確率的多変数系に対する PID 形準最適コントローラ†

Jongkol NGAMWIWIT*・小 峰 憲 行**・飯 田 達 彦**・野 坂 康 雄**

Suboptimal Controllers for Stochastic Multivariable Processes

Jongkol NGAMWIWIT*, Noriyuki KOMINE**, Michihiko IIDA** and Yasuo NOZAKA**

1. は し が き

本論文では確率的多変数系が縮約可能であるとき、積分器が増設されたシステムの縮約モデルに対して標準的 LQG 問題を適用することにより、PID 形式の準最適な低次元出力動的フィードバック則を解析的に求める方法とそのための前提条件について議論する。

2. 積分器増設系の部分縮約モデル

線形確率的多変数系が次式で与えられるものとする。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dv_x(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v_y(t)\end{aligned}\quad (1)$$

ただし、 $x(t) \in R^n$ は状態ベクトル、 $u(t) \in R^p$ は制御ベクトル、 $y(t) \in R^r$ は観測出力ベクトル、 $v_x(t) \in R^m$ は平均値零のシステム雑音、そして $v_y(t) \in R^r$ は定常外乱を表す平均値 $E\{v_y(t)\} = d$ の観測雑音を示す。また、 $v_x(t)$ と $v_y(t)$ は互いに無相関な定常正規性白色雑音で、それぞれの共分散行列を $V_x = \overline{V}_x^T \overline{V}_x$ および $V_y = \overline{V}_y^T \overline{V}_y > 0$ とする。また $A \in R^{n \times n}$ 、 $B \in R^{n \times p}$ 、 $C \in R^{r \times n}$ および $D \in R^{r \times m}$ は定数行列であり対 (A, B) 、対 $(A, \overline{V}_x D)$ は完全可制御、対 (C, A) は完全可観測であると仮定する。

確率系(1)が縮約可能であると仮定すると縮約変換

$$z(t) = \Gamma x(t), \quad z(t) \in R^m, \quad m < n \quad (2)$$

によりつぎの縮約モデルが得られる¹⁾。

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= Fz(t) + Gu(t) + Lv_x(t) \\ y(t) &= Hz(t) + v_y(t)\end{aligned}\quad (3)$$

ただし、縮約条件は次式で与えられるものとする。

$$F\Gamma = \Gamma A, \quad G = \Gamma B, \quad L = \Gamma D, \quad H\Gamma = C \quad (4)$$

確率系(1)の各観測出力端に積分器を増設し、その出力ベクトルを $x^*(t) \in R^r$ とするとつぎの増設系が得られる。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}^*(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5a)$$

$$y(t) = [C \quad 0] [x^T(t) \quad x^{*T}(t)]^T + v_y(t) \quad (5b)$$

このとき、増設系(5)に対する部分縮約変換

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} z(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix} &= \Gamma^* \begin{bmatrix} x(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix}, \\ \Gamma^* &= \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \in R^{(m+r) \times (n+r)}\end{aligned}\quad (6)$$

によって増設系(5)はつぎの縮約増設モデルに変換される

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{x}^*(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F & 0 \\ H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (7)$$

$$y(t) = [H \quad 0] [z^T(t) \quad x^{*T}(t)]^T + v_y(t)$$

ただし、 I_r は r 次元単位行列を表わす。

3. 準最適制御則

縮約増設モデル(7)に対して LQG 問題を適用する。まず、増設系(5)に対して2次形式評価関数が次式で与えられるものとする。

$$\begin{aligned}J_{r,0} &= E \left\{ \int_0^\infty \left(\begin{bmatrix} x(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_x & 0 \\ 0 & W_x^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + u^T(t) W_u u(t) \right) dt \right\}\end{aligned}\quad (8)$$

ただし、 $W_x = \overline{W}_x^T \overline{W}_x$ 、 $W_x^* = \overline{W}_x^{*T} \overline{W}_x^*$ 、 $W_u = W_u^T > 0$ 、

かつ対 $\begin{bmatrix} \overline{W}_x & 0 \\ 0 & \overline{W}_x^* \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}$ は完全可観測とする。

このとき、評価関数(8)を近似的に最小にする縮約状態フィードバック則はつぎのように求められる。

縮約増設系(7)に対して評価関数

† 第23回計測自動制御学会学術講演会(昭59・7)および第25回計測自動制御学会学術講演会(昭61・7)で発表

* King Mongkut's Institute of Technology, Ladkrabang, Bangkok, Thailand

** 東海大学工学部 平塚市北金目 1117

** Faculty of Engineering, Tokai University, Hiratsuka

(Received April 11, 1987)

Key Words: aggregation, suboptimal control, stochastic estimation

$$J_r = E \left\{ \int_0^\infty \left(\begin{bmatrix} z(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_z & 0 \\ 0 & W_x^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix} + u^T(t) W_u u(t) \right) dt \right\}, \quad \Gamma^T W_z \Gamma = W_x \quad (9)$$

を最小にする最適制御則 $u_0(t)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_0(t) &= -[K_r \quad K_r^*] [z^T(t) \quad x^{*T}(t)]^T \\ &= -[K_r \Gamma \quad K_r^*] [x^T(t) \quad x^{*T}(t)]^T, \\ [K_r \quad K_r^*] &= W_u^{-1} [G^T \quad 0]^T P \end{aligned} \quad (10)$$

ただし P はつぎの代数 Riccati 方程式の対称正定解である。

$$\begin{bmatrix} F & 0 \\ H & 0 \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} F & 0 \\ H & 0 \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} W_u^{-1} \begin{bmatrix} G^T \\ 0 \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} W_z & 0 \\ 0 & W_x^* \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

方程式 (11) が正定解をもつためには行列 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ と Γ が最大行階数をもつことが必要十分である^{2), 3)}。このとき、制御 $u_0(t)$ による閉ループ増設系は次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_r \Gamma & -BK_r^* \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

さらに F が A のすべての不安定固有値を包含するように Γ が選択される場合には次式が成立する⁴⁾。

$$\operatorname{Re} \lambda \left\{ \begin{bmatrix} A - BK_r \Gamma & -BK_r^* \\ C & 0 \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (13)$$

ただし、 $\operatorname{Re} \lambda \{\cdot\}$ は行列 $\{\cdot\}$ の固有値の実数部の集合を表わす。

つぎに確率系 (1) の状態情報が不完全と仮定し評価関数

$$\begin{aligned} J_{e0} &= E \{ e^T(t) W_e e(t) \}, \quad e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \\ W_e^T &= W_e > 0 \end{aligned} \quad (14)$$

を近似的に最小にする縮約状態 $z(t)$ の準最適推定問題を導入する。ただし、 $\hat{\cdot}(t)$ は $\cdot(t)$ の推定値を表わす。

縮約モデル (3) に対して

$$\begin{aligned} J_e &= E \{ \varepsilon^T(t) W_e \varepsilon(t) \}, \quad \varepsilon(t) = z(t) - \hat{z}(t), \\ \Gamma^T W_e \Gamma &= W_z \end{aligned} \quad (15)$$

を最小にする定常 Kalman フィルタ⁴⁾は

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}(t) &= F \hat{z}(t) + G u(t) + K_e [y(t) - E \{ v_y(t) \} - H \hat{z}(t)], \\ K_e &= Q H^T V_y^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

で与えられ、 $\hat{z}(t) = \Gamma \hat{x}(t)$ となる。ただし、縮約状態推定誤差の共分散行列 $Q = E \{ \varepsilon(t) \varepsilon^T(t) \}$ はつぎの代数 Riccati 方程式の対称正定解である。

$$FQ + QF^T - QH^T V_y^{-1} H Q + L V_x L^T = 0 \quad (17)$$

縮約行列 Γ が最大階数をもつとき、(17) 式には正

定解の存在が保証され

$$\operatorname{Re} \lambda [F - K_e H] < 0 \quad (18)$$

となる⁵⁾。また、 $Q = \Gamma Q_0 \Gamma^T$ 、 $Q_0 = E \{ e(t) e^T(t) \}$ とするとき、推定系 (16) は評価関数 (14) に関して確率系 (1) に対する準最適推定 $\lim_{t \rightarrow \infty} E \{ \hat{z}(t) \} = E \{ \Gamma x(t) \}$ を与える⁵⁾。

本論文では (16) 式および $z(t)$ を $\hat{z}(t)$ に置換した制御則 (10) を総合して準最適コントローラとよぶ。

このコントローラは座標変換により出力の逐次微分を含む一般化 PID 形となることが示される⁶⁾。

4. 準最適コントローラの性質

増設系 (5) に対して準最適コントローラによるフィードバックを施すとつぎの閉ループ状態方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}^*(t) \\ \dot{\hat{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK_r^* & -BK_r \\ C & 0 & 0 \\ K_e C & -GK_r^* & F - GK_r - K_e H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x^*(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & -K_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ E \{ v_y(t) \} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$y(t) = [C \quad 0 \quad 0] [x^T(t) \quad x^{*T}(t) \quad \hat{z}^T(t)]^T + v_y(t)$$

4.1 安定性

閉ループ系 (19) はつぎの (20) 式に同値であり、この式から制御と推定問題は分離され、また (13)、(18) 式から閉ループ系の安定性が保証されることがわかる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}^*(t) \\ \vdots \\ \dot{\varepsilon}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_r \Gamma & -BK_r^* & -BK_r \\ C & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & F - K_e H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x^*(t) \\ \vdots \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L & -K_e & K_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ E \{ v_y(t) \} \end{bmatrix} \quad (20)$$

4.2 定常不感性感

外部入力として定常外乱のみが存在する場合には、(19) 式で $v_x(t) = 0$ 、 $v_y(t) = E \{ v_y(t) \} = d$ とし、 $v_y(t)$ から $y(t)$ への伝達関数行列を $G(s)$ とするとき、

$$G(s) \Big|_{s=0} = 0 \quad (21)$$

となる。これは定常外乱に対して出力 $y(t)$ が定常不感性感をもつことを示している。

5. 数値例

線形系 (1) の各係数行列と各雑音の共分散行列は次式で与えられるものとする。

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ & -2 & 1 & 1 \\ 0 & & -3 & 1 \\ & & & -10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 6 \quad (22)$$

$$V_x = \text{diag}[0.01 \ 0.01], \quad V_y = \text{diag}[0.001 \ 0.001]$$

行列 A の支配的固有値 $\{-1, -2, -3\}$ を受け継ぐ縮約行列 Γ は Davison-Lamba-Lao の手法を用いるとつぎのように求められる⁷⁾.

$$\Gamma = [I_3; [0.083 \ 0.107 \ 0.143]^T] \quad (23)$$

縮約増設モデル (7) の係数行列は次式で与えられる.

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ & & -3 \end{bmatrix}, \quad G = L = \begin{bmatrix} 1 & 0.083 \\ 0 & 1.107 \\ 1 & 0.143 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.993 & -0.009 & -0.011 \\ -0.009 & 0.988 & -0.014 \end{bmatrix} \quad (24)$$

増設系 (5) に対する評価関数 (8) において

$$W_x = \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1], \quad W_x^* = \text{diag}[10 \ 10],$$

$$W_u = \text{diag}[0.1 \ 0.1]$$

とすると、(9) 式の $\Gamma^T W_x \Gamma = W_x$ の最小 2 乗最小ノルム解

Fig. 1 State and estimation error responses in the suboptimally controlled system

Fig. 2 Output and state responses for constant disturbances

$$W_z = (\Gamma^+)^T W_x \Gamma^+ = \begin{bmatrix} 0.994 & -0.009 & -0.011 \\ -0.009 & 0.989 & -0.015 \\ -0.011 & -0.015 & 0.983 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma^+ = \Gamma^T (\Gamma \Gamma^T)^{-1} \quad (25)$$

を用いると増設系 (5) に対する準最適制御則 $u_0(t)$ は

$$\begin{bmatrix} u_{01}(t) \\ u_{02}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4.569 & 0.312 & 1.113 & 0.572 \\ 0.385 & 3.767 & 0.497 & 0.506 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

となる. 一方, (16) 式から縮約状態 $z(t)$ を推定するフィルタ方程式は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}(t) = & F\hat{z}(t) + G \begin{bmatrix} u_{01}(t) \\ u_{02}(t) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 2.439 & 0.420 \\ 0.432 & 2.049 \\ 0.041 & 0.222 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} - E\{v_y(t)\} \right. \\ & \left. - H\hat{z}(t) \right) \end{aligned} \quad (27)$$

$E\{v_y(t)\} = 0$ の場合の準最適制御系の初期状態応答と推定誤差応答を Fig. 1 に示す. $E\{v_y(t)\} = 1$ の場合に制御系の出力が定常不感性をもつことが Fig. 2 のシミュレーション結果により示される.

6. ま と め

確率的多変数系に対する低次元化 PID 形準最適コントローラの設計法を提案した. 従来の PID コントローラの有用性から考えてシステムの構造が与えられる制御対象に対し, 本設計法は柔軟性のある, 応用範囲の広い制御方式を提供するものと考えられる.

参 考 文 献

- 1) M. Aoki: Control of Large-Scale Dynamic System by Aggregation, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-13-3**, 264/253 (1968)
- 2) H. W. Smith and E. J. Davison: Design of Industrial Regulator, Proc. IEE, **119-8**, 1210/1216 (1972)
- 3) J. Ngamwiwit, 小峰, 飯田: 縮約状態の推定に基づく増設設計の準最適制御, 第 23 回 SICE 学術講演会予稿集, 309/310 (1984)
- 4) R. E. Kalman and R. S. Bucy: New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, ASME J. Basic Eng., **83 D**, 95/108 (1961)
- 5) 白鳥, 小峰, 飯田: 縮約状態の確率的準最適推定, 第 25 回 SICE 学術講演会予稿集, 657/658 (1986)
- 6) J. Ngamwiwit, 飯田, 平田: 積分器増設系における縮約状態フィードバック, JAACE '83-5, 65/66 (1983)
- 7) S. S. Lamba and S. V. Rao: On Suboptimal Control via the Simplified Model of Davison, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-19-4**, 448/450 (1974)