駆動電圧および電流に振幅制限がある場合の直流サーボ モータの最短時間ディジタル制御システムの構成

黄 席 樾*・佐 藤 正 喜*・亀 山 充 隆*・樋 口 龍 雄*

Design of a Time-Optimal Digital Control System for a DC-Servomotor
with Amplitude Limitation of the Driving Voltage and Current

Xi Yue HUANG*, Masaki SATO*, Michitaka KAMEYAMA* and Tatsuo HIGUCHI*

Time-optimal control of a DC-servomotor with a bounded driving voltage and a bounded driving current is very useful for practical applications, because the capability of the power amplifier is usually limited. In particular, real-time control which involves the computation of the optimal solution is almost impossible when a microcomputer is used as a digital controller, because of the limitation of its computation speed.

In this paper, time-optimal control system with the combination of feedforward and linear state feedback control is proposed to overcome the above problem. In the feedforward control, the prestored optimal sequence of a manipulation variable which has been computed using linear programming is applied to a DC-Servomotor. In the feedback control the effects of disturbances and modeling errors can be reduced, which leads to an exact constant value control. From an experimental result, it is made clear that practical microcomputer-based time-optimal control can be realized easily under the limited driving capability.

Key Words: DC-servomotor, feedforward control, linear state feedback, time-optimal control

1. ま え が き

マイクロコンピュータのめざましい発展や普及とともに、メカトロニクスにおける DC サーボモータの高精度、高速位置決め制御はきわめて重要になりつつある。

ところで、実際の制御対象においては、多くの制御対象は入力としての操作量やシステムの内部状態に制限があったりする。したがって、システムにはなにかしかな意味で非線形性が存在することになる。

このような拘束条件の一つとして操作量に制限がある場合の離散時間系における最短時間制御問題に対しては、あらかじめ計算された最適解に基づくフィードフォワード制御と、外乱やモデル誤差の影響を軽減させ、正確な定値制御を行うための線形状態フィードバックを組合せた制御方式を筆者らはすでに提案してきた^{1)~3)}。

DC サーボモータに加える印加電圧と駆動電流は、一般的に、過大な電圧あるいは電流を長時間印加すると、DC サーボモータが壊れる原因になるため、定格電圧 $V_{\max}$ および定格電流 $I_{\max}$ 以下の拘束条件のもとで使用しなければならない⁴⁾。

本論文では、このような観点から、操作量の振幅制限と、内部状態の一つであるモータの駆動電流の制限が共に存在する場合の DC サーボモータの最短時間制御について考察を行う。DC サーボモータに印加する電圧と駆動電流は、定格電圧および定格電流以下の拘束条件のもとでの最短時間制御ができれば、ある一定の容量を有する駆動回路で最大性能を発揮できる。したがって、電源回路を含めたシステム全体として小形化と低価格化にきわめて有用となる。

2. 拘束条件付き最短時間制御問題の解法

一般に、最短時間制御問題とは制御対象の内部状態を振幅制限のもとで、任意の初期状態 $X(0)$ から、ある目標状態 X_r に最短時間で到達させることである^{5), 6)}。

今、DC サーボモータに対して電圧制御による最短時間制御を考えることにする。これは、制御入力 $u(k)$

* 東北大学工学部 仙台市荒巻字青葉

* Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai

(Received July 7, 1986)

(Revised October 20, 1986)

が $|u(k)| \leq M$ の電圧の振幅制限および DC サーボモータへの駆動電流 $I_a(k)$ が $|I_a(k)| \leq L$ の電流制限となるような拘束条件のもとで、初期状態 $X(0)$ を目標状態 X_e に最短時間で到達させる問題として記述できる。

通常、扱う制御対象はいろいろな非線形要素を含んでいる。たとえば、摩擦、駆動回路の不感帯、出力側での定格電圧で決まる飽和特性などがある。これらの非線形要素をあらかじめ補正したり（付録1、付録2参照）、制限振幅内で使用できれば、この制御対象を線形として近似することができる。ここでは、制御対象を線形1入力1出力とし離散化して考える。このようにすると、DC サーボモータは付録1に示すようにつぎの3次の状態モデルで記述できる。

$$\left. \begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + Bu(k) \\ y(k) &= CX(k) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

以下のような振幅制限と駆動電流の制限

$$\left. \begin{aligned} |u(k)| &\leq M \quad (k=0, 1, 2, \dots) \\ |I_a(k)| &\leq L \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

のもとで、状態を初期状態 $X(0)$ から、任意の目標状態 X_e に最短時間で到達させ、その後、定常入力 u_e により、状態を X_e に保持させる。この目標状態 X_e と定常入力 u_e は、つぎの状態方程式を満たすものとする。

$$\left. \begin{aligned} X_e &= AX_e + Bu_e \quad |u_e| < M \\ r &= CX_e \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

すなわち、

$$\begin{bmatrix} A-I_n & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_e \\ u_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \quad (4)$$

ただし、 r は目標値、 I_n は (3×3) の単位行列である。

一般に、状態方程式(1)の解は次式で与えられる。

$$X(i) = A^i X(0) + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-1-j} Bu(j) \quad (5)$$

ここで、(2)式の制約のもとで

$$X(i) = X_e \quad (6)$$

が成り立てば、状態 X を i ステップで X_e に到達させることが可能である。

ここでは、逐次探索アルゴリズムを使って、(6)式が成り立つかどうか判定することにより、最小ステップ数 i を見つけることができる。

最短時間制御問題は種々の解法があるが^{7)~10)}、上述のような拘束条件付きの最適解は線形計画法を用いて容易に求められる¹¹⁾。線形計画法では、変数の値は非負という制約があるが、操作量 $u(k)$ は正負両方の値を取りうるため、まず、つぎの変数変換を行う。

$$u_m(k) = u(k) + M \quad (0 \leq u_m(k) \leq 2M)$$

ここで、 $[\cdot]^t$ はベクトルあるいは行列の転置を示すものとし、 i 個の要素からなる列ベクトル U_m, U_L と3個の要素からなる列ベクトル W および $(3 \times i)$ の行列 S_i を、

$$U_m = [u_m(0), u_m(1), u_m(2), \dots, u_m(i-1)]^t$$

$$U_L = [M, M, M, \dots, M]^t$$

$$S_i = [A^{i-1}B|A^{i-2}B|, \dots, |AB|B]$$

$$W = X_e - A^i X(0) + S_i U_L$$

とおくと、(5)式と(6)式は、

$$S_i U_m = W \quad (7)$$

となる。また、制御対象の入力電圧の振幅制限条件である $|u(k)| \leq M$ は、つぎのように書ける。

$$U_m + H_1 = 2U_L \quad (8)$$

(H_1 は i 個のスラック変数からなる列ベクトルである)

さて、 $L_e = 0$ とおくと（付録1参照）(A.1)式により、離散化した電機子電流 $I_a(k)$ は(9)式として求まる。

$$I_a(k) = (v_a(k) - K_a \omega(k)) / R_a \quad (9)$$

したがって、(2)式の $|I_a(k)| \leq L$ は、(9)式により、

$$|v_a(k) - K_a \omega(k)| \leq LR_a \quad (10)$$

となる。また、 $\alpha = e^q$ 、 $\beta = K_m(1 - e^q)$ とおくと、 $\omega(k+1)$ と $v_a(k+1)$ は(A.9)式により、

$$\omega(k+1) = \alpha \omega(k) + \beta v_a(k) \quad (11)$$

$$v_a(k+1) = u(k) \quad (12)$$

となる。差分方程式(11)の一般解を次式で示す。

$$\omega(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-1-j} \beta v_a(j) \quad (13)$$

(13)式を(10)式に代入して、

$$\left| v_a(k) - K_a \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-1-j} \beta v_a(j) \right| \leq LR_a \quad (14)$$

となる。さらに、(12)式により以下のように書ける。

$$\left| u(k-1) - K_a \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-1-j} \beta u(j-1) \right| \leq LR_a \quad (15)$$

ただし、 $u(-1) = 0$ とする。簡単のため、列ベクトル Z_1 および Z_2 の i 個の要素 (Z_1)_n および (Z_2)_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots, i-1$) をつぎのように定義する。

$$(Z_1)_n = U_m(n) - K_a \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{n-1-j} \beta U_m(j)$$

$$(Z_2)_n = M - K_a \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{n-1-j} \beta M$$

また、スカラー g 、 $(i \times i)$ の行列 S_i および i 個の要素からなる列ベクトル W_+ 、 W_- を、

$$g = -K_a \beta,$$

$$S_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ g\alpha & g & 1 & \cdots & 0 \\ g\alpha^2 & g\alpha & g & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g\alpha^{k-2} & g\alpha^{k-3} & g\alpha^{k-4} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_+ = Z_2 + LR_a$$

$$W_- = Z_2 - LR_a$$

とくと,

$$S_s U_m = Z_1$$

となる. さらに, $I_a(k)$ の制約条件 (15) 式は

$$S_s U_m + H_2 = W_+ \quad (16)$$

$$S_s U_m - H_3 = W_- \quad (17)$$

となる. ただし, H_2 および H_3 は i 個のスラック変数からなる行ベクトルである. すべての制約条件 [(7), (8), (16), (17) 式] をまとめると, (18) 式になる.

$$\begin{bmatrix} S_i & 0 & 0 & 0 \\ I & I & 0 & 0 \\ S_s & 0 & I & 0 \\ S_s & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_m \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ 2U_L \\ W_+ \\ W_- \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここで, U_m, H_1, H_2, H_3 および W, U_L, W_+, W_- の要素は非負であり, I は $(i \times i)$ 単位行列である. もし W, U_L, W_+, W_- の要素のなかで, 負のものがあれば, あらかじめ両辺に -1 を乗じて, 正にしておく. この条件における基底許容解を求めるために, 3 個の要素の人為変数からなる列ベクトル E_1 , および i 個の要素の人為変数からなる列ベクトル E_2 を導入すると, 制約条件はつぎようになる.

$$\begin{bmatrix} S_i & I_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ S_s & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ S_s & 0 & 0 & 0 & -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_m \\ E_1 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ 2U_L \\ W_+ \\ W_- \end{bmatrix} \quad (19)$$

ここで, E_1 および E_2 の要素も非負である. 目的関数として,

$$f = [1, 1, \dots, 1][E_1 \ E_2]' \quad (20)$$

を選び, 最小化する. f の最小値が 0 のときには, (18) 式の基底許容解が得られたことになり, 最小ステップ数 i を見つけることができる.

3. 制御系の構成

ここでは, 前章で得られた最短時間制御問題の解に基づいた制御系の構成を示す.

制御対象に加える入力 $u(k)$ は, フィードフォー

ド制御とフィードバック制御を組合せたもので, 次式で与えられる構成法を考える.

$$u(k) = u^o(k) + K_a(X^o(k) - X(k)) \quad (21)$$

ここで, $u^o(k)$ は最短時間制御を実現する最適入力系列で, $X^o(k)$ は最適状態軌道である. すなわち, 最適な状態軌道に対する偏差をフィードバックしている.

フィードバックゲイン K_a は, つぎの 2 次形式評価関数が最小になるように定める.

$$\begin{aligned} J &= (X^o(k+1) - X(k+1))' Q (X^o(k+1) - X(k+1)) \\ &= (X^o(k+1) - AX(k) - Bu(k))' Q (X^o(k+1) \\ &\quad - AX(k) - Bu(k)) \end{aligned} \quad (22)$$

ただし, Q は正定対称行列である. $\partial J / \partial u(k) = 0$ とすることにより得られた最適操作量 $u(k) = u_{opt}(k)$ は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} u_{opt}(k) &= K_c X^o(k+1) - K_a X(k) \\ K_c &\triangleq (B'QB)^{-1} B'Q \\ K_a &\triangleq (B'QB)^{-1} B'QA \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

また, つぎの関係があるので,

$$X^o(k+1) = AX^o(k) + Bu^o(k) \quad (24)$$

(21) 式と (23) 式は等価である.

フィードフォワード項 $u_F(k)$ は, 次式を用いて, あらかじめ求めておくことができる.

$$u_F(k) = u^o(k) + K_a X^o(k) \quad (25)$$

$u_F(k)$ は, 初期状態や目標状態に依存する. そこで, あらかじめいくつかの経路に対する $u_F(k)$ を求めておき, ROM などに記憶させておけばよい. 実際の制御では, 制御装置は指令としての目標値が与えられると, 状態を観測して既に計算された $u_F(k)$ を制御対象に加える.

ところで, (21) 式の入力 $u(k)$ は, 状態軌道が最適なものと完全に一致していない場合には, 必ずしも振幅制限内に収まるとは限らない. そこで, 飽和特性をフィードバックループ内に入れなければならない. その際の安定性をつぎに示す.

フィードバック系は定常状態において, 以下のように記述される.

$$\left. \begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + Bf(u(k)) \\ u(k) &= u_e + K_a(X_e - X(k)) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ここで, u_e は定常状態 X_e ときの入力, f は飽和特性を示し, Fig. 1 のように二つの直線にはさまれた非線形関数である. 原点のまわりでの安定性の問題に置き換えるために, つぎの変数変換を施すと,

$$\left. \begin{aligned} X(k) &\leftarrow X(k) - X_e \\ u(k) &\leftarrow u(k) - u_e \\ f(u(k)) &\leftarrow f(u(k) + u_e) - u_e \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(28) 式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + Bf(u(k)) \\ u(k) &= -K_a X(k) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

安定性の証明について、リアプノフの間接法を用い

Fig. 1 Nonlinear function $f(u)$

Fig. 2 Converted nonlinear function of amplitude limitation

ることとし、リアプノフ関数として(29)式を考える。

$$V[X(k)] = \phi X'(k) Q X(k) \quad (29)$$

(ϕ は正のスカラー)、これにより ΔV は次式になる。

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(X(k+1)) - V(X(k)) \\ &= \phi X'(k+1) Q A X(k) + 2\phi B' Q A X(k) f \\ &\quad + \phi B' Q B f^2 - \phi X'(k) Q X(k) \end{aligned} \quad (30)$$

ただし、 $X(k)$ を X , $f(u(k))$ を f と表現している。

ここで、つぎのような δ を考える。

$$\delta = (u(k) - f/g_{\max})f \quad (31)$$

Fig. 1 の非線形関数 f に対しては、(27)式の変数変換により、Fig. 2 のようになるので、 $|u_e| < M$ であれば、 $\delta > 0$ となる。また、 A は安定であれば、

$$A'QA - Q = -P \quad (P \geq 0, Q > 0) \quad (32)$$

のような対称行列 P, Q が存在する。いま、

$$\phi = (2B'QB)^{-1}, \quad g_{\max} = 2 \quad (33)$$

と定めると、 ΔV は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta V + \delta - \delta = \phi X'(A'QA - Q)X \\ &\quad + (2\phi B'QA - K_a)Xf + (\phi B'QB - 1/g_{\max})f^2 - \delta \\ &= -(2B'QB)^{-1}X'PX - \delta < 0 \end{aligned} \quad (34)$$

したがって、定理により安定となる。

以上より、状態は X_e に漸近収束する。(32)式を満たす Q を選び、(23)式に基づき決定されたフィードバックゲイン K_a を用いるとき、制御系の安定性は保証される。

一方、制御対象の電流制限 L は、適当な余裕を考慮して、 $I_{\max} > L$ のように選び、最適入力系列を線形計画法により計算する。実際の操作量が最適なものと完全に一致しない場合でも、 $I_{\max}$ の制限内には収めることが可能となる。すなわち、 $I < I_{\max}$ という範囲の線形領域で動作させることができる。以上に基づいた制御系の構成を Fig. 3 に示す。

4. 実験結果

種々の拘束条件のもとでの最短時間制御問題について本解法と本構成法の有効性を確認するために、実際に実験を行った。本実験で使用した直流サーボモータのパラメータはつぎのようである。

$$\begin{aligned} R_a &= 2.75 \, (\Omega), \\ K_e &= 2.4 \, (\text{V/Krpm}), \\ L_a &= 2.0 \, (\text{mH}), \\ F_r &= 50 \text{ 以下 } (\text{g} \cdot \text{cm}), \\ K_t &= 233 \, (\text{g} \cdot \text{cm/A}), \\ J_r &= 0.019 \, (\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2/\text{rad}) \end{aligned}$$

Fig. 3 Configuration of a control system

回路の電気的時定数は、直流サーボモータの機械的時定数と比べるとはるかに小さく、回路自体の動特性は問題とならない。また、慣性負荷として活字プリンタ用のデジホイールを用いたが、この慣性モーメントは、 $0.030 (\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2 / \text{rad})$ である。 L_a を無視すると、定数 K_m と T_m はつぎようになる (付録 1 参照)。

$$K_m = 1/K_e = 43.6332 (\text{rad/s} \cdot \text{V})$$

$$T_m = R_a J_r / K_e K_t = 0.0252 (\text{s})$$

制御対象の位置情報は 128 スリットを有するフォトエンコーダにより得ている。サンプリング周期を $T = 1.30 (\text{ms})$ とすると、(1) 式の A , B , および C はつぎのように計算される。

$$A = \begin{bmatrix} 0.9498 & 0. & 0.0580 \\ 0.9747 & 1. & 0.0293 \\ 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^t$$

ここで行った実験の場合は、

$$|u(k)| \leq 10.2 (\text{V})$$

$$|I_a(k)| \leq 2.5 (\text{A})$$

である。また、半正定行列 P を

$$P = \begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{bmatrix}$$

のように選ぶと、 K_a はつぎのように求められる。

$$K_a = [23.7831 \quad 0.9894 \quad 1.4230]$$

一例として、DC サーボモータの初期状態を $X(0) = [0, 0, 0]^t$ とし、 $|u(k)| \leq 10.2$, $|I_a(k)| \leq 2.5$ の拘束条件のもとで目標状態 $X_e = [0, 96, 0]^t$ に最短時間で到達させる場合を考える。すなわち、最小ステップ数で目標値 $r=96$ (フォトエンコーダの出力が 96 スリット分の回転である) の位置に到達させることである。

計算により求めた結果は、DC モータは最小ステップ数 $i=33$ で、初期状態 $X(0)$ から平衡状態 X_e に到達できる。これは Fig. 4 の実線で示される特性である。

一方、同図の中で、 $u(k)$ は操作量の実際の波形を示しているが、点線は実験によって得られた DC モータの最短時間制御を示している。もし ± 1 ビットの以内の誤差を許容すれば、理論どおりのステップ数とな

Fig. 4 Comparison of a theoretical curve and an experimental result

る。

この場合に、モデルから求めた理論的な電流波形は Fig. 5 (a) のようになる。一方、実際のモータの駆動電流波形は Fig. 5 (b) のようになり、両者は類似していることがわかる。離散時間系であるので、3 次のシステムでは操作量とする駆動電圧は、電流が飽和値 L に達することによってとる中間値のほかに、三つの中間値をもっている。したがって、電流系列も電圧が飽和値 M に達することによってとる中間値のほかに、対応する三つの中間値をもっている。Fig. 5 の中に、 g_1 点、 g_2 点、 g_3 点は電流系列の三つの中間値である。 g_1 点の中間値は入力電圧の 1 次遅れによってもたらされたものである。また、時間 T_1 から時間 T_2 までの間では電圧制限により電流は最大値より小さくなっていることがわかる。

システムの変動に対する影響を実験的に評価するために、外乱 $d(k)$ を加えた場合を Fig. 6 に示す。ただし、ここでは、実験装置の都合上、外乱が操作量に重畳した場合を考える。このときには、制御対象の入力は、 $(u(k) + d(k))$ である。オープンループ制御では、Fig. 6 (a) のように著しく影響を受けるが、本構成法ではフィードバックの効果により、Fig. 6 (b) のように優れた応答特性が得られる。

(a) Theoretical

(b) Experimental

Fig. 5 Current waveforms

Fig. 6 Comparison of an open-loop control and the proposed scheme under disturbances

Fig. 7 Comparison of an open-loop control and the proposed scheme under modeling errors

また、モデル誤差の影響を調べるために、仮に、あらかじめ制御対象のシステム行列 A がつぎのように与えられた場合を考える。

$$A = \begin{bmatrix} 0.9384 & 0. & 0.0569 \\ 0.9689 & 1. & 0.0288 \\ 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

これは前述の t_m と k_m の値を 10% 減少させたものに相等している。このモデルに従うと、一例として、

K_a は

$$K_a = [16.8454 \quad 0.8309 \quad 0.9971]$$

となる。また、新たに線形計画法で求めた系列を用いて（実験装置の制御対象は前のままで、本モデルと異なっているため、実際には最適系列ではない）、実験を行った結果、オープンループ制御では、Fig. 7(a)のようにモデル誤差が大きすぎるので、目標値に整定できないことがわかる。一方、本構成法では Fig. 7(b)のように最短時間制御にはならないものの多少の遅れで整定できることがわかる。

ここで、 $u(k)$ は操作量の波形を示している。

なお、本方式では、ROM などにあらかじめ (25) 式のフィードフォワード項 $u_F(k)$ を記憶させておくことが必要であるが、このための ROM の容量に関しても現実的な値となっている。たとえば、1 回転 128 スリットの分解能をもつモータに対して、 ± 1 回転までの位置決め制御を考える場合には、必要な最大回転スリット数は、 ± 128 だけである。本実験で示した例においては、128 スリット分の目標値の回転に対して、線形計画法によって計算された整定最小ステップ数 i は 38 である。ROM に記憶すべき情報はこの目標値に対応する入力系列 $u_F(k)$ の 38 個分のデータで十分である。いま、1 個のデータを 1 バイトとすると、この目標値に対して記憶するために必要な ROM の容量 M_r は、

$$\begin{aligned} M &= 38 \times 1 \text{ バイト} \\ &= 38 \text{ バイト} \end{aligned}$$

である。128 種類の目標値に対して、正回転と逆回転は回転角度の絶対値が等しくなれば符号はまったく対称であるので、記憶するために必要な ROM の容量 M は、

$$M = 128 \times M_r = 4,864 \text{ バイト}$$

以下である。これは一つの 64 K ビットの ROM のみでも十分である。

5. む す び

以上、種々の拘束条件のもとでの DC サーボモータの最短時間制御問題を考察した。種々の拘束条件が存在する場合でも、本構成法の有効性、特に外乱やモデル誤差の影響を受けにくいことが実験的に確認され

た。

今後、エネルギー拘束条件のもとでの DC サーボモータの最短時間制御問題などに関しても、考察していく予定である。

最後に、本研究を進めるに当たり、種々のご協力をいただいたリコー応用電子研究所竜新栄所長に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 黄, 中村, 亀山, 樋口: マイクロコンピュータを用いた DC サーボモータの最短時間制御, 信学技報, NLP 85-1, 1/10 (1985)
- 2) 黄, 中村, 亀山, 樋口: マイクロコンピュータを用いた最短時間デジタル制御システムの構成, 計測自動制御学会東北支部講演会, 113 (1984)
- 3) 黄, 亀山, 樋口: 振幅制限がある DC サーボモータの最短時間制御システムの構成, 昭和 60 年度電気関係学会東北支部連合会, 2F 14 (1985)
- 4) 見城, 永守: DC サーボモータ, 総合電子出版社 (1982)
- 5) 黒田, 藤井: 状態制限のある最短時間制御系の操作量決定法, 計測自動制御学会論文集, 10-2, 160/166 (1974)
- 6) 西村: 線形系の最短時間制御の一計算法, 計測自動制御学会論文集, 12-6, 653/658 (1976)
- 7) 辻, 伊藤: 非線形離散値系の最短時間問題の数値解法, 計測自動制御学会論文集, 8-6, 644/651 (1972)
- 8) 市川, 田村: 最短時間制御問題の解法 [I], 計測と制御, 12-5, 409/422 (1973)
- 9) 市川, 田村: 最短時間制御問題の解法 [II], 計測と制御, 12-6, 505/513 (1973)
- 10) 市川, 土屋: 最短時間制御問題の数値解法, 計測自動制御学会論文集, 9-2, 173/177 (1973)
- 11) 関根泰次: 数値計画法 I, II, 岩波書店 (1968)
- 12) 成田誠之助: デジタルシステム制御 一理論と応用一, 29/33, 昭晃堂 (1980)

〈付 録 1〉

DC サーボモータの動特性は, つぎのように書ける。

$$\left. \begin{aligned} v_a(t) &= R_a i_a(t) + L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + K_e \omega(t) \\ \tau(t) &= K_t i_a(t) = J_r \frac{d}{dt} \omega(t) + f_r(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 1})$$

ただし,

$v_a(t)$: 電機子電圧, $\omega(t)$: モータの回転速度
 $i_a(t)$: 電機子電流, $\tau(t)$: モータの発生トルク
 R_a : 電機子抵抗, $f_r(t)$: モータの摩擦トルク
 J_r : イナーシャ, L_a : 電機子インダクタンス
 K_t : トルク定数, K_e : 誘起電圧定数

DC サーボモータの電機子のインダクタンス L_a は非常に小さい場合, これを無視してもほとんど問題とはならないので, ここで, $L_a = 0$ とおく。また, $f_r(t)$ を消去して伝達関数を求めるために, まず (A. 1) 式から $i_a(t)$ を消去して整理すると, つぎの (A. 2) 式を得る。

$$v_a(t) = \left(J_r \frac{d}{dt} \omega(t) + f_r(t) \right) R_a / K_t + K_e \omega(t) \quad (\text{A. 2})$$

さらに,

$$v'_a(t) = v_a(t) - f_r(t) R_a / K_t \quad (\text{A. 3})$$

とおくと, (A. 2) 式はつぎのように書くことができる。

$$v'_a(t) = (J_r R_a / K_t) \cdot \frac{d}{dt} \omega(t) + K_e \omega(t) \quad (\text{A. 4})$$

一方, モータの摩擦トルクに関しては, 簡単のために, (A. 5) 式のような摩擦のみを考える。ここでは, f_k は定数である。

$$f_r(t) = \begin{cases} +f_k & (\omega(t) < 0, \text{ 逆回転}) \\ 0 & (\omega(t) = 0, \text{ 停止}) \\ -f_k & (\omega(t) > 0, \text{ 正回転}) \end{cases} \quad (\text{A. 5})$$

(A. 3), (A. 5) 式により, 正回転と逆回転に分けて, $f_r(t) R_a / K_t$ をバイアスとして, あらかじめソフトウェア上で $v_a(t)$ を補正することができる。補正した実際の入力は $v'_a(t)$ である。また, $v'_a(t)$ を新たに $v_a(t)$ と置き換え, (A. 4) をラプラス変換すると, つぎの (A. 6) 式を得る。

$$V_a(s) = (J_r R_a / K_t) \cdot s \Omega(s) + K_e \Omega(s) \quad (\text{A. 6})$$

ただし, $V_a(s)$, $\Omega(s)$ はそれぞれ $v_a(t)$, $\omega(t)$ のラプラス変換を示す。(A. 6) 式により, モータの伝達関数 $G(s)$ はつぎようになる。

$$G(s) = \Omega(s) / V_a(s) = K_m / (s T_m + 1) \quad (\text{A. 7})$$

ただし, $K_m = 1 / K_e$, $T_m = R_a J_r / K_e K_t$ である。

θ を回転角として ($\dot{\theta}(t) = \omega(t)$), (A. 7) 式をラプラス逆変換すると, つぎのような状態方程式が得られる。

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\omega}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = F X(t) + G v_a(t) \quad (\text{A. 8})$$

ただし,

$$F = \begin{bmatrix} -1/T_m & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} K_m/T_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad X(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

さらに, 制御装置内では, CPU の演算時間のため, D/A 変換器に送られる信号が 1 周期分遅れることを考慮しながら, (A. 8) 式をサンプリング周期 T を用いて, 級数展開による方法¹²⁾で離散化すると, 状態方程式 (A. 8) はつぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} X(k+1) &= A X(k) + B u(k) \\ y(k) &= C X(k) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 9})$$

ただし,

$$A = \begin{bmatrix} e^{\theta} & 0 & K_m(1-e^{\theta}) \\ T_m(1-e^{\theta}) & 1 & K_m(T-T_m(1-e^{\theta})) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X(k) = \begin{bmatrix} \omega(k) \\ \theta(k) \\ v_a(k) \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0]$$

また、 u はスカラー操作量（印加電圧）、 y はスカラー出力（位置あるいは角度）である。

〈付 録 2〉

駆動回路の不感帯の補正について、つぎのように説明する。駆動回路の入力が v_i 、出力が v_o とすると、入出力特性は、

$$v_o = \begin{cases} v_i - D & (v_i \geq D \text{ のとき}) \\ 0 & (-D \leq v_i \leq D \text{ のとき}) \\ v_i + D & (v_i \leq -D \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるので、ゼロ点付近の $[-D, D]$ の間で不感帯をもち、Fig. A.1(a) のようになる。ただし、点線の部分は駆動回路の電圧振幅の飽和特性を示す。ここ

(a) Dead zone (b) Compensation

Fig. A.1 Compensation of a dead zone

で、入力電圧 v_i に対して Fig. A.1(b) のように正の場合と負の場合に分けて、ソフトウェア上で $\pm D$ のバイアスをかけておくことにより、容易に不感帯を除くことができる。前述の飽和特性を考慮しながら、補正した実際の入力は v_i' である。