適応確率近似法の拡張†

前田 裕*・河村 嘉顕*・源 末光・児島 義明**

An Extension of the Adaptive Robbins-Monro Procedure

Yutaka MAEDA*, Yoshiaki KAWAMURA*, Suemitsu MINAMOTO and Yoshiaki KOJIMA**

The adaptive Robbins-Monro stochastic approximation procedure is extended. Parameter convergence rate of the stochastic approximation procedure crucially depends on the gain coefficient which determines the increment of the parameter at each step. The adaptive Robbins-Monro procedure contains an algorithm to estimate the optimal gain. In this paper, an extension of this algorithm for the gain is proposed. We clarify the conditions which guarantee the convergence of the gain to the optimal one. Under these conditions, it becomes possible to improve the parameter convergence rate of the stochastic approximation procedure. An illustrative example is shown.

Key Words: Robbins-Monro procedure, adaptive Robbins-Monro procedure, stochastic approximation, recursive procedure

1. 緒 言

Robbins-Monro 法 (以下, RM 法) は, 確率近似法の代表的なものであり, 回帰関数の観測値をもとにその根を求める逐次アルゴリズムである¹⁾. 評価関数 $J(x)$ の導関数 $f(x)$ が雑音 ϕ をともなって観測される確率的最適化問題に対し, RM 法は確率的な傾斜法として適用できる. 評価関数 $J(x)$ を最小とするパラメータを x_* とし, その推定値を X_n とするとき一般の RM 法は,

$$X_{n+1} = X_n - \frac{\alpha_n}{K} \{f(X_n) + \phi_n\}, K > 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

と表わされる. このとき, 推定値 X_n が真値 x_* へ収束する速度は, その収束性ととも実用上重要な問題である. この収束速度は推定値 X_n を各時刻 n において修正するときに用いられるゲイン (α_n/K) の選び方に依存する. 適応確率近似法 (Adaptive Robbins-Monro 法, 以下, ARM 法) は RM 法の収束速度を適応的に最適化するために Venter によって提案されたアルゴリズムで²⁾, のちに Nevel'son と Khas'minskii によって多次元に拡張されている⁴⁾.

ARM 法は, ゲインを与える定数 K を調節可能な変数 K_n としており, そのアルゴリズムは推定値 X_n の修正に関する部分と K_n の修正に関する部分から構成されている. 一般に, $\alpha_n = 1/n$ とすると, K_n としては評価関数の最適値 x_* における 2 次微係数 $H(x_*)$ をあたえればよく, このとき, 収束速度は漸近的に最適となることが知られている^{4), 5)}. しかしながら, このような 2 次微係数は一般に未知である. したがって, ARM 法の K_n に関するアルゴリズムではこの 2 次微係数を観測値から推定している.

本研究では, この K_n の修正法を拡張したアルゴリズムを提案している. この結果として, K_n を修正するアルゴリズムにいくつかの自由に設定できる係数が含まれるようになる. これらの係数は K_n だけでなく, 推定値 X_n の収束速度にも影響を与える. これにより評価関数の事前情報に応じてこれらの係数を選択し, 推定値の過渡状態における収束速度を改善する可能性を生ずる. このとき, K_n が $H(x_*)$ に収束すれば, 推定値 X_n の収束速度の漸近最適性が保証される. 本研究では, この漸近最適性が保証されるための上記係数の選択可能な範囲を明らかにしている.

2. 問題の記述と拡張された ARM 法

本文ではパラメータ x がスカラーの場合を考察する.

† 第 13 回制御理論シンポジウムで発表 (昭 59・5)

* 大阪府立大学工学部 堺市百舌鳥梅町 4 丁 804

** 大阪電気通信大学 寝屋川市初町 18-8

* College of Engineering, University of Osaka Prefecture, Sakai, Osaka

** Osaka Electro-Communication University, Osaka (Received May 8, 1987)

(Revised July 2, 1987)

$J(x)$ を評価関数とする. x_* の推定値 X_n を与えたときの観測値 z_n^+, z_n^- をつぎのように定義しよう.

$$z_n^+ = f(X_n + c_n) + \phi_n^+ \quad (1)$$

$$z_n^- = f(X_n - c_n) + \phi_n^- \quad (2)$$

ここで, $f(x)$ は $J(x)$ の 1 次微係数, ϕ_n^+, ϕ_n^- は観測時に加わる雑音を示す. ARM 法では 2 次微係数 $H(x)$ を $f(x)$ の観測値より推定する必要があるため, その観測は X_n で行われるのではなく, 点 X_n を中心として $\pm c_n$ の摂動を加えた点で行う^{2), 4)}.

ここで, 評価関数 $J(x)$ を最小とするパラメータ x_* を z_n^+, z_n^- を観測することによって求めることを考えてみる. ARM 法を拡張したつぎのようなアルゴリズムを提案する. L_1, L_2 は $L_1 > L_2$ を満たす正数とする.

$$X_{n+1} = X_n - \alpha_n \frac{1}{K_n} \frac{(z_n^+ + z_n^-)}{2} \quad (3)$$

$$K_{n+1} = \begin{cases} L_1 & \hat{K}_n \geq L_1 \text{ の場合} \\ \hat{K}_n & L_1 > \hat{K}_n > L_2 \text{ の場合} \\ L_2 & \hat{K}_n \leq L_2 \text{ の場合} \end{cases} \quad (4)$$

ただし,

$$\hat{K}_n = b_n K_n + a_n \frac{z_n^+ - z_n^-}{2c_n}$$

ここで, K_n の初期値 K_1 は $L_1 \geq K_1 \geq L_2$ を満たすものとする. 従来の RM 法は (3) 式のアルゴリズムのみを用いた場合に対応する. ARM 法ではこれに 2 次微係数を推定する (4) 式のアルゴリズムが付け加えられる. K_n に関する (4) 式では, すべての n について $L_1 \geq K_n \geq L_2$ が成立していることがわかる. パラメータに関する (3) 式のアルゴリズムは RM 法を変形したもので, X_n を中心に $\pm c_n$ ずつ離れた位置における 2 回の観測値の平均を X_n での観測値のかわりとして用いている. これを K_n でわり, 係数 α_n をかけたものを時刻 n での推定値 X_n の修正量としている.

前述したように, K_n は推定値 X_n の収束速度を左右している. 基本的には K_n の $H(x_*)$ への収束を保証することが重要である.

(4) 式において, 係数 $a_n = 1/(n+1)$, $b_n = n/(n+1)$ とすると, このアルゴリズムは従来の ARM 法⁴⁾ に一致する. したがって, このアルゴリズムは従来の ARM 法の拡張となっていることがわかる. 従来の ARM 法の考え方は, K_n を 2 次微係数の推定値の平均値

$$K_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{z_i^+ - z_i^-}{2c_i} \quad (5)$$

とするものである. (5) 式のように各時刻における 2 次微係数の推定値を平等に評価することは $H(x)$ が

パラメータ x の値によらず一定の場合には極めて妥当性がある. しかしながら, 実際の応用の多くにおいては評価関数の 2 次微係数は x に依存する. このような場合には, 2 次微係数に対する十分古い観測値はあまり重視せず, 比較的新しい観測値を重視するほうがよいと考えられる. さらに, 評価関数の 2 次微係数に関する事前情報があればそれに応じて, 収束速度の漸近最適性を保ちながら, 係数 a_n , b_n , c_n の値を適切に選択できることが望まれる. そのためには, 一般的な形であるアルゴリズム (4) において, K_n が $H(x_*)$ に収束するための係数 a_n , b_n , c_n の条件を明らかにすることが必要である. 以下で, この条件を明らかにしよう.

3. パラメータの収束定理

このアルゴリズムにおいては二つの種類の収束について議論しなければならない. まず, (3) 式の推定値 X_n に関する収束を保証しなければならない. これは通常確率近似法の収束定理の比較的容易な拡張である. つぎのような条件を考える.

[条件]

(A1) $J(x)$ は 2 階連続微分可能で下に有界である.

(A2) 集合 $D = \{x | f(x) = 0\}$ は単連結である.

(A3) $J(x)$ の 2 次微係数 $H(x)$ は有界で Lipschitz 条件を満たす.

(A4) $|x| \rightarrow \infty$ のとき $J(x) \rightarrow \infty$

観測時に加わる雑音はつぎのような性質をもつ.

(B1) $E(\phi_n^+) = 0$, $E(\phi_n^+)^2 \leq S$ で, 各観測ごとに独立である.

$E(\cdot)$ は期待値を示し, S はある正数である.

(C1) $\alpha_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$

(C2) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n c_n < \infty$, $c_n > 0$

(D1) 正数 L_1, L_2 が存在して, すべての n に対して,

$$L_1 \geq K_n \geq L_2$$

条件 (A1) ~ (A4) は評価関数 $J(x)$ の形状に関する制約条件である. 条件 (A4) より, D は有界であり, また, 評価関数 $J(x)$ の連続性より, 閉集合である. 条件 (A2) より, x_* は D に属することがわかる. とくに, D が単連結であることより, $J(x)$ は単峰性である. この段階では D は必ずしも唯一の点からなるとは限らないが, このような場合 D は平らな底を形成しており, D 上のすべての点で $J(x)$ は最小となる.

本文ではこのように補題1のパラメータの収束を評価関数の単峰性のもとで示す。

[補題 1]

条件(A1)~(A4), (B1), (C1)~(C2)および(D1)のもとで, アルゴリズム(3)に対して,

$$X_n \rightarrow D,$$

$$J(X_n) \rightarrow J_{\min} \text{ w. p. 1 } (n \rightarrow \infty).$$

ただし, $X_n \rightarrow D$ は $\inf_{x \in D} |X_n - x| \rightarrow 0$ を, $J_{\min}$ は $J(x)$ の最小値を示し, w. p. 1 はこれらが確率1で収束することを表わす。

確率近似法の収束に関しては多くの研究がなされている。ここでは, この補題の証明に Kushner の Kiefer-Wolfowitz 法 (以下, KW 法) に関する収束定理³⁾ を援用する。KW 法ではその位置における1次微係数のかわりに, 評価関数自身の差分によるこの量の推定量が用いられている。アルゴリズム(3)では, この推定量が $X_n \pm c_n$ での2回の1次微係数の観測値の平均で置き換えられているにすぎない。すなわち, Kushner の定理1の証明のなかの B_n^i , $D\xi(X_n, c_n)$ をつぎのようにとるとする。

$$B_n^i = \frac{c_n}{2} \{H(X_n + \theta_1 c_n)$$

$$- H(X_n - \theta_2 c_n)\}$$

$$D\xi(X_n, c_n) = \phi_n^+ + \phi_n^-$$

θ_1, θ_2 は区間 $[0, 1]$ 内のある数を表わす。2次微係数 $H(x)$ が有界であるから, $|B_n^i| \leq c_n M_0$ となるような正数 M_0 が存在する。したがって, このような B_n^i も上記定理1³⁾ の B_n^i と同じ性質をもつ。さらに, 雑音 $D\xi(X_n, c_n)$ に関しては, 上式のように係数 c_n の影響を受けていないので, Kushner の定理の条件の一部は不要となる。その他のこの補題の条件も Kushner による収束定理の要件を満たしていることが容易にわかる。

この補題より, K_n は時間的に変化しようと, あるいは定数であっても, 条件(D1)を満たしさえすれば X_n の収束は保証されることがわかる。ただし, X_n の収束速度は K_n に依存しているので, この条件を満たす範囲で K_n を適切に選ぶ必要がある。

4. 主要定理

つぎに(4)式で与えられる K_n の修正アルゴリズムの収束性について考える。一般に, RM 法において推定値 X_n の収束速度を最大とするには, $\alpha_n = 1/n$, $K_n = H(x_*)$ とすればよい^{4), 5)}。したがって, α_n については(C1')の仮定を用いる。

[条件]

$$(A5) \quad L_1 \geq H(x_*) \geq L_2$$

$$(C1') \quad \alpha_n = \frac{1}{n}$$

$$(C3) \quad a_n, b_n > 0$$

$$(C4) \quad \sum_{i=1}^{\infty} (1 - b_i)^2 < \infty$$

$$(C5) \quad \sum_{i=1}^{\infty} (a_i/c_i)^2 < \infty$$

$$(C6) \quad -\infty < \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - 1 + b_i) < \infty$$

$$(C7) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$$

$$(C8) \quad a_n \leq C_1 n^{-\lambda}, \quad c_n \leq C_2 n^{-\varepsilon}$$

$$\gamma < \min(2\varepsilon, 2(L_2/L_1), 1)$$

$$\frac{\gamma}{2} + \lambda > 1$$

となる正数 $C_1, C_2, \lambda, \varepsilon, \gamma, L_1, L_2$ が存在する。

推定値 X_n の収束は評価関数に関する単峰性のもとで保証されたが, K_n の収束については集合 D 上で2次微係数 $H(x)$ が正の単一の値をとる必要がある。ここでは, 条件(A5)を加えることによって D は唯一の点からなることを仮定している。条件(C3)から(C8)は, 係数 a_n, b_n, c_n に関する条件である。つぎの定理に示すように, これらの条件は収束速度の漸近最適性を確保しながら, 過渡状態での収束速度を左右する各係数の選択可能な範囲を示している。

《定理》

条件(A1)~(A5), (B1), (C1'), (C2)~(C8)のもとで, アルゴリズム(3), (4)に対して,

$$X_n \rightarrow x_*,$$

$$J(X_n) \rightarrow J_{\min},$$

$$K_n \rightarrow H(x_*) \text{ w. p. 1 } (n \rightarrow \infty)$$

(証明)

アルゴリズム(4)は条件(D1)を満たしているので, 補題1のすべての条件は満たされ, $J(X_n)$ と X_n の収束は保証される。したがって, ここでは, K_n の収束を証明すればよい。

ここで, $\tilde{K}_n \triangleq K_n - H(x_*)$ とする。このとき, $\tilde{K}_n^2$ の収束を優マルチンゲールを用いた収束定理⁶⁾ に帰着できることを示す。アルゴリズム(4)より,

$$\tilde{K}_{n+1} = \tilde{K}_n + (b_n - 1)K_n$$

$$+ a_n \frac{z_n^+ - z_n^-}{2c_n}$$

$$- (\tilde{K}_n - L_1)L_1$$

$$- (\tilde{K}_n - L_2)L_2$$

(6)

ここで, L_1, L_2 はつぎのように定義される。

$$\mathcal{L}_1 = \begin{cases} 1 & \hat{K}_n \geq L_1 \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_2 = \begin{cases} 1 & \hat{K}_n \leq L_2 \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases} \quad (7)$$

これより, $\hat{K}_{n+1}^2$ を計算すると,

$$\hat{K}_{n+1}^2 = \hat{K}_n^2 + Q_n + N_n + R_n^1 + R_n^2 \quad (8)$$

ただし,

$$Q_n \triangleq 2\hat{K}_n \left\{ (b_n - 1)K_n + a_n \frac{z_n^+ - z_n^-}{2c_n} \right\}$$

$$N_n \triangleq (b_n - 1)^2 K_n^2 + \left(\frac{a_n}{2c_n} \right)^2 (z_n^+ - z_n^-)^2$$

$$+ 2(b_n - 1)a_n K_n \left(\frac{z_n^+ - z_n^-}{2c_n} \right)$$

$$R_n^1 \triangleq -2\hat{K}_n(\hat{K}_n - L_1)\mathcal{L}_1$$

$$- 2(\hat{K}_n - K_n)(\hat{K}_n - L_1)\mathcal{L}_1$$

$$+ (\hat{K}_n - L_1)^2 \mathcal{L}_1$$

$$R_n^2 \triangleq -2\hat{K}_n(\hat{K}_n - L_2)\mathcal{L}_2$$

$$- 2(\hat{K}_n - K_n)(\hat{K}_n - L_2)\mathcal{L}_2$$

$$+ (\hat{K}_n - L_2)^2 \mathcal{L}_2$$

R_n^1, R_n^2 について考える. 定義式より,

$$R_n^1 = -(-2H(x_*) + \hat{K}_n + L_1)$$

$$\times (\hat{K}_n - L_1)\mathcal{L}_1$$

$\mathcal{L}_1 = 1$ の場合, 常に $(\hat{K}_n - L_1) \geq 0$ であり, 条件 (A5) より,

$$-2H(x_*) + \hat{K}_n + L_1$$

$$\geq -2L_1 + L_1 + L_1 = 0$$

である. したがって, $R_n^1 \leq 0$ である. 同様に, $R_n^2 \leq 0$ である. これより,

$$\hat{K}_{n+1}^2 \leq \hat{K}_n^2 + Q_n + N_n \quad (9)$$

Q_n について考える. Q_n の条件付期待値をとると,

$$E(Q_n | K_n) = 2\hat{K}_n \left\{ (b_n - 1)K_n + a_n \frac{Y_n^+ - Y_n^-}{2c_n} \right\} \quad (10)$$

ここで, Y_n^+, Y_n^- はつぎのように定義される.

$$Y_n^+ = E(z_n^+)$$

$$Y_n^- = E(z_n^-)$$

$(Y_n^+ - Y_n^-)/2c_n$ は, x_s における評価関数の 2 次微係数を表わしており, この x_s は区間 $[X_n - c_n, X_n + c_n]$ 内に存在する. したがって,

$$\frac{Y_n^+ - Y_n^-}{2c_n} = H(x_s) = H(x_*)$$

$$+ \{H(X_n) - H(x_*)\}$$

$$+ \{H(x_s) - H(X_n)\} \quad (11)$$

この式の右辺第 2 項と第 3 項を ρ_n とおくと, 条件 (A3) より, つぎのような正数 M_1, M_2 が存在することがいえる.

$$\frac{Y_n^+ - Y_n^-}{2c_n} = H(x_*) + \rho_n \quad (12)$$

$$|\rho_n| \leq M_1 |X_n - x_*| + M_2 c_n \quad (13)$$

さらに, $|X_n - x_*|$ の収束速度に関してつぎの結果を導くことができる (付録参照).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\gamma |X_n - x_*|^2 = 0$$

この結果と条件 (C8) の第 1 式より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n |X_n - x_*| n^{\gamma/2 + \lambda} = 0$$

が成立する. さらに, (C8) より $(\gamma/2) + \lambda > 1$ であるから, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n |X_n - x_*| < \infty$ が示せる. さらに, 条件

(C8) より, $\varepsilon + \lambda > 1$ が示せ, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n < \infty$ がいえる.

これらの関係を (13) 式に用いると次式を示すことができる.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \rho_n| < \infty \quad (14)$$

(12) 式を (10) 式に代入し, $\hat{K}_n$ の定義を用いて整理すると次式を得る.

$$E(Q_n | K_n) = -2a_n \hat{K}_n^2$$

$$+ 2(a_n + b_n - 1)\hat{K}_n K_n$$

$$+ 2a_n \rho_n \hat{K}_n \quad (15)$$

つぎに, N_n について条件付期待値をとると,

$$E(N_n | K_n) \leq (b_n - 1)^2 K_n^2$$

$$+ \left(\frac{a_n}{2c_n} \right)^2 (Y_n^+ - Y_n^-)^2 + \left(\frac{a_n}{2c_n} \right)^2 2S$$

$$+ \frac{(b_n - 1)a_n}{c_n} \{K_n(Y_n^+ - Y_n^-)\} \quad (16)$$

(15), (16) 式の $-2a_n \hat{K}_n^2$ をのぞくすべての項を μ_n とおくと, (9) 式の条件付期待値について次式を得る.

$$E(\hat{K}_{n+1}^2 | K_n) \leq \hat{K}_n^2 - 2a_n \hat{K}_n^2 + \mu_n \quad (17)$$

ここで, (4) 式より $\hat{K}_n^2$ は有界である. さらに, 条件 (C4), (C5) にシュワルツの不等式を利用することによって,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_n - 1)a_n}{c_n} < \infty$$

を示すことができる. 上式, 条件 (A5), (B1), (C3) ~ (C6) および (14) 式の関係より, μ_n はつぎの性質をもつことがわかる.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n| < \infty \quad (18)$$

(17), (18) 式, 条件 (C7) および $\hat{K}_n^2 \geq 0$ であることより, $\hat{K}_n^2$ の収束を以下のように優マルチンゲールの収束に帰着させることができる. すなわち,

$$w_n \triangleq \hat{K}_n^2 + \sum_{i=n}^{\infty} |\mu_i|$$

とおくと, w_n は正値優マルチンゲールとなり, その

収束は保証される⁶⁾。さらに、条件(C7)を用いて次式が示される。

$$\hat{K}_n^2 \rightarrow 0 \quad \text{w. p. 1} \quad (n \rightarrow \infty)$$

したがって、

$$K_n \rightarrow H(x_*) \quad \text{w. p. 1} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\text{証明終})$$

補題1では、推定値 X_n と評価関数 $J(X_n)$ の収束は、評価関数の単峰性の条件のもとで示されている。したがって、条件(A5)が成立しない場合にも、 K_n の収束は保証されないが、 X_n と $J(X_n)$ の収束は保証される。

5. 数値計算例

ARM 法の収束速度の検討は $n \rightarrow \infty$ における漸近的な意味では Nevel'son や Khas'minskii によって述べられている。しかしながら、実用的にはこのような漸近的収束速度のみでなく、過渡状態における収束速度も重要である場合が多い。ところが、過渡状態での収束速度は評価関数の形状に複雑に依存する。とくに、 $H(x)$ が x により大きく変動する場合、 K_n の推定には比較的古い観測値より新しい観測値を優先する方が望ましいと思われる。以下、パラメータ x の位置によって評価関数の2次微係数が異なるような場合について簡単な数値計算例を考えることとする。つぎのような評価関数を考える。

$$J(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{6} & x > 2 \text{ の場合} \\ \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} & 2 \geq x \geq 1 \text{ の場合} \\ \frac{1}{2}x^2 & 1 > x > -1 \text{ の場合} \\ -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} & -1 \geq x \geq -2 \text{ の場合} \\ x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{6} & -2 > x \text{ の場合} \end{cases}$$

この評価関数の2次微係数は $|x| \geq 2$ では2、 $|x| \leq 1$ では1の値をとり、その間を $J(x)$ およびその1次、2次微係数が連続となるよう補間されている。

ここで、係数 a_n, b_n, c_n および α_n はつぎのように設定する。

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^r}$$

$$b_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^r}$$

$$c_n = \frac{1}{(n+1)^{0.26}}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{n}$$

Fig. 1 Estimated value X_n for x_*

Fig. 2 Estimated value K_n for $H(x_*)$

$r=0.8$

また、 L_1, L_2 は条件(C8)を満たすように設定するものとする。これらの評価関数や係数は定理の諸条件を満たしている。上記係数において、とくに $r=1.0$ と置き換えると、このアルゴリズムは従来の ARM 法となる。 $r=0.8$ とした場合のアルゴリズムは従来の ARM 法と比較して、新しい観測値を重視するようになる。 X_n と K_n の初期値をそれぞれ $X_1=100$, $K_1=5.0$ 、雑音の分散を0.1とした場合の x_* の推定値 X_n の変化を Fig. 1 に、また、そのときの K_n の変化を Fig. 2 に実線で示す。破線は、他の条件を同一とし、係数を従来の ARM 法となるようにした場合の結果である。

この例において過渡状態でのゲインの推定およびパラメータの収束が従来の ARM 法より、改善されていることが Fig. 1, Fig. 2 よりわかる。

6. おわりに

ARM 法の一般化を行った。これによって、ゲインの収束を保証するための諸条件が明らかとなった。今後これら係数の選び方を明らかにすることや実際面への応用が期待される。また、このアルゴリズムは評価関数の収束速度を考慮しなければならない最適化問題の収束速度の改善に有効であるが、多次元への拡張と

もに別の機会に報告したい。

参 考 文 献

- 1) H. Robbins and S. Monro: A Stochastic Approximation Method, Ann. Math. Statist., **22**-1, 400/407 (1951)
- 2) J. H. Venter: An Extension of the Robbins-Monro Procedure, Ann. Math. Statist., **38**-1, 181/190 (1967)
- 3) H. J. Kushner: Stochastic Approximation Algorithms for the Local Optimization of Functions with Nonunique Stationary Points, IEEE Trans. Automatic Control, **AC**-17-5, 646/654 (1972)
- 4) M. B. Nevel'son and R. Z. Khas' minskii: An Adaptive Robbins-Monro Procedure, Automation and Remote Control, **34**-10, 1594/1607 (1973)
- 5) J. Sacks: Asymptotic Distribution of Stochastic Approximation Procedure, Ann. Math. Statist., **29**-2, 373/405 (1958)
- 6) アイゼルマン, ブラベルマン, ロブノエル: パターン認識と学習制御, 123, 共立出版 (1978)

《付 録》

〔補題〕

条件 (A1)~(A5), (B1), (C1'), (C2), (C3), (C8)のもとで, アルゴリズム(3), (4)に対して, つぎの結果が得られる。

$\gamma < \min\left(2\varepsilon, \frac{2L_2}{L_1}, 1\right)$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\gamma} |X_n - x_*|^2 = 0 \quad (\text{A.1})$$

(証明)

ARM 法に関する同様の証明は文献 4) の定理 2.1 の証明中の (A8) 式の証明にみられるが, アルゴリズム, 条件などが多少異なるので以下にこの証明の概略を示す。各式の誘導は同文献を参照されたい。

一般性を失うことなく $x_* = 0$ と仮定する。ここで, V_n と作用素 $\mathcal{D}$ をつぎのように定義する。

$$V_n = n^{\gamma} |X_n|^2$$

$$\mathcal{D}V_n = E\{V_{n+1} | V_n\} - V_n \quad (\text{A.2})$$

$\gamma < 1$ を考慮すると, (A.2) 式より,

$$\mathcal{D}V_n \leq (n+1)^{\gamma} |X_n|^2 + \gamma n^{\gamma-1} |X_n|^2 \quad (\text{A.3})$$

を得る。一方, (1), (2) 式と条件 (A3) より, つぎの関係が得られる。以下で M_i ($i=3, 4, \dots$) は正定数を表わす。 x_{s1}, x_{s2} をそれぞれ区間 $[X_n, X_n + c_n], [X_n - c_n, X_n]$ 内に存在する適当な点とする。

$$\left| \frac{E\{z_n^+ + z_n^-\}}{2} - f(X_n) \right|$$

$$= \frac{c_n}{2} |H(x_{s1}) - H(x_{s2})|$$

$$\leq \frac{c_n}{2} M_3 |x_{s1} - x_{s2}|$$

$$\leq M_3 c_n^2 \quad (\text{A.4})$$

アルゴリズム(3), (4), (A.4) 式, 条件 (A1), (A3), (A5), (C8), 不等式 $|f(x)| < M_4(1+|x|)$ および $|x| < 1+|x|^2$ より, 十分大きな n に対して, 次式が得られる。

$$\mathcal{D}|X_n|^2 = -\frac{2}{nK_n} \frac{E\{z_n^+ + z_n^-\}}{2} X_n$$

$$+ \frac{1}{4n^2} E\{K_n^{-1}(z_n^+ + z_n^-)\}^2$$

$$\leq -\frac{2H(x_*)}{nK_n} |X_n|^2 + \frac{M_5 X_n}{n} |X_n|^2$$

$$+ M_6 g(n)(1+|X_n|^2)$$

$$\leq -\frac{2(L_2/L_1)}{n} |X_n|^2$$

$$+ \frac{M_5 X_n}{n} |X_n|^2$$

$$+ M_6 g(n)(1+|X_n|^2) \quad (\text{A.5})$$

ここで, $g(n) = c_n^2/n + 1/n^2$

(A.5) 式の関係をも (A.3) 式に代入計算すると, つぎの関係が得られる。

$$\mathcal{D}V_n \leq \frac{\left\{ \gamma - 2 \frac{L_2}{L_1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\gamma} + M_7 X_n \right\}}{n} V_n$$

$$+ M_6 g(n)(n+1)^{\gamma} (1+|X_n|^2) \quad (\text{A.6})$$

$\gamma < 2\varepsilon$ かつ $\gamma < 1$ より, $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)(n+1)^{\gamma}$ は収束する。

また, $\gamma < 2(L_2/L_1)$ であるから, $\gamma - 2(L_2/L_1)(1+1/n)^{\gamma}$ はある負の定数より小さい。さらに, 補題 1 より, $X_n \rightarrow x_* = 0$ w. p. 1 である。以上の関係を (A.6) 式に用いると, $N_0, P \geq 0$ が存在して, $n \geq N_0$ に対してつぎの関係が成り立つ。

$$E\{V_{n+1} | V_n\} \leq (1-P)V_n + \xi_n$$

$$\leq V_n + \xi_n \quad (\text{A.7})$$

ただし, ξ_n は (A.6) 式の右辺第 2 項を表わす。

$w_n = V_n + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$ と定義すると, w_n は優マルチンゲールの性質をもつことがわかる。これより, w_n は概収束し, $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$ が収束することより, (A.1) の結果が導かれる。