マルチタイムスケール法によるハイゲイン
レギュレータの設計

村田 智*・安藤 嘉則**・鈴木 正之***

A Design Method for the High-Gain Regulator
by Multiple Time Scale Approach

Satoshi MURATA*, Yoshinori ANDO** and Masayuki SUZUKI***

This paper is concerned with the design problem of the high-gain regulator system by using the singular perturbation approach.

The synthesis procedure is summarized as follows; at first the controlled system is changed into decoupled systems, and divided into several subsystems which have simple structures. For such systems multiple time scale singular perturbation method is applied and then we obtain multiple parameter high-gain feed-back systems.

Key Words: high-gain system, regulator, multi-time scale, singular perturbation

1. はじめに

ハイゲインフィードバックは非常によい目標値追従性のほかにも感度低下、外乱除去などの多くの利点をもつが、そのようなハイゲインフィードバックシステムがいつでも構成できるわけではない。したがってハイゲインフィードバックによって優れた特性をもたせることが可能なシステムとはどのようなシステムであるかを定めることは重要であり、多くの研究がなされてきた。

Kimura^{1),2)} は極配置の観点からいわゆる完全制御問題を考え、主に幾何学的手法を用いてこの問題に対

する必要十分条件を求めた。また Young ら³⁾ は CB がフルランクであるようなシステムは特異摂動法を用いてその挙動を簡単に解析できることを示し、安藤ら⁴⁾ は同様のシステムに対するハイゲインレギュレータの構成法を提案した。Sannuti ら^{5),6)} はこれを一般化し右可逆なシステムをある標準形に導き、その標準形に対してマルチタイムスケールの特異摂動法を適用してチープコントロール問題や多変数根軌跡問題を考えている。ただし入出力数に大きな制限があるのと、標準形自体が複雑すぎるなどの難点がある。

本論文では一般的なクラスのシステム—右可逆、最小位相なシステム—を扱う。このクラスのシステムは適当な非干渉化制御によって低次元のサブシステムに分解できることを示し、さらにそれぞれのサブシステムに対してマルチパラメータのハイゲインフィードバックを構成することで全システムに対するハイゲインフィードバックを求める。構成アルゴリズムは簡単な行列計算のみからなっており次元の大きなシステムに対しても比較的簡単にハイゲインフィードバックを求めることができる。

2. 問題の定式化

線形時不変システム

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & x \in R^n, u \in R^r \\ y = Cx & y \in R^m \end{cases} \quad (1)$$

を考える。C, A, B は適当なサイズの実数行列であり、B と C はそれぞれ最大階数をもつとする。さらに (A, B) は可制御であるとする。このシステムに対し、ハイゲインの状態フィードバック、

$$u = K(g)x, \quad g: \text{十分大きな正数} \quad (2)$$

を用いる。評価関数としては

* 機械技術研究所 茨城県新治郡桜村並木 1-2

** 名古屋市工業研究所 名古屋市熱田区六番 3-4-41

*** 名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町

* Mechanical Engineering Laboratory, Niihari-gun, Ibaraki

** Nagoya Municipal Industrial Research Institute, Nagoya

*** Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya

(Received February 26, 1987)

(Revised June 23, 1987)

$$J = \int_0^\infty y^T y dt \quad (3)$$

を考えることにする。

【定義1】 ハイゲインレギュレータ問題：HRP

HRP 1) ある g^* が存在し, g^* より大きいすべての g に対し $A+BK(g)$ は安定となる。

HRP 2) 任意の初期状態に対し

$$\lim_{g \rightarrow \infty} J \rightarrow 0. \quad (4)$$

システム(1)に対し, これらの条件をいずれも満たす $K(g)$ が存在するときシステム(1)は HRP 可解であるといい, そのときの $K(g)$ を HRP の解とよぶ。■

HRP 1) がシステムの安定性を保証し, HRP 2) が $g \rightarrow \infty$ のときの出力の有界性を保証している。

3. システムの右可逆性

ここでは右可逆なシステムのもつ性質を考える。

まずいくつかの行列を定義しておく。

$$\Omega \triangleq [CB|CAB|\cdots|CA^{n-1}B]. \quad (5)$$

これは出力可制御行列と呼ばれ $\text{rank } \Omega = m$ であればシステム(1)は出力可制御であるという。 Ω はシステムの可制御かつ可観測な部分にのみ依存して決まる。

つぎに正則変換 $T \in R^{m \times m}$ によって Ω を行標準形に導く。このとき一般には,

$$T\Omega = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} & * & * & & * \\ & & & \cdots & \\ 0 & & & & * \\ & 0 & & & * \\ & & 0 & & * \\ & & & 0 & * \\ & & & & \cdots \\ & & & & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \vdots \\ e_1 \\ \vdots \\ e_2 \\ \vdots \\ e_s \end{matrix}$$

$$\underbrace{\quad}_{CB} \quad \underbrace{\quad}_{CAB} \quad \underbrace{\quad}_{CA^2B} \quad \underbrace{\quad}_{CA^{n-1}B}$$

*: 非零要素 (6)

のようになる。ここで $T\Omega$ の各ブロックは $CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B$ にそれぞれ対応している。

つぎに $T\Omega$ の1次独立な行の先頭(左端)の現れるブロックの個数を s とし, それぞれのブロックの対応する Ω の s 個のブロックの A の次数を左から順に $d_1, \dots, d_s$ とする。またそれぞれのブロックに含まれる1次独立な行の本数を順に $e_1, \dots, e_s$ とする。

例: $CB=0$, CAB : full rank であるとき(6)は

$$T\Omega = \left[\begin{array}{c|c|c|c} & & * & \\ & & & \cdots \\ 0 & & & * \\ & 0 & & \\ & & & \end{array} \right]$$

となって $s=1$, $d_1=1$, $e_1=m$ となる。

さらに TC をブロック表現しておく。すなわち,

$$TC = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_s \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} c_i \in R^{e_i \times m}, & i=1, \dots, s. \\ \sum_i e_i = m \end{matrix} \quad (7)$$

このように表記すると(6)は一般に,

$$T\Omega = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} & c_1 A^{d_1} B & * & & \\ & & c_2 A^{d_2} B & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & c_s A^{d_s} B \end{array} \right] \quad (8)$$

のように書ける。ここで,

$$L_0 \triangleq \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} B \\ \vdots \\ c_s A^{d_s} B \end{bmatrix} \in R^{m \times r} \quad (9)$$

とおく。このときつぎの補題が成り立つ。

【補題1】 $\text{rank } L_0 = m$ ならばシステム(1)は右可逆であり, またその逆も成り立つ。■

(証明) Silverman & Payne⁷⁾ による Structure algorithm より容易に導かれる。このアルゴリズムを適用する前に(6)の相似変換 T を施しておくこととアルゴリズム中の繰返し手続きは不要となり直接 L_0 の階数を調べればよいことがわかる。■

右可逆性よりただちに $m \leq r$, つまり入力数は出力の数以上になる。よって L_0 は横長の行列である。

4. システムの非干渉化

ここではシステムの右可逆性および最小位相性を仮定すればシステムを安定に非干渉化できることを示す。

通常非干渉化問題は入出力数の等しい, つまり伝達関数行列が正方行列になるようなシステムに対し考えられるが, ここでは右可逆性の仮定から入力数が出力の数以上であるようなシステムを扱う。そのため非干渉化制御の定義としてつぎのようなものを考える。

【定義2】 非干渉化制御

システム(1)に対し,

$$\begin{aligned} u &= Fx + Hv, & v &\in R^r: \text{新しい入力} \\ &F \in R^{r \times n}, & H &\in R^{r \times r}: \text{正則} \end{aligned} \quad (10)$$

のような状態フィードバックと入力変換, さらに

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= Ey, & \tilde{y} &\in R^m: \text{新しい出力} \\ &E &\in R^{m \times m}: \text{正則} \end{aligned} \quad (11)$$

のような出力変換が存在して, 構成系の伝達関数行列 $EC(sI - A - BF)^{-1}BH \in R^{m \times r}$ が,

$$\begin{bmatrix} 0 & \gamma_1(s) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \gamma_m(s) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_i(s), i=1, \dots, m \text{ は } s \text{ の有理式} \quad (12)$$

のようになるときシステム(1)は非干渉化可能であるという。■

(12) は構成系の可観測な部分だけを表わしている。対 (A, B) は可制御であるから非可観測な部分がこれに現れずに残っている。それを考えるためにシステム $(EC, A+BF, BH)$ を状態空間で表現する。そのために状態変換,

$$x = Sz;$$

$$; S \triangleq [S_1 S_2], S \in R^{n \times (n-d_f)}, S_2 \in R^{n \times d_f} \quad (13)$$

を行う。ただし S_1 の列は対 $(EC, A+BF)$ の非可観測な状態空間を張り、 S_2 の列は可観測な状態空間を張るように選ぶ。また d_f は可観測な状態空間の次元である。このとき構成系の状態方程式はつぎのようになる。

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}v$$

$$\hat{y} = \hat{C}z \quad (14)$$

$$; z = (z_0^T, z_f^T)^T \in R^n, v = (v_0^T, v_f^T)^T \in R^r$$

$$z_0 \in R^{n-d_f}, z_f \in R^{d_f}, v_0 \in R^{r-m}, v_f \in R^m$$

$$\hat{A} \triangleq S^{-1}(A+BF)S = \begin{bmatrix} \overbrace{\hat{A}_{11}}^{n-d_f} & \overbrace{\hat{A}_{12}}^{d_f} \\ 0 & \overbrace{\hat{A}_{22}}^{d_f} \end{bmatrix}^{n-d_f},$$

$$\hat{B} \triangleq S^{-1}BH = \begin{bmatrix} \overbrace{\hat{B}_{11}}^{r-m} & \overbrace{\hat{B}_{12}}^m \\ 0 & \overbrace{\hat{B}_{22}}^{d_f} \end{bmatrix}^{n-d_f}$$

$$\hat{C} \triangleq ECS = \begin{bmatrix} \overbrace{\hat{C}_2}^{n-d_f} & \overbrace{\hat{C}_1}^{d_f} \end{bmatrix}^m$$

ここで $\hat{B}$ の左下のブロックが 0 となるのは v から $\hat{y}$ への伝達関数行列を (12) のような左側にゼロブロックをもつものに限定したからである。また、当然 $EC(sI - A - BF)^{-1}BH = [0 | \hat{C}_2(sI - \hat{A}_{22})^{-1}\hat{B}_{22}]$ が成り立つ。

このとき、

$$v_0 = \hat{K}_1 z_0 \quad ; \hat{K}_1 \in R^{(r-m) \times (n-d_f)}$$

$$v_f = \hat{K}_2 z_f \quad ; \hat{K}_2 \in R^{m \times d_f} \quad (15)$$

のような状態フィードバックにより構成系の極は、

$$\lambda(\hat{A}_{11} + \hat{B}_{11}\hat{K}_1) \cup \lambda(\hat{A}_{22} + \hat{B}_{22}\hat{K}_2) \quad (16)$$

で表わされる。 $\hat{K}_1$ が非可観測モードを安定化するためのフィードバックであり、 $\hat{K}_2$ はすでに非干渉化されたシステムに対するフィードバックである。

【定義 3】 安定な非干渉化制御

システム (1) に対し定義 2 のような非干渉化制御則が存在し、さらに対 $(\hat{A}_{11}, \hat{B}_{11})$ が可安定であるときシステム (1) は安定な非干渉化制御可能であるという。■

つぎに具体的な非干渉化制御則の構成法を述べ、さらにそれが安定な非干渉化制御になるためにシステム (1) が満たすべき条件を考える。以下で説明するアルゴリズムは Wolovich⁶⁾ のそれを入力出力の数が違う場

合について拡張したものである。システムが右可逆であるとする補題 1 より L_0 はフルランクをもつ。ここで、

$$L \triangleq \begin{bmatrix} L_1 \\ PL_0 \end{bmatrix} \in R^{r \times r}; P \in R^{m \times m}, L_1 \in R^{(r-m) \times r} \quad (17)$$

とおく。ただし P は L_0 の各行を直交化する行変換であり、 L_1 は L が直交行列になるように適当に選んだ行列である。このとき、

$$L^{-1} = L^T = [L_1^T | (PL_0)^T] \quad (18)$$

と書ける。つぎに、

$$M \triangleq \begin{bmatrix} 0_{(r-m) \times n} \\ (P^T)^{-1}(L_0 L_0^T)^{-1} M_0 \end{bmatrix} \in R^{r \times n} \quad (19)$$

とする。ただし

$$M_0 \triangleq \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ c_s A^{d_s+1} \end{bmatrix} \in R^{m \times n} \quad (20)$$

である。ここでつぎの行列を定義する。

$$E \triangleq T \quad ((6) \text{ で定義}) \quad (21)$$

$$F \triangleq -L^{-1}M = -L_0^T(L_0 L_0^T)^{-1}M_0 = -L_0^- M_0 \quad (22)$$

$$H \triangleq L^{-1} \begin{bmatrix} I_{r-m} & 0 \\ 0 & (P^T)^{-1}(L_0 L_0^T)^{-1} \end{bmatrix} \quad (23)$$

ただし L_0^- は L_0 の一般化逆行列の一つである。すなわち、

$$L_0^- \triangleq L_0^T(L_0 L_0^T)^{-1}, L_0 L_0^- = I. \quad (24)$$

【補題 2】 システム (1) が右可逆であれば、(21) ~ (23) で与えた (E, F, H) によって非干渉化ができ、さらにシステム (1) が最小位相であれば安定な非干渉化制御が可能である。■

(証明) 行列 TQ の形 (8) より任意の i に対して、

$$c_i(A+BF)^j = c_i A^j \quad (j \leq d_i - 1)$$

$$c_i(A+BF)^{d_i+1} = c_i A^{d_i}(A+BF)$$

$$= c_i A^{d_i+1} - c_i A^{d_i} B L_0^- M_0 = 0$$

したがって任意の $j \neq d_i$ に対して $c_i(A+BF)^j B = 0$ となる。展開公式 $(sI - A - BF)^{-1} = s^{-1}I + s^{-2}(A+BF) + s^{-3}(A+BF)^2 + \dots$ を用いると、

$$c_i(sI - A - BF)^{-1}BH = s^{-(d_i+1)}c_i A^{d_i}B[L_1^T | L_0^-] \\ = s^{-(d_i+1)}[0_{e_i \times (r-m)} | \\ 0 \cdots 0 I_{e_i} 0 \cdots 0] \quad (25)$$

となる。なぜなら $c_i A^{d_i}B$ は L_0 の行ブロックであり、 L の直交性より $PL_0 L_1^T = 0$ となるからである。

各ブロックごとにこれを考え、それらをまとめて全体の伝達関数行列、

$$EC(sI - A - BF)^{-1}BH \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ m \times (r-m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-(d_1+1)} I_{e_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s^{-(d_s+1)} I_{e_s} \end{bmatrix} \quad (26)$$

を得る。ここで入力 v および出力 $\hat{y}$ を (26) に対応し

たブロックにわけておく。

$$\begin{aligned} \tilde{y} &\triangleq (\tilde{y}_1^T, \dots, \tilde{y}_s^T)^T, \quad v \triangleq (v_1^T, v_2^T, \dots, v_s^T)^T \\ &; \tilde{y}_i \in R^{e_i}, \quad v_i \in R^{e_i} (i=1, \dots, s), \quad v_0 \in R^{r-m} \quad (27) \end{aligned}$$

v_0 は非可観測部分の安定化のために残された入力である。これにより非干渉化後のシステムの可観測部分は、

$$\Sigma_i : \tilde{y}_i = s^{-(d_i+1)} I_{e_i} v_i \quad (i=1, \dots, s) \quad (28)$$

のような s 個のサブシステムに分解されたと考えることができる。これを最小実現すると、

$$\begin{aligned} R\Sigma_i : \quad &\dot{z}_i = \hat{A}_i z_i + \hat{B}_i v_i \quad (i=1, \dots, s) \quad (29) \\ &\tilde{y}_i = \hat{C}_i z_i \\ &; z_i = (z_{d_i+1}^T, z_{d_i}^T, \dots, z_1^T)^T, \\ &\hat{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{e_i} & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I_{e_i} & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_{e_i} \end{bmatrix}, \\ &\hat{C}_i = [I_{e_i} \quad 0 \dots 0] \end{aligned}$$

となる。 $z_1, \dots, z_{d_i+1} \in R^{e_i}$ ($i=1, \dots, s$) は実現のために導入した新しい状態変数である。 s 個のサブシステム $R\Sigma_i$ ($i=1, \dots, s$) の全体は構成系の可観測な部分を表わす。

つぎに新しい状態変数 z_i ($i=1, \dots, s$) と本来の状態変数 x の関係を考える。そのため出力の変換行列 T をブロック表現しておく。

$$T = [T_1^T T_2^T \dots T_s^T]^T; \quad T_i \in R^{e_i \times m} \quad (i=1, \dots, s). \quad (30)$$

再び行列 $T\Omega(8)$ の性質を用いて、

$$\begin{aligned} z_{d_i+1} &= \tilde{y}_i = T_i y = T_i C x = c_i x \\ z_{d_i} &= \dot{\tilde{y}}_i = T_i \dot{y} = T_i C \dot{x} = T_i C((A+BF)x + BHv) \\ &= c_i A x \\ &\dots\dots\dots \\ z_1 &= \dots = c_i A^{d_i} x. \quad (i=1, \dots, s) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} z_f &= A_f x, \quad A_f \in R^{d_f \times n} \quad (31) \\ &; z_f \triangleq (z_1^T, \dots, z_s^T)^T \\ &= (z_{d_1+1}^T, \dots, z_1^T, \dots, z_{d_s+1}^T, \dots, z_1^T)^T \in R^{d_f} \\ A_f &\triangleq [c_1^T (c_1 A)^T, (c_1 A^{d_1})^T, \dots, c_s^T, (c_s A)^T, \\ &\quad \dots, (c_s A^{d_s})^T]^T \\ d_f &\triangleq \sum_{i=1}^s e_i (d_i + 1) \end{aligned}$$

と書ける。 d_f は構成系の可観測部分空間の次元になっている。つぎに行列 $[A_0^T A_f^T]^T \in R^{n \times n}$ が正則になるように $A_0 \in R^{(n-d_f) \times n}$ を選ぶ。このとき座標変換、

$$\begin{aligned} x &= Sz \\ &; z = (z_0^T, z_f^T)^T, \quad z_0 \in R^{n-d_f}, \quad S \triangleq \begin{bmatrix} A_0 \\ A_f \end{bmatrix}^{-1} \quad (32) \end{aligned}$$

が求める x と z の関係を与える。この変換によって

システム $(EC, A+BF, BH)$ は(13)に対応した形、

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \hat{A} z + \hat{B} v \\ \tilde{y} &= \hat{C} z \\ &; \hat{A} = s^{-1}(A+BF)S, \quad \hat{B} = S^{-1}BH, \quad \hat{C} = ECS, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \hat{A}_{ss} \end{bmatrix}, \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \hat{B}_{ss} \end{bmatrix}, \\ \hat{C} &= \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \hat{C}_s & 0 \dots 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

で表現できる。

ここでシステム(1)が最小位相であるときに対 $(\hat{A}_{11}, \hat{B}_{11})$ が可安定であることを示せば補題の証明は終る。

システム(1)が最小位相であるとは、

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} &= n + \min(r, m) \\ &= n + m, \quad \text{for } \forall s \in \bar{c}^+ \quad (34) \end{aligned}$$

$\bar{c}^+$: 閉右半平面

となることである。行列の階数は正則変換によって不変であるので、

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} I & 0 \\ F & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} [sI - \hat{A}_{11} | \hat{B}_{11}] + d_f + m. \quad (35) \end{aligned}$$

したがって $\text{rank} [sI - \hat{A}_{11} | \hat{B}_{11}] = n - d_f$ (full rank) となり対 $(\hat{A}_{11}, \hat{B}_{11})$ は可安定であることが示せた。■

4. サブシステムに対するハイゲイン フィードバック

ここでは前章で求めたサブシステム $R\Sigma_i$ に対してハイゲインフィードバックを考える。 $R\Sigma_i$ は入力 v_i がまず z_i^1 に作用し、 z_i^1 が z_i^2 に作用し、…という階層的システムになっているのでハイゲインフィードバックもこれらの階層的に対応した多段階のものを考える。このような場合マルチタイムスケールの特異摂動法が解析に便利である。

【補題 3】 サブシステム $R\Sigma_i (i=1, \dots, s)$ はそれぞれ HRP 可解である。■

(証明) $R\Sigma_i$ に対し多段階のハイゲインフィードバックを実際に構成する。まず第一段目として、

$$v_i = gK_i^1(z_i^1 - v_i^1), \quad g: \text{十分大きな正数} \quad (36)$$

なるハイゲインフィードバックを考える。ただし $K_i^1 \in R^{e_i \times e_i}$ は安定行列にとる。また v_i^1 はつぎの段の z_i^2 に対する入力である。(29)に(36)を代入すれば、

$$\varepsilon \dot{z}_i^1 = K_i^1(z_i^1 - v_i^1), \quad \varepsilon \triangleq g^{-1} \quad (37)$$

となる。(37)で $\varepsilon=0$ とおけば z_i^1 の遅い動きのモードすなわち(37)の退化系、

$$0 = K_i^1(z_i^1 - v_i^1) \quad (38)$$

を得、 K_i^1 が正則であることから

$$z_i^1 = v_i^1 \quad (39)$$

となる。つぎに(37)の速い動きのモードに焦点を合わせるように $\tau_1 = t/\varepsilon$ と時間を引き伸ばし、その後 $\varepsilon=0$ とおけば z_i^1 の速いモードつまり(37)の境界層システム、

$$dz_{i,f}/d\tau_1 = K_i^1 z_{i,f}, \quad z_{i,f} = z_i^1 - z_i^1, \quad (40)$$

を得る。したがって K_i^1 によって z_i^1 の速いモード $z_{i,f}$ は安定化された。また速いモードは短い時間内に 0 に収束するから、その後引き伸ばされてない時間で見ると、

$$z_i^1 = z_{i,s} + 0(\varepsilon) \quad (41)$$

として z_i^1 が近似される。以上からシステム(29)はつぎようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{i,i+1}^1 \\ \vdots \\ \dot{z}_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{e_i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{i,i+1}^1 \\ \vdots \\ z_i^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_{e_i} \end{bmatrix} v_i^1, \quad (42)$$

$$v_i^1 = z_{i,s}^1$$

$$\dot{z}_{i,f} = gK_i^1 z_{i,f}, \quad z_{i,f} = z_i^1 - z_{i,s}^1.$$

二段目に対しては一段目に組み込んでおいた v_i^1 を用いる。 v_i^1 を v_i と同様に構成すれば z_i^2 の速いモードは安定化される。

この手順を繰り返し、 $z_i^2, z_i^3, \dots, z_{i,i+1}^1$ を順に安定化してゆくが、タイムスケールの違いを出すためにつぎのように考える。第 j 段目に対して、

$$v_j^1 = g^{a_j} K_j^1(z_j^1 - v_{j+1}^1) = z_{j-1}^1, \quad (43)$$

$$; 0 < a_j < a_{j-1} (j=2, 3, \dots, d_i), \quad a_1 \triangleq 1$$

とする。ただし $K_j^1 (j=2, 3, \dots, d_i)$ は安定行列にとり、 $a_j (j=2, \dots, d_i)$ は特異摂動システムの安定性を保証できる範囲内にとる (たとえば Suzuki ら⁹⁾ を参照)。

結局システム(42)は(43)のような入力によって、

$$\begin{aligned} \dot{z}_{i,i+1}^1 &= v_{i,i+1}^1 \\ dz_{i,f}^1/d\tau_{a_i} &= K_{a_i}^1 z_{i,f}^1, \quad z_{i,f}^1 = z_{i,i+1}^1 - z_{i,s}^1, \\ &\dots\dots\dots \\ dz_{i,f}^j/d\tau_{a_j} &= K_{a_j}^1 z_{i,f}^j, \quad z_{i,f}^j = z_{i,j}^1 - z_{i,s}^1, \\ dz_{i,f}^j/d\tau_{a_j} &= K_{a_j}^1 z_{i,f}^j, \quad z_{i,f}^j = z_{i,j}^1 - z_{i,s}^1, \\ &; \tau_i = t/g^{a_i} (i=2, \dots, d_i) \end{aligned} \quad (44)$$

となる。最後の段 $z_{i,i+1}^1$ に対しては、

$$v_{i,i+1}^1 = g^{a_{d_i+1}} K_{d_i+1}^1 z_{i,i+1}^1 \quad (45)$$

ととる。やはり $K_{d_i+1}^1 \in R^{e_i \times e_i}$ も安定行列にとる。

以上の入力(36), (43), (45)をまとめておく。

$$v_i = g^{a_i} K_i^1(z_i^1 - g^{a_2} K_2^1(\dots(z_{i,i+1}^1 - g^{a_{d_i+1}} K_{d_i+1}^1 z_{i,i+1}^1) \dots)) \quad (46)$$

この入力によって状態 $z_j^1 (j=1, \dots, d_i)$ の速いモードはハイゲインで安定化され、また遅いモードはつぎの段に対するハイゲインフィードバックそのものであるが、つぎの段もハイゲインによって急速に安定化されるからこれも急速に減少する。

結局状態 $z_j^1 (j=1, \dots, d_i)$ は速いモードも遅いモードもタイムスケールの違いはあるもののいずれもハイゲインで安定化された。このとき最終段は、

$$z_{i,i+1}^1 = g^{a_{d_i+1}} K_{d_i+1}^1 z_{i,i+1}^1 \quad (47)$$

となって、 $g \rightarrow \infty$ のとき $\tilde{y}_i = z_{i,i+1}^1 \rightarrow 0$ が示される。

以上の議論によって(46)のような入力を考えれば $R\Sigma_i$ のすべての状態 $z_j^1 (j=1, \dots, d_i+1)$ は安定であり (HRP 1) さらに $g \rightarrow \infty$ のとき $\int_0^\infty \tilde{y}_i^T \tilde{y}_i dt \rightarrow 0$ (HRP 2) となる。■

この補題によってサブシステム $R\Sigma_i$ にハイゲインフィードバック(46)を適用した場合、各状態 $z_j^1 (j=1, \dots, d_i+1)$ に対するシステムの極は $g^{a_j} \lambda(K_j^1) (j=1, \dots, d_i+1)$ で近似される。これら d_i+1 種類のオーダーをもつ極はそれぞれ K_j^1 で任意に配置できる。

5. システム全体に対するハイゲイン フィードバック

前章では各サブシステム $R\Sigma_i$ に対しハイゲインの

Fig. 4 Response of output for $g=1, 500$

て各種の g に対し出力応答をシミュレートしたものである。ただし初期条件 $x(0)=(2, 2, -1, -2)^T$ とした。上側が出力 y_1 、下側が y_2 である。ゲインが増加しても解軌道のピークはほとんど変わっていない。また y_1 と y_2 では収束の速さが若干異なるがこれは配置した極に2種類のオーダーがあるためである。

6. 結 論

本論文では右可逆かつ最小位相なシステムに対するハイゲインレギュレータの構成法を示した。ハイゲインレギュレータ問題は一般に非常に複雑になるが、ここでは非干渉化制御(21)～(23)によってシステムを簡単な形(33)に整理し、さらにマルチタイムスケールの特異摂動法によってハイゲインフィードバックを求めするために計算アルゴリズムが従来のものと比べ簡単になっている点に特長がある。

参 考 文 献

1) H. Kimura: A New Approach to the Perfect Regula-

- tion and the Bounded Peaking in Linear Multivariable Control Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-26-1**, 253/270 (1981)
- 2) H. Kimura: Perfect and Subperfect Regulation in Linear Multivariable Control Systems, Automatica, **18-2**, 125/145 (1982)
- 3) K. D. Young, P. V. Kokotovic and V. I. Utkin: A Singular Perturbation Analysis of High-Gain Feedback Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-22-6**, 931/937 (1977)
- 4) 安藤, 鈴木: ハイゲインフィードバックレギュレータの設計, 計測自動制御学会論文集, **19-5**, 374/380 (1983)
- 5) P. Sannuti and H. Wason: A Singular Perturbation Canonical Form of Invertible Systems: Determination of Multivariable Root Loci, INT. J. Control, **37-6**, 1259/1286 (1983)
- 6) P. Sannuti and H. S. Wason: Multiple Time-Scale Decomposition in Cheap Control Problems-Singular Control, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-30-7**, 633/644 (1985)
- 7) L. M. Silverman and H. J. Payne: Input-Output Structure of Linear Systems with Application to the Decoupling Problem, SIAM J. Control, **9-2**, 199/233 (1971)
- 8) P. L. Falb and W. A. Wolovich: Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-12-6**, 651/659 (1967)
- 9) M. Suzuki, S. Kurachi, T. Naruse and Y. Ando: Two-Time-Scale Design of Robust Controllers for Large Structure Systems, Proceedings: 15th International Symposium on Space Technology and Science, Tokyo (1986)