モデルマッチング法による2自由度制御系の設計†

伊藤 正紀*・阿部 健一*

On Model Matching Design of Two-Degree-of-Freedom Control Systems

Masanori ITO and Kenichi ABE

1. ま え が き

2自由度制御系においては、目標値応答特性および外乱抑制などのフィードバック特性を2種類の自由パラメータによりそれぞれ独立に設計可能である¹⁾。自由パラメータの設定には、モデルマッチング法などが適用される²⁾。しかし、モデルマッチング法による場合、プラントが不安定零点をもつとき、マッチング可能な参照モデルのクラスが限定されるため^{2),3)}、適切な参照モデルの設定に困難が生じる。そこで本論文では、任意の参照モデルに対し、近似的マッチングを行うための自由パラメータの一設定法を提案する。ただし、プラントは1入力1出力の離散時間系であるとする。

2. 安定化コントローラ

Fig. 1 の制御系を考える。図において、 r, u, d, y はそれぞれ目標入力、制御入力、外乱入力、出力である。プラントの伝達関数を

$$P(q^{-1}) = B_p(q^{-1})/A_p(q^{-1}) \quad (1)$$

とする。ここに、 q^{-1} は単位ステップ遅れ演算子である。また、多項式 A_p, B_p (以下、このように演算子を省略して書く) は互いに素であり、 P は真にプロパー、すなわち $A_p(0) \neq 0$ かつ $B_p(0) = 0$ とする。

コントローラを

$$u(k) = C_1 r(k) - C_2 y(k)$$

Fig. 1 Control system configuration

† 第29回自動制御連合講演会で発表(昭61・11)

* 豊橋技術科学大学 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1

* Toyohashi University of Technology, Toyohashi

(Received April 1, 1987)

(Revised June 2, 1987)

Key Words: two-degree-of-freedom control system, model matching, spectral factorization

$$= C \begin{bmatrix} r(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \quad (2)$$

とすると、系の内部安定性を保証するプロパーなコントローラ(安定化コントローラ)のクラスは次式で与えられる¹⁾。

$$C = D_c^{-1} [N\pi - N_f] \quad (3)$$

ただし、

$$D_c = X_0 - B_p S, \quad N_f = Y_0 + A_p S \quad (4)$$

である。ここに、 X_0, Y_0 は多項式方程式

$$A_p X + B_p Y = 1 \quad (5)$$

の特殊解であり、 $N\pi$ および S は、原点を中心とする単位円内(周を含む。以下、この領域を A と書く)に極をもたない任意の有理式である。このような有理式を Pernebo⁴⁾ にならい、 A -g. p. (A -generalized polynomial の略)と呼ぶ。 A -g. p. の全体は多項式環と同様に Euclid 環であることに注意する⁴⁾。

以上の安定化コントローラを用いたとき、 r から y までの伝達関数は

$$H_{ry} = B_p N\pi \quad (6)$$

であり、外乱入力 d から y までの伝達関数は

$$H_{dy} = 1 - B_p (Y_0 + A_p S) \quad (7)$$

である。 r から y および d から y までの希望伝達関数(参照モデル) H_{ry}^*, H_{dy}^* が与えられたとき、 A -g. p. $N\pi, S$ を操作することにより、 H_{ry}, H_{dy} をそれぞれの参照モデルに独立に近づけることができる。

3. トラッキングとレギュレーション

ステップ入力などの特定目標入力および特定外乱入力に対するトラッキング問題(あるいはサーボ問題)およびレギュレータ問題^{1),4)}を考えてみよう。

目標入力 r を

$$r = B_r / A_r \quad (8)$$

とする。ここで、 A_r, B_r は互いに素かつ A_r は A 内の極のみをもつとする。出力 y を r にトラッキングさせるためには

$$e = r - y = (1 - H_{ry}) B_r / A_r \quad (9)$$

が A -g. p. となるように $N\pi$ を定めればよい。この

ような $N\pi$ が存在するための必要十分条件は、よく知られているように、

$$A_r X + B_p Y = 1 \quad (10)$$

を満たす A -g. p. 解 X, Y が存在すること、すなわち、 A_r と B_p とが A -g. p. 環において素であることである。このことは、 A_r が A 内の極のみをもつという仮定より、 A_r と B_p とが多項式環において素であることと同値である。したがって、トラッキング可能とすると、(10)式の特解多項式解 X_1, Y_1 により、 $N\pi$ は一般に次式で与えられる。

$$N\pi = Y_1 + A_r T \quad (11)$$

ここに、 T は任意の A -g. p. である。

つぎに、外乱入力

$$d = B_d/A_d \quad (12)$$

とする。 A_d, B_d は互いに素かつ A_d は A 内の極のみをもつとすると、この外乱入力に対しレギュレーション可能、つまり出力 y への外乱の影響が漸近的に 0 になるための必要十分条件は、方程式

$$A_d X + B_p A_r Y = A_p X_0 \quad (13)$$

が多項式解をもつことである。そこで、この方程式の特解を X_2, Y_2 とするとレギュレーションは

$$S = Y_2 + A_d' U \quad (14)$$

で与えられる S によって達成される。ここに、 A_d' は A_d を A_d と A_p の最大公約多項式で割った商であり、また U は任意の A -g. p. である。

4. モデルマッティング

任意の A -g. p. H の展開

$$H(q^{-1}) = h_0 + h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \dots \quad (15)$$

より、2乗ノルム

$$\|H\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} h_k^2 \quad (16)$$

を定義する⁵⁾。また、 H の q^{-1} に q を代入した式を H_* で表わす。

特定の目標入力に対するトラッキング問題を解き、 $N\pi$ を(11)式で表わす。このとき、目標値応答特性 H_{rv} と参照モデル H_{rv}^* との近似度を、上記の2乗ノルムを用い、次式により評価するものとする。

$$I_1 = \|H_{rv}^* - H_{rv}\|^2 + \lambda_1 \|T\|^2 \quad (17)$$

この評価関数を T について最小化し $N\pi$ を決定する。ここで、第2項の重み付き2乗ノルムは T を A -g. p. の範囲から選び出すことを保証するためのものである。パラメータ $\lambda_1 (\geq 0)$ の選び方はのちに考察する。

また同様に、外乱入力から出力までの伝達関数 H_{dv} についても、まず特定の外乱入力に対するレギュレー

ション問題を解き、 S を(14)式で表わす。そこで、次式を最小にする U を求める。

$$I_2 = \|H_{dv}^* - H_{dv}\|^2 + \lambda_2 \|U\|^2 \quad (\lambda_2 \geq 0) \quad (18)$$

I_1, I_2 は、つぎのように書ける。

$$I = \|H - RX\|^2 + \lambda \|X\|^2 \quad (\lambda \geq 0) \quad (19)$$

ただし、 H は A -g. p. であり、その分母多項式を A 、分子多項式を B とする。また、 R は多項式である。 I を A -g. p. X について最小化する問題は、Kucera による LQ 問題の解法⁵⁾と同様に、スペクトル分解を用いつぎのように行えばよい。

まず、

$$R_* R + \lambda = E_* E \quad (20)$$

を満たし、かつ A 内に零をもたない多項式 E を求める(スペクトル分解)。いま、 $l = \deg R$ とするとき、

$$\bar{E} = q^{-l} E_*, \quad \bar{R} = q^{-l} R_* \quad (21)$$

とおく ($\deg R$ は多項式 R の次数)。一般に

$$\deg R \geq \deg E$$

が成り立つことに注意する。ただし、 R が複素平面の原点に零をもたないとき等号が成立する。このとき、(19)式を最小にする A -g. p. X は次式で与えられる。

$$X = \bar{X} E^{-1} A^{-1} \quad (22)$$

ここに、 $\bar{X}$ は

$$\bar{E} \bar{X} + A \bar{Y} = B \bar{R} \quad (23)$$

$$\deg \bar{Y} \leq l-1$$

の多項式解である ($\bar{E}$ と A とは一般には互いに素なのでこの方程式の解の存在が保証される)。

ここで、パラメータ λ の選び方について簡単にふれておく。(19)式における多項式 R の零が領域 A の境界上になければ、 $\lambda=0$ としても、 A -g. p. X の範囲での(19)式の最小化が行える。しかし、 R の零が A の境界上にある場合は $\lambda \neq 0$ とする必要がある。

5. 数値例

プラントの伝達関数を $1/s^2$ とし、サンプリング周期を1秒とすると、この伝達関数の0次ホールド付き z 変換より、

$$P = \frac{q^{-1}(1+q^{-1})}{2(1-q^{-1})^2} \quad (24)$$

となる。この伝達関数は -1 に零点をもつ。規範モデル H_{rv}^* として、2次要素 $1/(s^2 + 1.4s + 1)$ をプラントと同じ条件で離散化したものを用いる。また、 H_{dv}^* を

$$H_{dv}^* = (1-q^{-1})(1+0.5q^{-1}) \quad (25)$$

とする。

目標入力、外乱入力を単位ステップ関数とし、トラッキング問題およびレギュレーション問題を解く。パ

Fig. 2 Step responses

ラメータ λ_1 を 0.1~100 程度の範囲で少しずつ変化させ、 I_1 の最小化を行った。以上のようにして得た制御系が規範モデルをどの程度近似しているかを見るため、ステップ応答の比較を行ったのが Fig. 2 である。ただし、図には $\lambda_1=0.1, 5.0$ に対する結果のみを示してある。 λ_1 の値を小さくすれば、 H_{rv} の応答特性を規範モデル H_{rv}^* のそれに任意に近づけることができる。

一方、 I_2 の最小化については、この例の場合、規範モデル(25)式への完全マッチングが可能であるので、

$\lambda_2=0$ とした。ステップ外乱に対する応答を Fig. 2 に示す。

5. むすび

以上、近似的モデルマッチングの一手法を提案し、簡単な数値例によりその有効性を調べた。パラメータ λ_1 あるいは λ_2 の選び方については、参照モデルとの近似度ばかりでなく、他の種々の制御性との兼ね合いも調べる必要があり、このことは今後の課題とした。

参考文献

- 1) 原, 杉江: 2自由度系—II—達成可能な伝達関数および諸特性のクラス—, システムと制御, **30**-8, 457/466(1986)
- 2) 田川遼三郎: 補償限界型制御器によるディジタル制御系の設計, 計測と制御, **22**-7, 620/626 (1983)
- 3) A. I. G. Vardulakis and N. Karcanias: On the Stable Exact Model Matching Problem, Systems Control Lett., **25**-4, 237/242 (1985)
- 4) L. Pernebo: An Algebraic Theory for the Design of Controllers for Linear Multivariable Systems—Part I, II, IEEE Trans. Automatic Control, **AC**-**26**-1, 171/194 (1981)
- 5) V. Kucera: Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach, New York, Wiley (1979)