追値予見ロバストサーボ系†

愛田 一雄*・北森 俊行**

A Robust Servo System with Preview Action

Kazuo AIDA* and Toshiyuki KITAMORI**

1. ま え が き

定値目標入力および外乱に対してロバスト定常特性をもつ予見制御系の設計法はいくつか提案されている^{1)~3)}。これらの論文では多項式目標入力への拡張は可能と考えられるが、一般に線形自由系の出力で表現される目標入力に対して、定常ロバストな追値予見制御系の設計法についての研究はまだないようである。この設計法としては、

(M1) 目標値の未来情報から仮想目標入力発生器の状態を、サーボ補償器をモデルとするオブザーバを用いて推定し、最適予見サーボ系⁴⁾の設計法を適用する

(M2) プラントとサーボ補償器をあわせた拡大系に対して、ステップ状目標入力の場合の上記の最適予見サーボ系の設計法を適用する

などが考えられる。

一方、 l 型サーボ系⁵⁾の研究が行われていたように定常特性を満足するためのサーボ補償器の次数はできるだけ抑えたいのも事実である。

本稿では(M2)の設計法を示し、制御系の定常特性、周波数特性について考察する。本制御系は任意の目標入力に対して、現在の時点を k とすると、 $k+l$ (l : 予見長さ) 時点以降を定値と仮定して設計した準最適逐次予見制御系である。連続系に対する早勢⁶⁾の制御系と等価な、土谷³⁾の最適逐次予見デジタル制御系で、プラントをプラントとサーボ補償器をあわせた拡大系に置き換え、(7)式で $\tilde{u}$ を u に置き換えた評

価関数を使って設計すると、本制御系が操作量 u を定値目標入力に対する定常値からの偏差ベクトル $\tilde{u}$ に置き換えている点を除けば、すなわち、プラントが1型以上であれば、両者の $0, \dots, l-1$ の予見制御係数は一致する。 l が大きくなれば l 番目の予見制御係数はほとんど無視できるので⁷⁾、このとき本制御系は早勢らの制御系に近い定常ロバストなデジタル予見サーボ系になっている。

2. 設 計

サンプリング時間 τ で離散値化した、可制御、可観測なプラントを

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (1)$$

とする。ここで、 $x(k) \in R^n$, $u(k) \in R^m$, $y(k) \in R^m$ で、 A, B, C は適当な次元の行列とする。

目標入力 $r(k)$ をステップと仮定して設計する。 l サンプリング先までの目標値が予見できるものとして、拡大目標入力システムをつぎのように表現する。

$$\begin{aligned} \hat{r}(k+1) &= \hat{A}_r \hat{r}(k) \\ r(k) &= \hat{I}_r \hat{r}(k) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\hat{r}(k) \triangleq [r^T(k) \ r^T(k+1) \ \dots \ r^T(k+l)]^T$$

$$\hat{I}_r \triangleq [I_m \ 0 \ \dots \ 0]$$

$$\hat{A}_r \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I_m \\ 0 & \dots & 0 & I_m \end{bmatrix}$$

サーボ補償器の離散値表現を

$$\begin{aligned} z(k+1) &= A_e z(k) + B_e e(k) \\ e(k) &\triangleq y(k) - r(k), \quad z(k) \in R^{pm} \end{aligned} \quad (3)$$

とし、(1),(3)式をあわせた拡大系が可制御となる条件

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_i I_n & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m \quad (4)$$

λ_i : A_e の固有値

が成立するものと仮定する。また、(4)式で $\lambda_i = 1$ とおくと、ステップ状目標入力に対してプラントが入出力可逆⁸⁾となる条件になるが、これも成立するものと

† 第20回自動制御連合講演会で発表(昭61・11)

* 新潟大学工学部 新潟市五十嵐2の町8050

** 東京大学工学部 東京都文京区本郷7-3-1

* Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata

** Faculty of Engineering, Tokyo University, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received February 25, 1987)

(Revised May 29, 1987)

Key Words: robust servo system, preview action, digital control

する. (1), (2), (3)式をあわせた複合系をつくる.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} w(k+1) \\ \hat{r}(k+1) \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} w(k) \\ \hat{r}(k) \end{bmatrix} + \bar{B} \tilde{u}(k) \\ \hat{y}(k) = \bar{D} \begin{bmatrix} w(k) \\ \hat{r}(k) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

$$w(k) \triangleq \begin{bmatrix} x(k) \\ z(k) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \tilde{u}(k) &= u(k) - \bar{u}(k) \\ \bar{u}(k) &= T_u r(k) \end{aligned}$$

$$\bar{A} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{A}_b \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} \triangleq \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_b \triangleq \begin{bmatrix} B T_u \hat{I}_l \\ -B_c \hat{I}_l \end{bmatrix}$$

$$\bar{D} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{D} & \vdots & -\hat{I}_l \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \end{bmatrix}, \quad \hat{D} \triangleq \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

$(\hat{D}, \hat{A})$ が可観測になるように D を選ぶ. $\bar{u}(k)$ は定値目標入力に対する $u(k)$ の定常状態であり, T_u は

$$\begin{bmatrix} A-I_n & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \quad (6)$$

の一意解である⁸⁾。(5)式の複合系に対して評価関数

$$J = \sum_{k=-l}^{\infty} \{e^T(k)Q_e e(k) + z^T(k)D^T Q_z D z(k) + \tilde{u}^T(k)R\tilde{u}(k)\} \quad (7)$$

Q_e : 準正定対称行列, Q_z , R : 正定対称行列
を最小にする制御則

$$u(k) = -\bar{K}^* \begin{bmatrix} w(k) \\ \hat{r}(k) \end{bmatrix} + T_u r(k) \quad (8)$$

の $\bar{K}^* \triangleq [\bar{K}^* \quad \bar{K}_r^*] (\bar{K}^* \triangleq [K_x^* \quad K_z^*], \bar{K}_r^* \triangleq [K_{r0}^*, \dots, K_{rL}^*])$ は Riccati の方程式を解いて求める.

目標入力がステップ状でない場合でも、 $T_{ur}(k)$ のフィードフォワード制御を加えるのは、ステップ状目標入力に対して最適性を確保すると同時に、3章で述べるように定常特性を改善するためである。

3. 定常特性

2章で述べた設計法で設計された追値予見ロバストサーボ系の定常特性に関してつぎの性質が得られる.

〈性質〉 本制御系はサーボ補償器を p 型とすると p 次の多項式目標入力に対しても定常特性を満足する。また、プラントがそのパラメータ変化に対して (6) 式の解 T_x , T_u が不変になるような構造であれば、 p 次以下の多項式目標入力に対して定常ロバストとなる。

少し準備をした後でこの性質を証明する.

$$r(k+i) = \sum_{j=1}^i \Delta r(k+j) + r(k) \quad (9)$$

$$\Delta r(k+i) \triangleq r(k+i) - r(k+i-1)$$

と表現できるので，(8)式の制御則の中の $-\hat{K}_r^* \hat{r}(k)$

Fig. 1 Equivalent block diagram of control system

 $+T_y r(k)$ は

$$-\hat{K}_r^* \hat{r}(k) + T_u r(k) = K_f r(k) + K_p \Delta \hat{r}(k) \quad (10)$$

$$K_f \triangleq F_0 + T_u,$$

$$K_p \triangleq [F_1, \dots, F_l],$$

$$F_i \triangleq - \sum_{i=i}^l K_{ri}^*$$

$$\Delta \hat{r}(k) \triangleq [\Delta r^T(k+1), \dots, \Delta r^T(k+l)]^T$$

と書き換えられる。このとき，つぎの補題が得られ，制御系は **Fig. 1** のように表現できる。

〔補題〕 K_x^*, K_f に関して次式が成立する.

$$K_f = K_r^* T_r + T_u \quad (11)$$

$$C(I_n - A + BK_x^*)^{-1}BK_f - I_m = 0 \quad (12)$$

(証明) (11)式は文献4)の補題3から得られる。
つぎに, (11)式に左から B をかけ, (6)式に代入して T_r を消去すると(12)式が得られる. (証明終)

(性質 1 の証明)

$r(k)$ に対する制御系の偏差の z 変換 $e(z)$ は

$$\begin{aligned}
e(z) = & -\{(z-1)^p I_m + C(zI_n - A + BK_x^*)^{-1}B \\
& \times K_z^* \text{adj}(zI_{pm} - A_c)B_c(z-1)^{-p(m-1)}\}^{-1} \\
& \times \{C(zI_n - A + BK_x^*)^{-1}BK_f - I_m\} \\
& \times (z-1)^p r(z) \quad (13)
\end{aligned}$$

となる。この式で、 $\text{adj}(zI_{pm}-A_c)(z-1)^{-p(m-1)}$ は $z \rightarrow 1$ で定数行列となるので、(12)式の関係を使うと、 $r(k)$ が p 次以下の多項式のとき、

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})e(z) = 0 \quad (14)$$

となることがわかる。 $\Delta f(k)$ は $r(k)$ が p 次のとき、 $(p-1)$ 次の多項式となるので、これに対する定常特性は p 型のサーボ補償器で保証される。なお、定値目標入力の場合は $\Delta f(k)$ は零となるので、0型のサーボ補償器で定常特性は満足される。つぎに、プラントのパラメータが変化しても(6)式を満足する T_s , T_u が変わらなければ、変化したパラメータに対しても(12)式が成立するので、(14)式も成立する。

(証明終)

性質の後半部を説明するつぎの例題を与えておく.

〔例題〕 プラントの伝達関数 $G_p(s)$ を

$$G_p(s) = \frac{k_0}{1+Ts} \cdot \frac{1}{s}, \quad \begin{array}{l} x_1: \text{変位} \\ x_2: \text{速度} \end{array}$$

とすると, $T_x = [1 \ 0]^T$, $T_u = 0$ となり, これは k_0, T

の変化に対して不変である。(11)式より $K_f = K_{x1}^*$ となるので、制御系は PI 型となり、プラントの $1/s$ が陽に現れて $r(k)$ に対して $(p+1)$ 型となる。

4. 周波数特性

プラントの伝達関数を

$$G_p(s) = 1/s^2$$

とする⁶⁾。各種サーボ補償器 ($G_c(s)$) に対する、 $r(z)$ から $y(z)$ への本制御系のパルス伝達関数 $G(z)$ の Bode 線図の一例 ($\tau = 0.1$, $Q_s = 10^4$, $Q_e = 0$, $R = 1$, $l = 5$) を

Fig. 2 に示す。フィードバック制御系および目標入力の有限整定オブザーバをもつ(M1)の制御系の周波数特性も同時に示してある。これらの周波数特性からつぎのことが考察できる。

(1) サーボ補償器のいかんにかかわらず、同じような周波数特性を示し、フィードバック制御系に比べて位相遅れが改善されて、低周波域での追従性が向上する。

(2) 予見制御は高周波域での追従性を犠牲にするが、これは操作量を抑える働きをするとともに、予見値に観測雑音が重畳する場合の影響も抑えられる。

(3) ある周波数の正弦状目標入力に対して定常ロバストになるように設計された制御系では、フィードバック制御系に比べて目標入力の周波数変動に対する定常感度が低下する。

(4) 本制御系は、目標入力のオブザーバをもつ(M1)のものとはほとんど同じ周波数特性をもち、予見ロバストサーボ系として十分な特性をもつといえる。

5. む す び

早勢ら⁶⁾の予見制御系に類似した追値予見ロバストサーボ系の一設計法を提案し、その定常特性と周波数

Fig. 2 Bode diagrams of $G(e^{j\omega})$

特性から、目標入力発生器の状態に関するオブザーバを付加した設計にしくなくても、予見ロバストサーボ系として満足な特性をもつことを示した。

参 考 文 献

- 1) M. Tomizuka and D.E. Rosenthal: On the Optimal Digital State Vector Feedback Controller with Integral and Preview Actions, Trans. of the ASME, J. of Dyn. Sys. Meas. and Contr., 101, June, 172/178 (1979)
- 2) T. Katayama, et al.: Design of Optimal Controller for a Discrete-Time System Subject to Previewable Demand, Int. J. Control, 41-3, 677/699 (1985)
- 3) 土谷, 江上: 多入力多出力ロバスト予見制御系構成法, 計測自動制御学会論文集, 22-8, 823/829 (1986)
- 4) 愛田, 北森: 最適予見サーボ系の設計, 計測自動制御学会論文集, 22-5, 527/534 (1986)
- 5) 細江繁幸: 線形多変数フィードバック制御系の設計, 電気学会論文誌, 93-C-7, 167/174 (1973)
- 6) 早勢, 市川: 目標値の未来値を最適に利用する追値制御, 計測自動制御学会論文集, 5-1, 86/94 (1969)
- 7) 土谷武士: 最適追値制御系における未来目標値, システムと制御, 17-5, 305/314 (1973)
- 8) E.J. Davison: The Steady-State Invertibility and Feedforward Control of Linear Time-Invariant Systems, IEEE Trans. Automatic Control, AC-21-4, 529/534 (1976)