緩和フィルタを用いた有限時間整定制御の応答改善

吉 田 宏*

Improved Response of Finite Time Settling Control with Softening Filters

Hiroshi YOSHIDA*

The FTSC (Finite Time Settling Control) algorithm previously developed by Y. Takahashi and M. Tomizuka has the following advantages;

(1) The parameters of the process model may be easily obtained by measuring the S-shaped step responses typical in many industrial processes.

(2) The off-line computation of the control parameters and the on-line control operations are very simple.

(3) The control algorithm may be implemented by utilizing the microcomputers.

Furthermore, this FTSC algorithm has been put to some practical uses. However, it is known that an extensive overshoot is generated which is called a 'wind-up phenomenon' caused by the saturation of the control inputs where integral action is contained in the feedback control system. Y. Takahashi and M. Tomizuka pointed out that FTSC algorithm with a first-order (or one-step) softening filter is effective to diminish these overshoots. But the optimal determination of the filter parameter was not discussed in detail. Thus, in this paper a new design method is proposed to determine optimally the parameters of the softening filters as follows;

(1) The first-order filter is extended to an L -th order filter.

(2) The parameters of the filter are adjusted so as to minimize the settling time under the amplitude limitations of the control inputs.

The proposed method here may be considered as a practical and effective one to improve

the extensive overshoots of the output responses in the FTSC systems.

Key Words: finite time settling control, DDC algorithm, bounded input control, microprocessor application

1. ま え が き

富塚らの提案している有限時間整定制御系の設計法(以下、従来法と呼ぶ)^{1),2)}は、①制御対象モデルのパラメータが実測データから容易に求められること、②制御パラメータの計算およびオンライン制御に必要な演算が容易であること、③マイコンの使用を前提としていること、などの実用的見地から優れた特長を有し、その応用例もいくつか報告されている^{3),4)}。しかし積分動作を含む制御系では、飽和による操作量の制限のため過大なオーバーシュートが生じること(ウィンドアップ現象)が知られている⁵⁾。従来法ではその対策の一つとして操作量の飛躍を緩和するための緩和フィルタの併用法を提案しているがフィルタのパラメータの最適な決定法については、十分に議論されていない。そこで本論文では、従来法における1段の緩和フィルタを一般に L 段に拡張し、そのパラメータを最適に調整するための設計法について提案する。

本設計法は従来法の特長を保ちながら、さらに操作量に制限のある場合にも対応でき、実用上有効であると考えられる。

2. 制御系の構成

Fig. 1 は緩和フィルタを含んだ制御系の構成を示す。同図において制御対象のモデル $G_p(z)$ は、その単位ステップ応答を測定したのち、一定のサンプリング周期 ΔT ごとにサンプルして得たデータの増分値 $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ からつぎのように求められる^{1),2)}。

* 鹿児島大学工学部 鹿児島市郡元 1-21-40

* Faculty of Engineering, Kagoshima University, Kagoshima

(Received March 25, 1986)

(Revised August 4, 1986)

Fig. 1 Feedback control system with a softening filter

$$G_p(z) = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n}{z^{n-1}(z-p)} \quad (1)$$

ここで、 n は適当な自然数とし、

$$b_1 = g_1, \quad b_i = g_i - p g_{i-1}; \quad i=2, 3, \dots, n \quad (2)$$

とする。ただし、 $0 \leq p < 1$ とし、 p は(1)式のモデルの定常ゲイン $G_p(1)$ が制御対象の定常ゲイン K_p と一致するように定める。このとき

$$p = 1 - \frac{g_n}{K_p - (g_1 + g_2 + \dots + g_{n-1})} \quad (3)$$

となる。さらに、(1)式のモデルをつぎのような状態変数表示式で表わす。

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{P}\mathbf{x}(k) + \mathbf{q}u(k) \quad (4)$$

$$y(k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(k) \quad (5)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{c} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (7)$$

ここに、 $\mathbf{x}(k)$ は $n \times 1$ 状態ベクトル、 $u(k)$ はスカラー操作量、 $y(k)$ はスカラー出力とする。また、次式で表わされる $G_s(z)$ は操作量の飛躍を緩和するために挿入された L 段の緩和フィルタである。

$$G_s(z) = \frac{h_0 z^L + h_1 z^{L-1} + \dots + h_L}{z^L + f_1 z^{L-1} + \dots + f_L} \quad (8)$$

ただし、

$$h_L = 1 - h_0 - h_1 - \dots - h_{L-1} \quad (9)$$

とする(注1)。Fig. 1 において、閉ループ系の極がすべて零となるように状態フィードバック係数の値および緩和フィルタのパラメータ $f_1, f_2, \dots, f_L$ を調整すれば次式を得る(付録参照)。

$$k_1 = 0 \quad (10)$$

$$k_2 = k_3 = \dots = k_{n-1} = k_0 = \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \quad (11)$$

(注1) とくに、 $L=0$ のとき $G_s(z)=1$ とみなす。また(9)式は、従来の1段の緩和フィルタ $G_s(z)=[hz+(1-h)]/(z+\phi)$ を L 段に拡張する場合に必要な条件である。これより、フィードバック係数(10)、(11)式が文献1)と同一の簡単な公式で与えられ、従来法の特長をそのまま保有しているアルゴリズムが導かれる。

$$k_n = \frac{1}{g_n} [1 + \lambda - (g_1 + g_2 + \dots + g_{n-1})k_0] \quad (12)$$

$$f_i = \xi_{i-1} - \lambda \eta_{i-1}; \quad i=1, 2, \dots, L \quad (13)$$

ただし

$$\eta_0 = h_0, \quad \xi_0 = 1 + p - h_0, \quad \lambda = \frac{\xi_L}{\eta_L} \quad (14)$$

$$\xi_i = p \xi_{i-1} + 1 - (h_0 + h_1 + \dots + h_i); \quad i=1, 2, \dots, L \quad (15)$$

$$\eta_i = p \eta_{i-1} + h_i; \quad i=1, 2, \dots, L \quad (16)$$

とする。なお L および $h_0, h_1, \dots, h_{L-1}$ は自由に選定できるパラメータである。

Fig. 1 において(10)~(16)式が満足されているとき、次式が導かれる(付録(A.15)式など参照)。

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{G(z)}{1+G(z)} \\ &= k_0(h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_L z^{-L}) \\ &\quad \times (b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{U(z)}{R(z)} &= \frac{Y(z)}{R(z)} \cdot \frac{1}{G_p(z)} \\ &= k_0(1 - pz^{-1})(h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_L z^{-L}) \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、 $G(z)$ は Fig. 1 の一巡伝達関数とする。

したがって、任意の大きさのステップ状の設定入力

$$R(z) = r(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) \quad (19)$$

が加えられたとき、

$$Y(z) = y(0) + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots \quad (20)$$

$$U(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \dots \quad (21)$$

となる。ただし、 $u(k)$ および $y(k)$ は次式を満たすことが導かれる(注2)。

$$u(k) = r k_0 \left[(1-p) \sum_{j=0}^{k-1} h_j + h_k \right]; \quad k=0, 1, \dots, L \quad (22)$$

$$u(L+1) = u(L+2) = \dots = r k_0(1-p) = u_i = \frac{r}{K_p} \quad (23)$$

$$y(0) = 0 \quad (24)$$

$$y(k) = r k_0 \sum_{j=1}^k \phi_{k-j} b_j; \quad k=1, 2, \dots, n+L-1 \quad (25)$$

$$y(n+L) = y(n+L+1) = y(n+L+2) = \dots = r \quad (26)$$

ここで

$$\phi_i = h_0 + h_1 + \dots + h_i; \quad i=0, 1, \dots, L-1 \quad (27)$$

$$\phi_i = 1; \quad i \geq L \quad (28)$$

$$b_i = 0; \quad i > n \quad (29)$$

とし、 u_i は操作量 $u(k)$ の定常値を表わす。上式よ

(注2) (23)式において、 $K_p = (b_1 + b_2 + \dots + b_n)/(1-p)$ および(11)式を用いた。

り操作量 $u(k)$ は $(L+1)$ 時点以降、定常値 u_s に一致し、また出力 $y(k)$ は $(n+L)$ 時点以降、 $r(k)$ と一致することがわかる。

同様に、操作量と同一の場所に入る任意の大きさのステップ状外乱

$$D(z) = d(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) \quad (30)$$

が加えられたとき、 $y(k)$ は $(n+L+1)$ 時点以降、 $r(k)$ と一致することも導かれる。なお、外乱に対する整定時点に比べ、設定入力に対する整定時点が1だけ短くなる理由は、 $R(z)$ から $Y(z)$ までのパルス伝達関数(17)式の $(n+L+1)$ 個の極 ($z=0$) が、積分動作に含まれている1個の零点 ($z=0$) と、いわゆる極零消去を行い、 $(n+L)$ 個の極を有する系のように動作するためであると考えられる。

3. 緩和フィルタのパラメータの決定法

前記により、有限整定ステップ数 $(n+L)$ は緩和フィルタの段数 L とともに伸縮できることがわかった。ところで実際の操作量は振幅が制限されることが多い。そこで本稿では

$$|u(k)| \leq U_m; k=0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

なる条件のもとに、Fig. 1 の有限時間整定制御系の整定ステップ数 $(n+L)$ が最小、したがって L が最小となるように緩和フィルタのパラメータを決定する方法を提案する。以下、このようなパラメータを最適パラメータと呼ぶ。

3.1 最適操作量の決定

本節では、Fig. 1 において整定ステップ数が最小となるような操作量（以下、最適操作量と呼ぶ）が次式を満たすことを示す。

$$u(0) = u(1) = \dots = u(L-1) = U_m \quad (32)$$

$$u(L) = rk_0[1 - p(h_0 + h_1 + \dots + h_{L-1})] \quad (33)$$

ただし、 L は次式を満たす最小の非負整数とする。

$$(1 + p + \dots + p^{L-1})U_m > \frac{u_s}{1-p} \quad (34)$$

なお初期状態は零とし、簡単のためつぎの仮定を設けた。

$$rK_p > 0, b_n g_n \neq 0 \quad (35)$$

まず(4)～(7)式において正則な $n \times n$ 行列 T による状態変数変換(注3)。

$$x(k) = T\hat{x}(k) \quad (36)$$

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ q_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n-1} & b_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

を行えば、(1)式のモデルはつぎのように表わされる。

$$\hat{x}(k+1) = \bar{P}\hat{x}(k) + \bar{q}u(k) \quad (38)$$

$$y(k) = \bar{c}\hat{x}(k) \quad (39)$$

$$\bar{P} = T^{-1}PT = \begin{bmatrix} p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{q} = T^{-1}q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\bar{c} = cT = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n-1} \quad b_n] \quad (41)$$

ここに、 $\hat{x}(k)$ は新しい $n \times 1$ 状態ベクトルである。

Fig. 2 は上式に基づいて(1)式のモデルのプロック線図を表わしたものである。同図より明らかに $G_p(z)$ は1次系

$$S_1: \bar{x}_1(k+1) = p\bar{x}_1(k) + u(k) \quad (42)$$

の後段に $(n-1)$ 個のむだ時間要素を含んだ系が従属結合されているものとみなされる。後者はフィードバックループのない単純な構造をもった系であるから、 $G_p(z)$ の出力 $y(k)$ を設定入力 $r(k)$ に最小ステップ数で一致させるためには1次系 S_1 の状態 $\bar{x}_1(k)$ をその定常値 $\bar{x}_{1s}$ に最小ステップ数で移したのち、その後 $(n-1)$ ステップの間、操作量を(23)式の定常値 u_s に保ち続けられればよい。ここで定常値 $\bar{x}_{1s}$ は(42)式からつぎのように求められる。

$$\bar{x}_{1s} = \frac{u_s}{1-p} = \frac{r}{(1-p)K_p} \quad (43)$$

以上により最適操作量は、(31)式の拘束のもとに1次系 S_1 の状態 $\bar{x}_1(k)$ を最小ステップ数でその定常値(43)式へ整定させることにより求められることがわかる。いっぽう1次系 S_1 の単位ステップ応答は単調に

Fig. 2 The block diagram of the process model $G_p(z)$

(注3) (4)～(7)式を採用すれば状態観測器の設計がきわめて簡単となる利点がある^{1),2)}が、(38)～(41)式は制御器を設計するのに都合のよい形式を有している。

Fig. 3 Flow diagram for the computation of softening filter parameters

増加する。これより、結局 (32)~(34) 式が導かれる。

3.2 最適パラメータの決定

つぎに、最適パラメータの値を求める。

まず、(22) 式を $h_0, h_1, \dots, h_{L-1}$ について解けば、

$$h_0 = \frac{u(0)}{k_0 r} \quad (44)$$

$$h_i = (p-1)(h_0 + h_1 + \dots + h_{i-1}) + \frac{u(i)}{k_0 r};$$

$$i = 1, 2, \dots, L-1 \quad (45)$$

を得る。上式に (32) 式を代入すれば、つぎのアルゴリズムを得る。

$$h_0 = \frac{U_m}{k_0 r}, \quad a_0 = h_0 \quad (46)$$

$$h_{i+1} = p h_i; \quad i = 0, 1, \dots, L-1 \quad (47)$$

$$a_{i+1} = a_i + h_{i+1}; \quad i = 0, 1, \dots, L-1 \quad (48)$$

$$L = \min \{i | a_i \geq 1\} \quad (49)$$

なお、(49) 式と (34) 式の L が同一のものであることは容易に確かめられる。Fig. 3 は以上の緩和フィルタのパラメータを決定するアルゴリズムを流れ図で表わしたものである。

4. 数 値 例

$$G_p(s) = \frac{K_p e^{-T_L s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (50)$$

なる連続時間制御対象の前段に零次ホールド要素を設けた場合について考える²⁾。ただし

$$K_p = 1, \quad T_1 = 1.5, \quad T_2 = 4, \quad T_L = 0.5, \quad U_m = 2 \quad (51)$$

とする。まず、 $n=5$, $\Delta T=1$ とすれば (50) 式の単位ステップ応答から、つぎのデータを得る。

$$q_1 = 0.01792, \quad q_2 = 0.1031, \quad q_3 = 0.1358$$

$$q_4 = 0.1343, \quad q_5 = 0.1192$$

さらに、(3) 式から $p = 0.8042$ を得る。よって (1)

Fig. 4 Output signals for a step reference input

Fig. 5 Control input signals for a step reference input

式のモデルは次式のようなになる。

$$G_p(z) = \frac{0.01792z^4 + 0.08873z^3 + 0.05290z^2 + 0.02516z + 0.01123}{z^4(z - 0.8042)} \quad (52)$$

このとき、有限時間整定制御系の応答を求めると Fig. 4 および Fig. 5 を得る。ただし、 $r=1$ とする。破線は緩和フィルタのない場合 ($L=0$) の応答であり、操作量が制限されているためウィンドアップ現象による応答の劣化がみられる。つぎに Fig. 4 および Fig. 5 の実線は、本設計法による L 段緩和フィルタを採用した場合の応答である。ここで設計に用いた (52) 式のモデル $G_p(z)$ が (50) 式の制御対象+零次ホールド要素の動特性の近似的な表現であるため、 $u(k)$ および $v(k)$ はそれぞれ $k=L+1$ および $k=n+L$ で必ずしも整定していない。しかし実用上は、操作量の飽和を考慮しながらほぼ最短ステップ数で制御が行われているとみなして差し支えないであろう。なお、パラメータは Fig. 3 および (10)~(16) 式からつぎのように得られる。

$$L=3, \quad h_0=0.3917, \quad h_1=0.3149, \quad h_2=0.2533 \quad (53)$$

$$f_1=0.8371, \quad f_2=0.5040, \quad f_3=0.0732 \quad (54)$$

$$k_1=0, \quad k_2=k_3=k_4=k_0=5.106, \quad k_5=3.954 \quad (55)$$

以上により、本設計法を用いるとオーバーシュートが解消され応答波形が改善されることがわかる。

5. 結 び

従来法における有限時間整定制御系の緩和フィルタ

を1段から L 段に拡張し、ステップ状設定入力に対し最短時間応答となるようにそのパラメータを決定する方法を提案した。本設計法は操作量の振幅に制限のある場合に生じる過大なオーバーシュートを抑制でき、したがってウィンドアップ現象を解消するための実用上有効な設計法であると考えられる。

なお、有限時間状態観測器^{1), 2)}を併用した場合にもまったく同様に議論できるが、簡単のため省略した。また本設計法は多入力多出力系の場合にも適用できるように拡張すべきであるが、これについては現在検討中である。

参考文献

- 1) D. M. Auslander, et al.: Direct Digital Process Control-Practice and Algorithms for Microprocessor Application, Proc. IEEE, **66-2**, 199/208 (1978)
- 2) 富塚誠義：マイクロコンピュータによる現代制御理論の実用化とそのアルゴリズム、計測と制御, **18-8**, 640/649 (1979)
- 3) 井上, 北川, 有本：ボイラのモデルプラントのデジタル制御, 計測自動制御学会論文集, **17-9**, 873/879 (1981)
- 4) 村上, 前田, 永田：マイクロプロセッサを用いた自動車の最適速度制御, 計測自動制御学会論文集, **19-7**, 569, 573 (1983)
- 5) 高橋安人：システムと制御(下), 359, 岩波書店 (1978)

付 録

はじめに、Fig. 1 における一巡伝達関数を求めるため、初期状態を零として(4)～(7)式を z 変換すれば $Y(z) = X_1(z)$, $X_i(z) = G_i(z)U(z)$; $i=1, 2, \dots, n$ (A. 1)

を得る。ここで $G_i(z) = G_p(z)$ とし

$$G_i(z) = \frac{B_i(z)}{A(z)}; i=1, 2, \dots, n \quad (\text{A. 2})$$

$$B_i(z) = g_i z^{n-1} + b_{i+1} z^{n-2} + \dots + b_{n-1} z^i + b_n z^{i-1}; \\ i=1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{A. 3})$$

$$A(z) = z^{n-1}(z-p), B_n(z) = g_n z^{n-1} \quad (\text{A. 4})$$

とする。このとき次式が成立する。

$$\sum_{i=1}^n k_i X_i(z) = \sum_{i=1}^n k_i G_i(z)U(z) \\ = (\beta_0 z^{n-1} + \beta_1 z^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}) \frac{U(z)}{A(z)} \quad (\text{A. 5})$$

ただし

$$\beta_0 = k_1 g_1 + k_2 g_2 + \dots + k_n g_n \quad (\text{A. 6})$$

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n-i} k_j b_{i+j}; i=1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{A. 7})$$

とする。さらに、Fig. 1 より次式を得る。

$$V(z) = W(z) - \sum_{i=1}^n k_i X_i(z) \quad (\text{A. 8})$$

上式に(A. 5)式を代入し、 $U(z) = G_s(z)V(z)$ とおけば

$$\frac{W(z)}{V(z)} = 1 + \frac{G_s(z)}{A(z)} (\beta_0 z^{n-1} + \beta_1 z^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}) \quad (\text{A. 9})$$

を得る、(A. 9) 式に(8)式を代入し、 $G_W(z) = V(z)/W(z)$ とおけば次式を得る。

$$G_W(z) = \frac{A(z)(z^L + f_1 z^{L-1} + \dots + f_L)}{z^{n+L} + d_1 z^{n+L-1} + \dots + d_{n+L-1} z + d_{n+L}} \quad (\text{A. 10})$$

ここで、 d_i は次式によって与えられる。

$$d_i = f_i - p f_{i-1} + \sum_{j=0}^{i-1} h_j \beta_{i-1-j}; i=1, 2, \dots, L+n \quad (\text{A. 11})$$

ただし、

$$f_0 = 1, f_i = 0; i \geq L+1 \quad (\text{A. 12})$$

$$h_i = 0; i \geq L+1 \quad (\text{A. 13})$$

$$\beta_i = 0; i \geq n \quad (\text{A. 14})$$

とする。よって、Fig. 1 の一巡伝達関数は

$$G(z) = G_c(z)G_W(z)G_s(z)G_p(z) \\ = \frac{k_0 z(h_0 z^L + h_1 z^{L-1} + \dots + h_L)B_1(z)}{(z-1)(z^{n+L} + d_1 z^{n+L-1} + \dots + d_{n+L})} \quad (\text{A. 15})$$

となる。ただし、 $G_c(z) = k_0 z/(z-1)$ とする。

以上により、Fig. 1 の閉ループ系の特性方程式 $1+G(z)=0$ はつぎのようになる。

$$z^{n+L+1} + \omega_1 z^{n+L} + \dots + \omega_{n+L} z + \omega_{n+L+1} = 0 \quad (\text{A. 16})$$

ここで、 ω_i は次式によって与えられる。

$$\omega_i = d_i - d_{i-1} + k_0 \sum_{j=1}^i h_{i-j} b_j; \\ i=1, 2, \dots, n+L+1 \quad (\text{A. 17})$$

ただし、

$$d_0 = 1, d_{n+L+1} = 0 \quad (\text{A. 18})$$

$$b_i = 0; i \geq n+1 \quad (\text{A. 19})$$

とする。ゆえに、閉ループ系の $(n+L+1)$ 個の極をすべて零と指定するためには

$$\omega_i = 0; i=1, 2, \dots, n+L+1 \quad (\text{A. 20})$$

とおけばよい。

まず(A. 6), (A. 7), (A. 11)～(A. 14), (A. 17)～(A. 20)式により

$$\omega_{n+L+1} = -\theta_0 k_1 = 0 \quad (\text{A. 21})$$

$$\omega_{n+L} = (\theta_0 - \theta_1)k_1 + \theta_0(k_0 - k_2) = 0 \quad (\text{A. 22})$$

$$\omega_{n+L-i} = (\theta_i - \theta_{i+1})k_1 + \theta_i(k_0 - k_2) + \theta_{i-1}(k_2 - k_3) \\ + \dots + \theta_0(k_{i+1} - k_{i+2}) = 0; \\ i=1, 2, \dots, n-3 \quad (\text{A. 23})$$

を得る。ただし、

$$\theta_0 = h_L b_n \neq 0 \quad (\text{A. 24})$$

$$\theta_i = \sum_{j=0}^i h_{L-j} b_{n-i+j}; \quad i=1, 2, \dots, n-2 \quad (\text{A. 25})$$

$$h_i = 0; \quad i \leq 0 \quad (\text{A. 26})$$

とする. よって (A. 21) 式より $k_1=0$ すなわち (10) 式を得る. また $k_1=0$ を (A. 22), (A. 23) 式に代入すれば

$$k_2 = k_3 = \dots = k_{n-1} = k_0 \quad (\text{A. 27})$$

が順次得られる. つぎに, (A. 20) 式を辺々相加えと

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n+L+1} = 0 \quad (\text{A. 28})$$

を得る. 上式に (A. 11) ~ (A. 14), (A. 17) ~ (A. 19) 式を代入すれば次式が導かれる.

$$k_0 = \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \quad (\text{A. 29})$$

さらに $k_1=0$ および (A. 27) 式の条件のもとに (A. 17) 式を変形すれば次式を得る.

$$\omega_i = f_i - (p+1)f_{i-1} + pf_{i-2} + (h_{i-1} - h_{i-2})\lambda$$

$$+ h_{i-1} = 0; \quad i = L+1, L, \dots, 2, 1 \quad (\text{A. 30})$$

ここで,

$$\lambda = k_0(g_1 + g_2 + \dots + g_{n-1}) + k_n g_n - 1 \quad (\text{A. 31})$$

とする. (A. 20), (A. 30) 式より次式を得る.

$$\sum_{j=0}^{i-1} p^j \sum_{k=1}^{i-j} \omega_k = f_i + \lambda \eta_{i-1} - \xi_{i-1} = 0;$$

$$i = L+1, L, \dots, 2, 1 \quad (\text{A. 32})$$

ただし,

$$\eta_i = \sum_{j=0}^i p^j h_{i-j}; \quad i = 0, 1, \dots, L \quad (\text{A. 33})$$

$$\xi_i = \sum_{j=0}^{i+1} p^j - \sum_{j=0}^i p^j (h_0 + h_1 + \dots + h_{i-j});$$

$$i = 0, 1, \dots, L \quad (\text{A. 34})$$

とする. ゆえに (A. 32) ~ (A. 34) 式より (13) ~ (16) 式が得られる. また (A. 31) 式から (12) 式を得る.

以上により (10) ~ (16) 式が導かれた.