細管粘度計出口の流れに対する Bernoulli の定理に基づく検討

芝 亀 吉*・一 瀬 正*・北 村 仁 一*

Investigation Based upon Bernoulli's Theorem for Outlet-Flow of Capillary Viscometer

Kamekichi SHIBA*, Tadashi ICHINOSE* and Jin-ichi KITAMURA*

1. は し が き

細管粘度計の流入前, 流出後の流れの影響は前報^{1)~2)}において Bernoulli の法則に基づいて, また, 運動法則に基づいて検討された。

Bernoulli の法則に基づく検討では, 液体の流れの流管に Bernoulli の法則を適用したが, Bernoulli の法則は, 本来細い流管についての法則であるから, 流管の断面において圧力も流速も一様であるとしなければならなかった。

著者によっては, 細いとみられない流管に Bernoulli の法則を適用するには圧力, 流速の平均値を用いればよいとしている。しかし, 後に知られるように, この場合には平均圧力を用いればよいことは認められるが, 平均流速を用いればよいとはいえない。

細い流管とみることのできない流管は, すべて, 細い流管の集りとみることができる。ここでは, 細いとみられない流管を細い流管の集りとして, Bernoulli の法則を適用して, 流出後の流れの影響を取り扱うことにする。

細管の流入前の流れの影響も, 鉛直細管の場合も同様の考え方で, Bernoulli の法則の適用ができるが, 流出後の流れは, その流速分布が知られているので, 一様な流速とみなす場合とのちがいが明確になる。このような事情があるので, 水平細管から同軸の大径直円管へ流出する場合だけの取扱いに止めることにする。Bernoulli の法則は, 粘性が無視されるとしてのものであるから, ここでも粘性は無視されるとする。

2. 流れの状態

水平に置かれている細管粘度計の細管から流出した

* 東洋大学工学部 川越市鯨井中野台 2100

* Faculty of Engineering, Toyo University, Kawagoe

(Received March 5, 1986)

(Revised October 21, 1986)

Key Words: viscometer, liquid flow, capillary, outlet end effect

Fig. 1 The flow from horizontal capillary tube

Fig. 2 The rectangular parallelepiped element in steady flow

液体が同軸の大径直円管に定常流として流入する場合であり, その概略が Fig. 1 に示されている。BB は細管の流出端面, EE は BB から十分遠く離れている位置での大径直円管の断面である, 細管の半径は a , 大径管の直断面積は S_E である。

細管粘度計の流出端面 BB では, 流速は管軸からの距離 r だけの関数で,

$$v_r = \frac{1}{4} \frac{\bar{\omega}}{\eta} (a^2 - r^2) = 2\bar{v} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (1)$$

である。ここに, η は粘度, $\bar{\omega}$ は細管粘度計の細管の単位長さ当りの圧力低下であり, $\bar{v}$ は平均流速で,

$\bar{v} = \frac{Q}{\pi a^2}$ である。 Q は体積流量である。

BB, EE の両断面では, 流速がすべて管軸方向であるとする。ただし, これは両断面の間の任意の断面でも同様であることを意味しない。

任意の水平面上に, 管軸に平行な y 座標軸を定め, 同じ水平面上で y 軸に垂直に x 座標軸を, また, 鉛直上向きに h 座標軸を定める。BB, EE は y がそれぞれ一定の y_B, y_E の平面であり, その両水平面上の各 1 点 (y_B, x_B, h_B) (あるいは (y_E, x_E, h_E)) に稜が dx, dy, dh の微小直六面体内の液体を考える (Fig. 2)。

定常状態であり, 流速は y 方向であるから, この液体部分の加速度の x 成分および h 成分は 0 であ

る。したがって、この液体部分の受けている力の総和の x 成分および h 成分は 0 である。

粘性が無視されるとしているので、及ぼされている力は、圧力による力と重力とである。点 (x, y, h) での圧力を $p(x, y, h)$ とすると、 x 方向の力は、

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dh + p dy dh = 0$$

すなわち、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

であり、 h 方向の力は

$$\begin{aligned} & \left\{ -\left(p + \frac{\partial p}{\partial h} dh\right) + p \right\} dx dy - \rho g dx dy dh \\ & = -\left(\frac{\partial p}{\partial h} + \rho g\right) dx dy dh = 0 \end{aligned}$$

すなわち、

$$\frac{\partial p}{\partial h} + \rho g = 0 \quad (3)$$

である。ここでは、 $y = \text{const}$ の面 (すなわち、BB, EE) を考えているので、 p は h と x との関数であり、(2)式および(3)式により、

$$p = p_0 - \rho gh \quad (4)$$

である。 p_0 は $h=0$ での圧力 (BBでは p_{BO} , EEでは p_{EO}) である。

3. Bernoulli の法則の適用

BB から EE までの流管に Bernoulli の法則を適用するのであるが、BB での流速分布が知られているので、流速が一樣であるとみることができない。すなわち、BB から EE までの流管を 1 本の細い流管とみることができない。

細管の流出端面 BB から大径管の断面 EE までの流管を細い流管の集りとして、その代表の i 番目の細い流管に Bernoulli の法則を適用すると、

$$p_{Bi} + \rho gh_{Bi} + \frac{1}{2} \rho v_{Bi}^2 = p_{Ei} + \rho gh_{Ei} + \frac{1}{2} \rho v_{Ei}^2 \quad (5)$$

が得られる。 p_{Bi} , p_{Ei} には(4)式の関係があるので、(5)式は

$$p_{BO} + \frac{1}{2} \rho v_{Bi}^2 = p_{EO} + \frac{1}{2} \rho v_{Ei}^2 \quad (6)$$

となる。この(6)式が i 番目の細い流管についての Bernoulli の法則を表わす式である。

定常流の流管では、体積流量 Q は流管の断面の位置によらないので、 i 番目の細い流管についても同様で、体積流量 dQ_i が断面の位置によらない。 i 番目の細い流管の BB, EE 面での直断面積を dS_{Bi} , dS_{Ei}

とすると、

$$dQ_i = v_{Bi} dS_{Bi} = v_{Ei} dS_{Ei} \quad (7)$$

である。この dQ_i を(6)式の両辺に掛けて、

$$\begin{aligned} & p_{BO} v_{Bi} dS_{Bi} + \frac{1}{2} \rho v_{Bi}^3 dS_{Bi} \\ & = p_{EO} v_{Ei} dS_{Ei} + \frac{1}{2} \rho v_{Ei}^3 dS_{Ei} \end{aligned} \quad (8)$$

とする。これと同様の式をすべての細い流管について作成する。その総和は、

$$\begin{aligned} & \sum_i p_{BO} v_{Bi} dS_{Bi} + \sum_i \frac{1}{2} \rho v_{Bi}^3 dS_{Bi} \\ & = \sum_i p_{EO} v_{Ei} dS_{Ei} + \sum_i \frac{1}{2} \rho v_{Ei}^3 dS_{Ei} \end{aligned} \quad (9)$$

である。ここで、 p_{BO} , p_{EO} はすべての細い流管について共通であるから、

$$\left. \begin{aligned} \sum_i p_{BO} v_{Bi} dS_{Bi} &= p_{BO} \sum_i v_{Bi} dL S_{Bi} \\ &= p_{BO} \sum_i dQ_i = p_{BO} Q \\ \sum_i p_{Ei} v_{Ei} dS_{Ei} &= p_{Ei} \sum_i v_{Ei} dS_{Ei} = p_{EO} Q \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

である。

流出端面 BB における流速が(1)式で表わされるので、流速が r だけの関数であるから、直断面 BB を、流速が一樣な多くの同心円環の集まりとみることが出来る。さらに、これらの円環の幅を十分に小さいとすることができるので半径が r_i のものを代表として、

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{1}{2} \rho v_{Bi}^3 dS_{Bi} &= \sum_i \frac{1}{2} \rho v_{ri}^3 \times 2\pi r_i dr_i \\ &= \int_0^a \frac{1}{2} \rho v_r^3 \times 2\pi r dr = \int_0^a \frac{\rho}{2} \left\{ 2\bar{v}_B \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right\}^3 2\pi r dr \\ &= 8\pi \rho \bar{v}_B^3 \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) r dr = 2\pi a^2 \rho \bar{v}_B^3 = 2\rho \frac{Q^3}{\pi^2 a^4} \end{aligned} \quad (11)$$

である。EE での流速分布は知られていないが、 $S_E \gg \pi a^2$ であり、EE 面での体積流量は BB での体積流量に等しい。その体積流量を Q とする。EE 面での平均流速 $\bar{v}_E$ は $\bar{v}_E = \frac{Q}{S_E}$ であり、 $\bar{v}_E \ll \bar{v}_B$ である。それで、 v_{Ei} の代りに $\bar{v}_E$ を用いても大きい誤差はないと考えられる。 v_{Ei} の近似値として $\bar{v}_E$ を採用すると、

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{1}{2} \rho v_{Ei}^3 dS_{Ei} &\doteq \sum_i \frac{1}{2} \rho \bar{v}_E^3 dS_{Ei} \\ &= \frac{1}{2} \rho \bar{v}_E^3 S_E = \frac{1}{2} \rho \frac{Q^3}{S_E^2} \end{aligned} \quad (12)$$

である。(10), (11), (12)式を(9)式に代入すると、

$$p_{BO} + \frac{2\rho Q^2}{\pi^2 a^4} = p_{EO} + \frac{1}{2} \rho \frac{Q^2}{S_E^2} \quad (13)$$

となる。

流出後の流れの影響を示す量は

$$\Delta p \equiv p_{EO} - p_{BO} = \frac{2\rho Q^2}{\pi^2 a^4} - \frac{1}{2} \frac{\rho Q^2}{S_E^2} \quad (14)$$

である。この式の右辺の第2項は第1項に比してかなり小さいので無視するので、

$$\Delta p \approx \frac{2\rho Q^2}{\pi^2 a^4} \quad (15)$$

であるが、無視された $-\frac{1}{2} \frac{\rho Q^2}{S_E^2} < 0$ であるから、

$$\Delta p < \frac{2\rho Q^2}{\pi^2 a^4} \quad (16)$$

である。

4. 平均圧力、平均流速を用いた場合との比較

BB においても、EE においても、平均圧力はそれぞれ p_{BO} , p_{EO} であるから、Bernoulli の法則を表わす(6)式には平均圧力が用いられるとみてよい。

BB, EE 両断面において、流速がそれぞれ一様に $\bar{v}_B, \bar{v}_E$ であるとして、(9)式の v_{Bi}, v_{Ei} をそれぞれ $v_{Bi} = \bar{v}_B$, $v_{Ei} = \bar{v}_E$ として得られる式

$$\begin{aligned} \sum_i p_{BO} \bar{v}_B dS_{Bi} + \sum_i \frac{1}{2} \rho \bar{v}_B^2 dS_{Bi} \\ = \sum_i p_{EO} \bar{v}_E dS_{Ei} + \sum_i \frac{1}{2} \rho \bar{v}_E^2 dS_{Ei} \end{aligned} \quad (17)$$

を $Q = \bar{v}_B S_B = \bar{v}_E S_E$ および(10)式を利用して整理すると、

$$p_{BO} + \frac{1}{2} \rho \bar{v}_B^2 = p_{EO} + \frac{1}{2} \rho \bar{v}_E^2$$

すなわち、

$$p_{EO} - p_{BO} = \Delta p' = \frac{1}{2} \frac{\rho Q^2}{\pi^2 a^4} - \frac{1}{2} \frac{\rho Q^2}{S_E^2} \quad (18)$$

が得られる。

断面 BB での速度分布は(14)式と(18)式では異なるので(18)式では p_{BO} を p'_{BO} とする。

前と同様の理由で、(18)式の右辺の第2項を無視す

ると、

$$\Delta p' = \frac{1}{2} \frac{\rho Q^2}{\pi^2 a^4} \quad (19)$$

であり、無視された量が負であるから、

$$\Delta p' < \frac{1}{2} \frac{\rho Q^2}{\pi^2 a^4} \quad (20)$$

である。

(15)式と(19)式とを比較すると

$$\Delta p > \Delta p' \quad (21)$$

である。これは、平均流速を用いると、流速分布を考慮に入れた結果とは一致しないことを示している。

5. む す び

細管粘度計の流入前、流出後の流れの影響を Bernoulli の法則に基づいて検討することができる。Bernoulli の法則は、本来、定常流の細い流管についての法則であるが、細い流管とみられない流管に適用するには、通例平均圧力、平均流速を採用すればよいと考えられている。しかし、これが正当であるかどうかは検討されていない。流管はすべて細い流管の集りとみられることはよく知られているが、細い流管に適用して得られる Bernoulli の法則を表わす式を用いて理論を展開する方法は知られていなかった。

本論文では、細い流管に Bernoulli の法則を適用して得られた式に、その細い流管の体積流量を乗じることによって理論の展開を行うことができた。

得られた結果により、平均圧力を用いることは正しいが、平均流速を用いることは正しくないことが明らかとなった。

参 考 文 献

- 芝, 一瀬, 北村: 細管式粘度計の補正, 応用物理, **40**-7, 742/748 (1971)
- 芝, 一瀬, 北村: 細管粘度計の補正の理論, 計測自動制御学会論文集, **21**-12, 1295/1301 (1985)