高ゲインフィードバックによる 2 足動歩行の安定解析[†]

細 江 繁 幸*・武 市 機 八*・熊 井 聡*・伊 藤 正 美*

Analysis of Stability of Dynamic Biped Locomotion
with High Gain Feedback

Shigeyuki Hosoe*, Kihachi TAKEICHI*, Satoshi KUMAI* and Masami Ito*

In this paper we give some theoretical consideration to biped locomotion of a 3-link walking robot, which is controlled by high gain feedbacks around two joints at the hip.

When the gains are high enough, the dynamics of the robot can be uniformly approximated, on any finite time interval, by the one of a perpendicular pendulum.

Using this result and analyzing rigorously the one cycle of walking, we reveal why stable periodic motion is realized through high gain feedback control, and give some gait conditions for the realization.

The method and results are easily extended to the biped robot which has 4 or more links.

Key Words: high gain feedback, dynamic biped locomotion, stability analysis reduced model, biped robot

1. 序 論

2 足歩行ロボットのマニピュレータとの大きな違いは脚の交換が存在すること、すなわち固定された原点をもたないことにある。2 足歩行の実現を考えるとこれは避けて通ることができない問題となる。このことから歩行の実現には大きく分けて二つの考え方ができる。一つは静歩行と呼ばれる歩行に限定し、脚先の地面への固定を仮定してマニピュレータと同様に考えてしまう方法である。当然、重心が足底面内にあるような運動に制限され、人の歩行とは似つかないものとなる。もう一つは、この脚の交換の特徴を積極的に利

用しようとする方法である。動歩行と呼ばれる人の平常の歩行はこの方法であり、また、滑らかな歩行を実現するにも向いていると考えられる。

過去にいくつかの 2 足歩行を実現した例がある（文献 1）～ 5）およびそれらの参考文献を参照されたい）。そのうちで古荘によるもの³⁾は後者の考え方であり、局所高ゲインフィードバックによる運動方程式の低次元化で解析を非常に簡単にしているなどの点で非常に興味もたれる。これは、脚先と床との間にトルクをもたず、いわば竹馬のような歩行を行うもので、後の章で述べるようにロボットの形を局所高ゲインフィードバックにより目標姿勢に一致させ、また歩行を周期運動と考え、この周期運動からのずれが収束させられるように目標姿勢を適当に定めておくものである。しかし、彼らの歩行の解析においては周期運動の存在が仮定され、その周期運動回りの 1 次近似誤差の収束性のみが調べられているだけで、もともになるはずの周期運動の存在が明らかにされていない。このことは、高ゲインフィードバック制御とは違うが文献 2) についてもいえる。また、低次元化の過程にも一部、明確でない点がある。

この論文では、問題として残されていた周期運動の存在、および大域的な収束性の問題について考察する。運動方程式としては古荘らと同様、線形化されたものを用いる。しかし、局所高ゲインフィードバックとしては彼らのものと異なったものを選び、無限遠方に向かう極がゲインの 1 次関数となるように選んだ。

この結果、低次元化の過程の解析がより簡単になった。さらに運動解析は低次元化運動方程式に対する位相面 $((\theta_1, \dot{\theta}_1)$ 平面) を考え、その位相面上で系の挙動を大域的に解析することを試みる。その結果として周期運動の存在、安定な歩行が実現できるための目標相対角、

[†] 第 14 回制御理論シンポジウムで発表 (昭 60・5)

* 名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya

(Received August 22, 1985)

(Revised June 17, 1986)

Fig. 1 Model

ロボットのパラメータが満たすべき条件などの一部を明らかにする。

2. モデル

2足歩行ロボットのモデルとしてここでは Fig. 1 に示す物を用いる。これはロボットを sagital 平面内に拘束し、同平面内での動きのみを考えたものである。 θ_1 は支持脚、 θ_2 は胴、 θ_3 は遊脚を鉛直から時計回りに計った角である。支持脚の交換があっても $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ は支持脚から順に番号づけするものとする。腰のみにトルクアクチュエータをもち、足首部は自由に回転しうる。トルクは図に示したように、 u_1, u_2 とし、いずれも胴に対応するリンクを時計回りに駆動するものを正とする。なお、左右の脚は長さ、質量などすべて等しいとした。

ここでは説明の簡単化のため3リンクモデルを採用したが5リンク以上のモデルでもまったく同様な解析が可能である。また、質量が非常に小さい足首先端を出し入れして遊脚が地面から離れるように工夫すれば、ここで対象とした3リンクのロボットでも歩行を実現することができる。

3. 運動方程式

上記モデルの単脚支持期の運動方程式はよく知られるように(1)式となる。

$$A(\theta)\ddot{\theta} + B(\theta)\dot{\theta}^2 + C \sin(\theta) = Du \quad (1)$$

ここで、 $A(\theta), B(\theta), C$ は 3×3 行列、 D は 3×2 行列であり、

$$\begin{aligned} A(\theta) &= [a_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)], \quad B(\theta) = [a_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)], \quad C = [c_{ij}], \\ \ddot{\theta} &= [\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3]^T, \quad \dot{\theta}^2 = [\dot{\theta}_1^2, \dot{\theta}_2^2, \dot{\theta}_3^2]^T, \\ \theta &= [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T, \quad \sin(\theta) = [\sin \theta_1, \sin \theta_2, \sin \theta_3]^T, \\ u &= [u_1, u_2]^T \end{aligned}$$

である。 u は腰部のトルク、 D は駆動行列を表わし、 a_{ij}, c_{ij} はロボットの質量、リンクの長さなどにより定まる。

これを直立状態 ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$) の周りで線形化した式が(2)である。

$$A\ddot{\theta} + C\theta = Du$$

$$A = [a_{ij}] \quad (2)$$

以下の解析ではこの線形化運動方程式を用いる。行列の各要素については後で座標変換を行って得られる最終的な運動方程式((5)式)について示す。

4. Reduced Model

上記システムに局所高ゲインフィードバック制御を行う。このフィードバックにより、つぎに定義する相対角が目標相対角に追従し、また、システムがこの目標相対角を入力とする2次のシステムとなることを示す。

相対角 ϕ_1, ϕ_2 の定義はつぎのとおりである。

$$\phi_1 = \theta_1 - \theta_2$$

$$\phi_2 = \theta_3 - \theta_2 \quad (3)$$

さらに(2)式のシステムに対し入力としてつぎの局所高ゲインフィードバックを施す。

$$u_1 = \alpha^2 k_{p1}(\phi_1 - \phi_{r1}) + \alpha k_{d1} \dot{\phi}_1$$

$$u_2 = \alpha^2 k_{p2}(\phi_2 - \phi_{r2}) + \alpha k_{d2} \dot{\phi}_2 \quad (4)$$

ここで ϕ_{r1}, ϕ_{r2} はそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 に対する目標相対角であり、 α は高ゲインを表わすパラメータである。

θ_1, ϕ_1, ϕ_2 を変数とするように前記の運動方程式を変形し上記入力を代入すると次式を得る。

$$\bar{A}\ddot{x} + \alpha \bar{B}\dot{x} + (\bar{C}_0 + \alpha^2 \bar{C}_1)x = \alpha^2 \bar{D}\phi_r \quad (5)$$

$$x = [\theta_1, \phi_1, \phi_2]^T$$

$$\bar{a}_{11} = 2I_1 + I_2 + 2m_1 r_1^2 + m_2 (l_1 + r_2)^2$$

$$\bar{a}_{22} = I_1 + I_2 + m_1 (l_1 - r_1)^2 - m_2 r_2^2$$

$$\bar{a}_{33} = I_1 + m_1 (l_1 - r_1)^2$$

$$\bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = -I_1 - I_2 + m_1 r_1 (l_1 - r_1) - m_2 r_2 (l_1 + r_2)$$

$$\bar{a}_{13} = \bar{a}_{31} = I_1 - m_1 r_1 (l_1 - r_1)$$

$$\bar{a}_{23} = \bar{a}_{32} = -I_1 - m_1 (l_1 - r_1)^2$$

$$\bar{b}_{11} = \bar{b}_{12} = \bar{b}_{13} = \bar{b}_{21} = \bar{b}_{23} = \bar{b}_{31} = \bar{b}_{32} = 0$$

$$\bar{b}_{22} = k_{d1}, \quad \bar{b}_{33} = k_{d2}$$

$$\bar{c}0_{11} = -(2m_1 r_1 + m_2 (l_1 + r_2))g$$

$$\bar{c}0_{22} = (m_1 (l_1 - r_1) - m_2 r_2)g$$

$$\bar{c}0_{33} = m_1 (l_1 - r_1)g$$

$$\bar{c}0_{12} = \bar{c}0_{21} = (-m_1 (l_1 - r_1) + m_2 r_2)g$$

$$\bar{c}0_{13} = \bar{c}0_{31} = m_1 (l_1 - r_1)g$$

$$\bar{c}0_{23} = \bar{c}0_{32} = -m_1 (l_1 - r_1)g$$

$$\bar{c}1_{11} = \bar{c}1_{12} = \bar{c}1_{13} = \bar{c}1_{21} = \bar{c}1_{23} = \bar{c}1_{31} = \bar{c}1_{32} = 0$$

$$\bar{c}1_{22} = k_{p1}, \quad \bar{c}1_{33} = k_{p2}$$

$$\bar{d}_{11} = \bar{d}_{12} = \bar{d}_{22} = \bar{d}_{31} = 0$$

$$\bar{d}_{21} = k_{p1}, \quad \bar{d}_{32} = k_{p2}$$

このとき(5)式の解は $\alpha \rightarrow \infty$ とすることにより(6)式で表わされる(証明は付録参照)。

$$\begin{aligned} \theta_1(t) = & \frac{1}{\bar{a}_{11}} (\bar{a}_{11}\theta_1(0) + \bar{a}_{12}\phi_{r1}(0) + \bar{a}_{13}\phi_{r2}(0)) \cosh \omega t \\ & + \frac{1}{\omega \bar{a}_{11}} (\bar{a}_{11}\dot{\theta}_1(0) + \bar{a}_{12}\dot{\phi}_{r1}(0) \\ & + \bar{a}_{13}\dot{\phi}_{r2}(0)) \sinh \omega t \\ & - \frac{1}{\bar{a}_{11}} (\bar{a}_{12}\phi_{r1}(t) + \bar{a}_{13}\phi_{r2}(t)) \\ & - \frac{1}{\omega \bar{a}_{11}} \left\{ (\bar{a}_{12}\omega^2 + \bar{c}0_{12}) \int_0^t \sinh \omega(t-\tau) \phi_{r1}(\tau) d\tau \right. \\ & \left. + (\bar{a}_{13}\omega^2 + \bar{c}0_{13}) \int_0^t \sinh \omega(t-\tau) \phi_{r2}(\tau) d\tau \right\} \end{aligned}$$

$$\phi_1(t) = \phi_{r1}(t), \quad \phi_2(t) = \phi_{r2}(t) \quad (6)$$

ここで得られた θ_1 はロボットを棒状に固定し、関節角の運動の影響を接地点での回転トルクで置き換えた倒立振子の運動方程式((7)式)の解となっていることに注意されたい。

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11}\ddot{\theta}_1(t) = & -\bar{c}0_{11}\theta_1(t) - \bar{c}0_{12}\dot{\phi}_{r1}(t) \\ & - \bar{c}0_{13}\dot{\phi}_{r2}(t) - \bar{a}_{12}\ddot{\phi}_{r1}(t) - \bar{a}_{13}\ddot{\phi}_{r2}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

5. Reduced Model の運動の解析

4章で各相対角が目標相対角に一致することを示した。以下ではロボットの歩行の安定性を解析するためにロボットの運動を決める残りの運動である支持脚と床との間の角 θ_1 の運動を位相面上 (Fig. 2) で考える。この θ_1 の運動は設計者が与える各目標対角、および初期角 $\theta_1(0)$ 、初期角速度 $\dot{\theta}_1(0)$ により一意に定まるものである。なお特に区別が必要な際には j 歩目の θ_1 を θ_1^j 、 $j+1$ 歩目の θ_1 を θ_1^{j+1} と表わすことに

Fig. 2 Phase plane trajectory

Fig. 3 Reference inputs

する。

以下(I)~(V)に、この位相面上の各点 ABCDEF 間の運動、および関係を説明する。

時間 t は支持脚の交換を行った瞬間を 0 とする。また、角速度のジャンプ(D→E)がおきる時間が Fig. 3 の $t=T$ に対応する。なお目標相対角については C 点から D 点までを適当に推移させ、E 点から F 点までは一定値 ($\phi_{r1} = \phi_{s1}$, $\phi_{r2} = \phi_{s2}$) に固定してある。なお、一自由度倒立振子とみなして一部の関節角を一定値に保持する研究⁴⁾もあるが、ここで関節角を一定値に固定したのは左右脚交換前後の角速度間の関係 ($\dot{\theta}_1(0-)$ と $\dot{\theta}_1(0+)$) を簡単にし、また $\theta_1(0)$ を一定にするためのものである。この姿勢で接地したときの θ_1 を θ_{s1} とする。幾何学的な関係から θ_{s1} は(8)式となることが容易にわかる。

$$\theta_{s1} = \frac{\phi_{s1} - \phi_{s2}}{2} \quad (8)$$

(I) A 点→B 点

ロボットが地面と衝突を起こして遊脚と支持脚を交換する際に起こる角速度のジャンプである。着地時の姿勢、および撃力方程式からつぎの関係が導かれる。

$$I_a \dot{\theta}_1(0+) = (I_a - h_0) \dot{\theta}_1(0-) + h_1 \dot{\phi}_{r1}(0) + h_2 \dot{\phi}_{r2}(0) \quad (9)$$

$$\theta_1(0) = -\theta_{s1}$$

$$\begin{aligned} I_a = & 2I_1 + I_2 + m_1 r_1^2 + m_2 (l_1^2 + 2r_2 l_1 \cos \phi_{s1} + r_2^2) \\ & + m_1 (l_1^2 - 2(l_1 - r_1) l_1 \cos (\phi_{s1} - \phi_{s2}) + (l_1 - r_1)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_0 = & 2m_1 l_1^2 \sin \theta_{s1} \left\{ \left(2 + \frac{m_2}{m_1} \right) \sin \left(\frac{\phi_{s1} - \phi_{s2}}{2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{m_2 r_2}{m_1 l_1} \sin \left(\frac{\phi_{s1} + \phi_{s2}}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$h_1 = -I_1 - I_2 + m_1 (l_1 - r_1) (l_1 - (l_1 - r_1) \cos (\phi_{s1} - \phi_{s2})) - m_2 r_2 (r_2 + l_1 \cos \phi_{s1})$$

$$h_2 = I_1 - m_1 (l_1 - r_1) (l_1 - (l_1 - r_1) \cos (\phi_{s1} - \phi_{s2}))$$

ここで、 $\dot{\theta}_1(0-)$ 、 $\dot{\theta}_1(0+)$ はそれぞれ着地直前、着地直後の角速度である。

(II) B 点→C 点

支持脚の交換によるものである。 θ_1 とする脚が換わることによる変化でロボットの姿勢には変化がない。

(Ⅲ) C点→D点

この間は目標相対角を入力として(7)式に従って推移する。D点の θ_1 および $\dot{\theta}_1$ は(10)式で与えられる。

$$\begin{aligned}\theta_1(T) &= \theta_1(0) \cosh \omega T + \frac{\dot{\theta}_1(0+)}{\omega} \sinh \omega T \\ &\quad + \frac{1}{\omega} \int_0^T \sinh \omega(T-\tau) v(\tau) d\tau \\ \dot{\theta}_1(T-) &= \omega \theta_1(0) \sinh \omega T + \dot{\theta}_1(0+) \cosh \omega T \\ &\quad + \int_0^T \cosh \omega(T-\tau) v(\tau) d\tau \quad (10) \\ v(\tau) &= g_{d1} \ddot{\phi}_{r1} + g_{d2} \ddot{\phi}_{r2} + g_{p1} \dot{\phi}_{r1} + g_{p2} \dot{\phi}_{r2} \\ g_{d1} &= -\frac{\bar{a}_{12}}{\bar{a}_{11}}, \quad g_{d2} = -\frac{\bar{a}_{13}}{\bar{a}_{11}} \\ g_{p1} &= -\frac{\bar{c}0_{12}}{\bar{a}_{11}}, \quad g_{p2} = -\frac{\bar{c}0_{13}}{\bar{a}_{11}}\end{aligned}$$

(Ⅳ) D点→E点

この角速度のジャンプは目標相対角を速度が不連続に設計するために起こるものである。また、E点以降は ϕ_{r1}, ϕ_{r2} を固定し、その状態で接地する。

D点の角速度を $\dot{\theta}_1(T-)$ 、E点の角速度を $\dot{\theta}_1(T+)$ とする。(7)式を $t=[T-\varepsilon, T+\varepsilon]$ で積分し、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると次式が得られる。

$$\dot{\theta}_1(T+) = \dot{\theta}_1(T-) - g_{d1} \dot{\phi}_{r1}(T-) - g_{d2} \dot{\phi}_{r2}(T-) \quad (11)$$

(Ⅴ) E点→F点

この間は目標相対角を一定の値に固定したまま移動する。これは剛体棒が倒れるのに等しく、(6)式において初期状態をE点($\theta_1(t) = \theta_1(T)$, $\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_1(T+)$, $t=T$)とし、目標相対角を $\phi_{r1} = \phi_{s1}$, $\phi_{r2} = \phi_{s2}$ に固定したものと考えられ、つぎのように表わされる。

$$\begin{aligned}\theta_1(t) + \theta_g &= (\theta_1(T) + \theta_g) \cosh \omega(t-T) \\ &\quad + \frac{\dot{\theta}_1(T+)}{\omega} \sinh \omega(t-T) \\ \dot{\theta}_1(t) &= \omega(\theta_1(T) + \theta_g) \sinh \omega(t-T) \\ &\quad + \dot{\theta}_1(T+) \cosh \omega(t-T) \\ \theta_g &= \frac{-m_2 r_1 \phi_{s1} + m_1(l_1 - r_1)(\phi_{s1} - \phi_{s2})}{2m_1 r_1 + m_2(l_1 + r_2)} \quad (12)\end{aligned}$$

着地時に $\theta_1(t) = \theta_{s1}$ となることからE、F点間の関係は次式ようになる。

$$\dot{\theta}_1^2(t) = \dot{\theta}_1^2(T+) - \omega^2((\theta_{s1} + \theta_g)^2 - (\theta_1(T) + \theta_g)^2) \quad (13)$$

(9)式を j 歩目の着地前後の関係とすると($\dot{\theta}_1^2(0-) \triangleq \dot{\theta}_1^2(0-)$, $\dot{\theta}_1^2(0+) \triangleq \dot{\theta}_1^2(0+)$), (13)式の t は $j+1$ 歩目の着地寸前の時刻を表わし $\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_1^{j+1}(0-)$ である。

(9)～(11)式を(12)式に代入するとA点からF点ま

で、すなわち歩行の着地寸前の角速度の j 歩目と $j+1$ 歩目の関係は(14)式のように表わされる。

$$\begin{aligned}\{\dot{\theta}_1^{j+1}(0-)\}^2 &= \left(1 - \frac{h_0}{I_a}\right)^2 \{\dot{\theta}_1(0-)\}^2 \\ &\quad + \{\dot{\theta}_1^2(0-)\} \text{の1次以下の項} \quad (14)\end{aligned}$$

また、E点以降で遊脚が接地するためにつぎの条件が必要である。

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1(0-) &> \frac{I_a}{I_a - h_0} \left[\omega \theta_{s1} - \frac{h_1 \dot{\phi}_{r1}(0) + h_2 \dot{\phi}_{r2}(0)}{I_a} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T \exp(-\omega\tau) v(\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \{g_{d1} \dot{\phi}_{r1}(T-) + g_{d2} \dot{\phi}_{r2}(T-) - \omega \theta_g\} \exp(-\omega T) \right] \\ \dot{\theta}_1(0-) &< \frac{\omega I_a}{(I_a - h_0) \sinh \omega T} \times \left\{ \theta_{s1} + \theta_{s1} \cosh \omega T \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega} \int_0^T \sinh \omega(T-\tau) v(\tau) d\tau \right\} \\ &\quad - \frac{h_1 \dot{\phi}_{r1}(0) + h_2 \dot{\phi}_{r2}(0)}{I_a - h_0} \quad (15)\end{aligned}$$

6. 安定な歩行が得られる条件

つぎにこの角速度の収束を考える。グラフ(Fig. 4)上で前記角速度の変化を求める。横軸に $\dot{\theta}_1^j(0-)$ をとる、縦軸に $\dot{\theta}_1^{j+1}(0-)$ をとる。このグラフ上に(14)式を描く。

このグラフを用いて以下のようにしてつぎつぎと歩行時の各ステップの着地角速度を求めることができる。まず、 j 歩目の着地角速度を横軸上 $\dot{\theta}_1^j(0)$ (P点)にとる。当然 $j+1$ 歩目の着地角速度は $\dot{\theta}_1^{j+1}(0-)$ (Q'点)になる。つぎにこの角速度を $\dot{\theta}_1^{j+1}(0-) = \dot{\theta}_1^j(0-)$ のグラフにより横軸上に移し、つぎの着地角速度を求める(Q点)。これを繰返すことにより着地角速度の推移が明らかになる。また、上記曲線と直線の交点を求めることにより着地角速度の収束値が求まる。

(9)式により、上部部の質量が脚部の質量に比べて大きく重心が上部にあるほど $1 - h_0/I_a$ の値は小さく

Fig. 4 $\dot{\theta}_1^{j+1}(0-) - \dot{\theta}_1^j(0-)$

Table 1 Parameters

l_1	0.6 m		
r_1	0.3 m	r_2	0.3 m
m_1	5.0 kg	m_2	5.0 kg
I_1	1.0 kg/m ²	I_2	1.0 kg/m ²
$\phi_{r1}(t) = \frac{2}{3}\pi t - \frac{1}{6}\pi$		$t < 0.5$	
$\frac{1}{6}\pi$		$0.5 \leq t$	
$\phi_{r2}(t) = -\frac{2}{3}\pi t + \frac{1}{6}\pi$		$t < 0.5$	
$-\frac{1}{6}\pi$		$0.5 \leq t$	

Fig. 5 Simulation

なり、したがって直線と曲線のなす角を大きくしやすく、着地角速度が早く収束させることがわかる。

例として Table 1 のパラメータを用い計算した結果を Fig. 5 に示す。図の例では初期接地角速度が $1.097 < \dot{\theta}_1 < 2.232$ (rad/s) で安定な歩行に収束することがわかる。なお図中には参考のため $\phi_i(t) = \phi_{r,i}(t)$ の仮定のもとで非線形モデルに対し計算機シミュレーションを行った結果を破線で示した。

7. ま と め

高ゲインフィードバックを用いた 2 足歩行の解析法を提案した。これは、過去の高ゲインフィードバックを用いた解析法に比べ、速度の不連続な点での追従性の解析にも無理がなく、歩行の安定性の解析においても近似の少ない点で有利なものである。また、この方法により安定な歩行の実現のメカニズムを明らかにし、目標相対角、ロボットのパラメータなどが満たすべき条件を明らかにした。

同方法を実験ロボットに適用するときには、ゲインが有限であること、機械的、電気的な遅れの存在、がたの存在などによる影響を無視することはできないと考えられる。今後、これらを含んだ解析を行い実験を進める必要がある。ただし、われわれのロボットに対しパワーアンプが飽和する程度の可能な限りの高ゲインを与えることにより、ここで得られた解析と同様の結果を得たことを付け加えておく。

特異摂動法に関して相談にのっていただいた名古屋大学鈴木正之氏に感謝します。

参 考 文 献

- 1) 宮崎, 有本: 特異摂動法による多自由度 2 足歩行系の解析, 計測自動制御学会論文集, 15-4, 498/504 (1979)
- 2) 下山, 三浦, 光石: 2 足歩行ロボット BIPER 4 の歩行に関する研究, 日本機械学会論文集 C 編, 49-444, 1372/1381 (1983)
- 3) 古荘, 森塚, 増淵: 局所フィードバックの概念を考慮した 2 足歩行の低次元モデル, 計測自動制御学会論文集, 17-5, 596/601 (1981)
- 4) 高西, はか: 足首部にトルク制御機能を有する 2 足歩行機械による準動歩行の研究, 第 3 回バイオメカニズム学術講演会, 10/11 (1982)
- 5) 柏瀬, はか: 高速 2 足歩行ロボットの制御方式と実現, 第 1 回知能移動ロボットシンポジウム, 12 (1982)
- 6) 細江, 武市, 熊井, 伊藤: 高ゲインフィードバックを用いた 2 足歩行の安定解析, SICE 第 14 回制御理論シンポジウム資料, 115/120 (1985)

《付 録》

(5) 式に初期値 $\mathbf{x}(0) = [\theta_1(0), \phi_{r1}(0), \phi_{r2}(0)]^T$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = [\dot{\theta}_1(0), \dot{\phi}_{r1}(0), \dot{\phi}_{r2}(0)]^T$ を与え, ラプラス変換する。

$$\mathbf{X}(s) = \hat{\mathbf{A}}^{-1}(s) \{s\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(0) + \hat{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{x}}(0) + \alpha\mathbf{B}\mathbf{x}(0) + \alpha^2\bar{\mathbf{D}}\boldsymbol{\phi}_r(s)\} \quad (\text{A.1})$$

ここで $\hat{\mathbf{A}}(s)$ は

$$\hat{\mathbf{A}}(s) = \bar{\mathbf{A}}s^2 + \bar{\mathbf{B}}\alpha s + \bar{\mathbf{C}}_0 + \bar{\mathbf{C}}_1\alpha^2 \quad (\text{A.2})$$

で与えられる。また, 閉ループ系の極は $\det \hat{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$ において得られ, そのうちの 2 個, λ_1, λ_2 は $\alpha \rightarrow \infty$ とすることにより (A.3) 式を満たす有限値 $\pm\omega$ ($\omega = \sqrt{-\bar{c}_{011}/\bar{a}_{11}}$) となる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha^4} \det \hat{\mathbf{A}}(\lambda_i) \\ &= \begin{vmatrix} \bar{a}_{11}\lambda_i^2 + \bar{c}_{011} & \bar{a}_{12}\lambda_i^2 + \bar{c}_{012} & \bar{a}_{13}\lambda_i^2 + \bar{c}_{013} \\ 0 & k_{p1} & 0 \\ 0 & 0 & k_{p2} \end{vmatrix} \\ &= 0 \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

一方, 残りの 4 つの極, $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ は (A.4) 式に漸近し無限遠方に向かう。

$$\lambda_i = \bar{\lambda}_i\alpha + \mu_i(\alpha), \quad \mu_i(\alpha)/\alpha \rightarrow 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{\lambda}_i^2\alpha^6} \det \hat{\mathbf{A}}(\lambda_i) \\ &= \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12}\bar{\lambda}_i^2 & \bar{a}_{13}\bar{\lambda}_i^2 \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22}\bar{\lambda}_i^2 + k_{d1}\bar{\lambda}_i + k_{p1} & \bar{a}_{23}\bar{\lambda}_i^2 \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32}\bar{\lambda}_i^2 & \bar{a}_{33}\bar{\lambda}_i^2 + k_{d2}\bar{\lambda}_i + k_{p2} \end{vmatrix} \\ &= 0 \quad (i=3, 4, 5, 6) \end{aligned}$$

この λ_i ($i=3, 4, 5, 6$) は (4.2) 式の $k_{p1}, k_{p2}, k_{d1}, k_{d2}$ により任意に与えることができる。これらは左半平面に存在するように設定しているものとする。

また, λ_i を用いると $\hat{\mathbf{A}}^{-1}(s)$ は (A.5) 式と表わすこ

とができる。

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}^{-1}(s) &= \frac{\text{adj } \hat{\mathbf{A}}(s)}{\det \hat{\mathbf{A}} \prod_{i=1}^6 (s - \lambda_i)} \quad (\text{A.5}) \\ &= \sum_{i=1}^6 R_i \frac{\text{adj } \hat{\mathbf{A}}(\lambda_i)}{\det \hat{\mathbf{A}}} \cdot \frac{1}{s - \lambda_i} \\ R_i &= \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 (\lambda_i - \lambda_j)}\end{aligned}$$

(A.1)式を逆変換するために右辺の各項ごとに上記の極に注意しつつ部分分数展開を考える。

まず $\alpha \rightarrow \infty$ で (A.6) 式が成り立つことに注意されたい。

$$\begin{aligned}i=1, 2, \quad m \leq 3, \quad \alpha \rightarrow \infty \\ \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{R_i \lambda_i^l \alpha^m}{s - \lambda_i} \right) &= \frac{\lambda_i^l \alpha^m}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 (\lambda_i - \lambda_j)} \exp \lambda_i t \\ &\rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha^m}{\alpha^4} \exp \lambda_i t \times \text{constant} = 0 \\ i=3, 4, 5, 6 \quad \alpha \rightarrow \infty \\ \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{R_i \lambda_i^l \alpha^m}{s - \lambda_i} \right) &= \frac{\lambda_i^l \alpha^m}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 (\lambda_i - \lambda_j)} \exp \lambda_i t \\ &\rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{1+m}}{\alpha^5} \exp \lambda_i t \times \text{constant} = 0 \\ \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_4 \bar{\lambda}_5 \bar{\lambda}_6 \det \bar{\mathbf{A}} &= \bar{a}_{11} k_{p1} k_{p2} \quad (\text{A.6})\end{aligned}$$

この結果を (A.1) 式の逆変換の計算に利用するため、 $\text{adj } \hat{\mathbf{A}}(\lambda)$ の各要素の α に関する次数、および $\alpha^l \lambda^m$ の形の項を $l+m$ 次とみたときの次数をあらかじめ求めておく、それらはつぎのように表わされる。ただし $(r, p+q)$ は α に関して r 次、 $\alpha^l \lambda^m$ の形の項に関して $p+q$ 次であることを表わす。

$$\text{adj } \hat{\mathbf{A}}(s) = \begin{bmatrix} (4, 4) & (2, 4) & (2, 4) \\ (2, 4) & (2, 4) & (0, 4) \\ (2, 4) & (0, 4) & (2, 4) \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

(A.1)式の最初の3項はそれぞれつぎのように逆変換されることが容易にわかる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(s \hat{\mathbf{A}}^{-1}(s)) &= \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8a}) \\ * &= \frac{\lambda_1 k_{p1} k_{p2}}{\det \bar{\mathbf{A}}(\lambda_1 - \lambda_2) \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_4 \bar{\lambda}_5 \bar{\lambda}_6} \exp \lambda_1 t \\ &\quad + \frac{\lambda_1 k_{p1} k_{p2}}{\det \bar{\mathbf{A}}(\lambda_2 - \lambda_1) \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_4 \bar{\lambda}_5 \bar{\lambda}_6} \exp \lambda_2 t \\ &= \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2) \bar{a}_{11}} \exp \lambda_1 t + \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1) \bar{a}_{11}} \exp \lambda_2 t\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\bar{a}_{11}} \cosh \omega t$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\hat{\mathbf{A}}^{-1}(s)) = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8b})$$

$$\begin{aligned}* &= \frac{k_{p1} k_{p2}}{\det \bar{\mathbf{A}}(\lambda_1 - \lambda_2) \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_4 \bar{\lambda}_5 \bar{\lambda}_6} \exp \lambda_1 t \\ &\quad + \frac{k_{p1} k_{p2}}{\det \bar{\mathbf{A}}(\lambda_2 - \lambda_1) \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_4 \bar{\lambda}_5 \bar{\lambda}_6} \exp \lambda_2 t \\ &= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2) \bar{a}_{11}} \exp \lambda_1 t + \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1) \bar{a}_{11}} \exp \lambda_2 t \\ &= \frac{1}{\bar{a}_{11} \omega} \sinh \omega t\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha \hat{\mathbf{A}}^{-1}(s) \bar{\mathbf{B}}) = 0 \quad (\text{A.8c})$$

一方、 $\alpha^2 \hat{\mathbf{A}}^{-1}(s) \bar{\mathbf{D}} \phi_r(s)$ の逆変換は以下のように畳み込みで表わされる。

まず (A.2) 式、および (A.3) 式から

$$\begin{aligned}i=1, 2 \\ \frac{1}{\alpha^4} (\text{adj } \hat{\mathbf{A}}(\lambda_i))_{22} \alpha^2 k_{p1} &= (\bar{a}_{11} \lambda_i^2 + c \bar{0}_{11}) k_{p1} k_{p2} = 0 \\ \frac{1}{\alpha^4} (\text{adj } \hat{\mathbf{A}}(\lambda_i))_{33} \alpha^2 k_{p2} &= (\bar{a}_{11} \lambda_i^2 + c \bar{0}_{11}) k_{p1} k_{p2} = 0 \\ \frac{1}{\alpha^4} (\text{adj } \hat{\mathbf{A}}(\lambda_i))_{32} \alpha^2 k_{p2} &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\lambda_i^4}{\alpha^2} \times \text{constant} = 0 \\ \frac{1}{\alpha^4} (\text{adj } \hat{\mathbf{A}}(\lambda_i))_{23} \alpha^2 k_{p1} &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\lambda_i^4}{\alpha^2} \times \text{constant} = 0\end{aligned}$$

が得られる。また (A.10) 式が成り立つことが確かめられる。

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left(\sum_{i=3}^6 \frac{R_i \alpha^2 \lambda_i^4}{s - \lambda_i} \phi_{rk}(s) \right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{i=3}^6 R_i \alpha^2 \bar{\lambda}_i^4 \exp(\bar{\lambda}_i \alpha(t-\tau)) \phi_{rk}(\tau) d\tau \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{i=3}^6 \frac{\alpha \bar{\lambda}_i^4}{\lambda_i^2 \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^6 (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)} \cdot \\ &\quad \cdot \exp(\bar{\lambda}_i \alpha(t-\tau)) \phi_{rk}(\tau) d\tau \\ &= - \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{i=3}^6 \frac{\bar{\lambda}_i}{\prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^6 (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)} \phi_{rk}(t) \\ &\quad + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{i=3}^6 \frac{\bar{\lambda}_i}{\prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^6 (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)} \exp(\bar{\lambda}_i \alpha t) \phi_{rk}(0) \\ &\quad + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{i=3}^6 \frac{\bar{\lambda}_i}{\prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^6 (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)} \cdot \\ &\quad \cdot \exp(\bar{\lambda}_i \alpha(t-\tau)) \phi_{rk}(\tau) d\tau\end{aligned}$$

$$=0 \quad (k=1, 2) \quad (\text{A. 10 a})$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left(\sum_{i=3}^6 \frac{R_i \alpha^3 \lambda_i^3}{s - \lambda_i} \phi_{rk}(s) \right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{i=3}^6 R_i \alpha^3 \bar{\lambda}_i^3 \exp(\bar{\lambda}_i \alpha(t-\tau)) \phi_{rk}(\tau) d\tau \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{i=3}^6 \frac{\alpha \bar{\lambda}_i^3}{\bar{\lambda}_i^2 \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^6 (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)} \cdot \\ & \quad \cdot \exp(\bar{\lambda}_i \alpha(t-\tau)) \phi_{rk}(\tau) d\tau \\ &= - \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{i=3}^6 \frac{1}{\prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^6 (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)} \phi_{rk}(t) \\ & \quad + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{i=3}^6 \frac{1}{\prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^6 (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)} \exp(\bar{\lambda}_i \alpha t) \phi_{rk}(0) \\ & \quad + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{i=3}^6 \frac{1}{\prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^6 (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)} \cdot \\ & \quad \cdot \exp(\bar{\lambda}_i \alpha(t-\tau)) \phi_{rk}(\tau) d\tau \\ &=0 \quad (k=1, 2) \quad (\text{A. 10 b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left(\sum_{i=3}^6 \frac{R_i \alpha^4 \lambda_i^2}{s - \lambda_i} \phi_{rk}(s) \right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{i=3}^6 R_i \alpha^4 \bar{\lambda}_i^2 \exp(\bar{\lambda}_i \alpha(t-\tau)) \phi_{rk}(\tau) d\tau \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{i=3}^6 \frac{\alpha \bar{\lambda}_i^2}{\bar{\lambda}_i^2 \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^6 (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)} \cdot \\ & \quad \cdot \exp(\bar{\lambda}_i \alpha(t-\tau)) \phi_{rk}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= - \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{i=3}^6 \frac{1}{\bar{\lambda}_i \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^6 (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)} \phi_{rk}(t) \\ & \quad + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{i=3}^6 \frac{1}{\bar{\lambda}_i \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^6 (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)} \exp(\bar{\lambda}_i \alpha t) \phi_{rk}(0) \\ & \quad + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{i=3}^6 \frac{1}{\bar{\lambda}_i \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^6 (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)} \cdot \\ & \quad \cdot \exp(\bar{\lambda}_i \alpha(t-\tau)) \phi_{rk}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_4 \bar{\lambda}_5 \bar{\lambda}_6} \phi_{rk}(t) \quad (k=1, 2) \quad (\text{A. 10 c}) \end{aligned}$$

したがって $\mathcal{L}^{-1}(\alpha^2 \hat{A}^{-1}(s) \bar{D} \Phi_r(s))$ は (A. 11) 式となる。

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha^2 \hat{A}^{-1}(s) \bar{D} \Phi_r(s)) = \begin{bmatrix} *_{11} & *_{12} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A. 11})$$

$$\begin{aligned} *_{11} &= \frac{\bar{a}_{12} \omega^2 + \bar{c} 0_{12}}{\omega \bar{a}_{11}} \int_0^t \sinh \omega(t-\tau) \phi_{r1}(\tau) d\tau \\ & \quad - \frac{\bar{a}_{12}}{\bar{a}_{11}} \phi_{r1}(t) \\ *_{12} &= \frac{\bar{a}_{13} \omega^2 + \bar{c} 0_{13}}{\omega \bar{a}_{11}} \int_0^t \sinh \omega(t-\tau) \phi_{r2}(\tau) d\tau \\ & \quad - \frac{\bar{a}_{13}}{\bar{a}_{11}} \phi_{r2}(t) \end{aligned}$$

以上から、 $\theta_1(t)$, $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ が求まり (6) 式となる。