (1981)
- 13) W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications, **I**, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York (1968)
- 14) S. Tsukiyama, I. Shirakawa, H. Ozaki and H. Ariyoshi: An Algorithm to Enumerate All Cutsets of a Graph in Linear Time, J. ACM, **27-4**, 619/632 (1980)
- 15) R. M. Karp: Combinatorics, Complexity, and Randomness, Commun. ACM, **29-2**, 98/117 (1986)
-