離散化システムの零点の性質[†]

原 辰次*・近 藤 良*・香 取 英 夫*

Properties of Zeros of Sampled Systems

Shinji HARA*, Ryou KONDO* and Hideo KATORI*

Poles and zeros play an important role in control system design. This paper clarifies the properties of zeros of a single input-single output discretized system composed of a sampler and a zero-order hold. It is shown that the property that the number of real zeros between any two real poles is even or odd is preserved for the discretized system with any sampling period which assures all the poles of the continuous controlled object lie in the primary strip of s -plane. This property is also true for a sampled system considering any computational time delay and the sampled system has at least an unstable limiting zero for small sampling periods. Sufficient conditions, which guarantee the sampled system has only stable zeros or an unstable zero regardless of the sampling period, are presented using the derived properties.

Key Words: digital control, sampled system, poles and zeros, computational time delay

1. はじめに

計算機技術の発展に伴い、連続時間の制御対象をディジタル制御器で制御するいわゆるディジタル制御が盛んに適用されてきている。ディジタル制御系の実現においては、サンプリング + 0 次ホルダがよく用いられ、Fig. 1 に示すような制御系が構成される。このとき、連続系の制御対象が安定ならば離散化した系も安定となる。しかし連続系の制御対象がたとえ不安定零点をもたなくても離散化した系が不安定零点をもつことがあり、ディジタル制御系設計の一つの大きな問

Fig. 1 Schematic diagram of digital control system

題になっている。たとえば、最小位相系という条件が課せられる多くの離散時間系に対する適応制御アルゴリズムが適用できないなどである。

文献 1), 2) ではサンプリング周期 T を 0 あるいは ∞ に近づけたときに離散化した系の零点がどのような挙動を示すかについて考察し、この現象を説明している。しかし、実際にはサンプリング周期 T は 0 と ∞ の間の値をとるので、その中間の値における零点の性質の検討は重要である。また、実際の応用においては、制御則の演算時間遅れは無視することはできない³⁾。このとき、演算時間とサンプリング周期とを等しくとれば 1 サンプル遅れとなるだけであるのでその零点の性質は演算時間遅れのない場合と同一である。しかし、オブザーバを使用したときには、演算時間をサンプリング周期よりも短くでき、遅れの影響を小さくすることが可能であることが指摘されており^{4), 5)}、このような場合に零点がどうなるのかを調べることは重要な課題といえる。このように演算時間遅れのある場合の零点については、新ら⁶⁾ により、相対次数が 4 以下の場合について $T \rightarrow 0$ としたときの極限零点が数値計算により示されている。しかし、その性質は理論的には必ずしも明らかにされていない。

本論文では、離散化した系の極の性質がわかっている（連続系の極 a は離散化すると e^{aT} に移る）ことに着目し、極と零点との関係を調べることによってサンプリング周期 T に依存しない零点の性質を明らか

[†] 第 29 回自動制御連合講演会で発表 (昭 62・11)

* 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

(Received September 11, 1986)

(Revised November 25, 1986)

にする。また、演算遅れのある場合の極限零点の性質について述べる。最後に得られた性質を用いてサンプリング周期によらず安定零点あるいは不安定零点が保存されるための十分条件を示す。

2. 離散化システムのパルス伝達関数

本章では、連続系をサンプラ+0次ホールダをもつデジタル制御器で制御する場合の制御対象のモデルを明確にする。制御対象は、 N 次の1入出力連続時間系で、その伝達関数が

$$G(s) = b(s)/a(s) \quad (2.1)$$

で表わされているとする。ただし、 $a(s)$ は N 次モニック多項式で、 $a(s)$ と $b(s)$ は既約とする。また、

A1) $G(s)$ は、原点に極と零点をもたない。

A2) $G(s)$ の極はすべて単極。

なる仮定をおく（この仮定が満たされない場合への拡張も容易である。A1) については系2, 注意2を、A2) については文献10)を参照）。すなわち、 $G(s)$ は $n_r = n_+ + n_-$ 個の実極（ n_+ 個の実不安定極と n_- 個の実安定極）と n_c 組の複素極をもち

$$G(s) = \sum_{i=0}^{n_+-1} \frac{b_i}{s-a_i} + \sum_{i=n_++1}^{n_r} \frac{b_i}{s-a_i} + \sum_{i=1}^{n_c} \frac{p_i s + q_i}{(s-c_i)^2 + d_i^2} \quad (2.2)$$

と書き表わされているとする。ただし、 $a_i, b_i, c_i, d_i, p_i, q_i$ は実数で、 $a_i \neq a_j, (c_i, d_i) \neq (c_j, d_j) (i \neq j), d_i \neq 0$ とする。また、一般性を失うことなく a_i に関して

$$a_0 > a_1 > \dots > a_{n_++1} (\geq 0) > a_{n_++1} > \dots > a_{n_r} \quad (2.3)$$

が成立しているとする。以下、 $G(s)$ の状態空間表現を用いて、離散化システムのパルス伝達関数を求める。 $G(s)$ の状態空間表現が

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.4a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.4b)$$

で表わされる場合を考える。この制御対象を遅れの無いデジタル制御器で制御した場合は離散化システムのパルス伝達関数はよく知られているように

$$H(z) = C(zI - \Phi(T))^{-1} \Psi(T) \quad (2.5)$$

と書ける。ただし、

$$\Phi(t) = e^{At}, \quad \Psi(t) = \int_0^t e^{As} B ds \quad (2.6)$$

である。一方、この制御対象をサンプリング周期 T 、演算遅れ時間 $\Delta T (0 < \Delta \leq 1)$ の制御器で制御するとし、そのときの制御系の構成が Fig. 1 のようになっているとする。すなわち、制御対象の入力側に0次ホールダがあり、その直前と制御対象の出力側に二つのサンプラがあり、制御対象の出力側のサンプラが動作して

Fig. 2 Input and output signals of the plant in the digital control system

から ΔT 後に入力側のサンプラが動作するとする。このとき、離散化システムの入力信号 $v[i]$ から出力信号 $y[i]$ へのパルス伝達関数を求めてみよう。このとき、制御対象の入力波形と出力波形は Fig. 2 のように表わされる。よって、つぎの状態方程式を得る。

$$\begin{aligned} x((i+1)T) &= \Phi(T - \Delta T)x(iT + \Delta T) \\ &\quad + \Psi(T - \Delta T)v[i] \\ &= \Phi(T - \Delta T)\{\Phi(\Delta T)x(iT) \\ &\quad + \Psi(\Delta T)v[i-1]\} \\ &\quad + \Psi(T - \Delta T)v[i] \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで、 $X(z)$, $Y(z)$, $V(z)$ をそれぞれ $x[i]$, $y[i]$, $v[i]$ の z 変換とすると

$$zX(z) = \Phi(T)X(z) + \Phi(T - \Delta T)\Psi(\Delta T)V(z)/z + \Psi(T - \Delta T)V(z) \quad (2.8a)$$

$$Y(z) = CX(z) \quad (2.8b)$$

を得る。よって $0 < \Delta \leq 1$ に対するパルス伝達関数は

$$\begin{aligned} H_d(z) &= \frac{1}{z} C(zI - \Phi(T))^{-1} [\Phi(T - \Delta T)\Psi(\Delta T) \\ &\quad + z\Psi(T - \Delta T)] \end{aligned} \quad (2.9)$$

で与えられる。なお、 $H_d(z)$ は制御対象と0次ホールダとの複合系の伝達関数に $e^{-\Delta Ts}$ を掛けて、直接 z 変換しても得られる。また、 $H_d(z)$ は文献7)の拡張 z 変換において $m=1-\Delta$ と置いた場合に当たること注意到する。

(2.2)式と(2.4)式を用いると、一つの実数極あるいは1組の複素極をもつ場合のパルス伝達関数が以下のように求まる（単純な計算により得られるのでその導出は省略する）。

(i) 実数極をもつ制御対象

$$G(s) = \frac{b}{s-a} \quad (2.10a)$$

$$H(z) = \frac{\beta}{z-\alpha}, \quad H_d(z) = \frac{\tilde{\beta}}{z-\alpha} + \frac{\tilde{\gamma}}{z} \quad (2.10b)$$

ただし、

$$\alpha = e^{aT}, \quad \beta = b(e^{aT} - 1)/a, \quad (2.11a)$$

$$\tilde{\beta} = e^{-a\Delta T}\beta, \quad \tilde{\gamma} = b(e^{-a\Delta T} - 1)/a. \quad (2.11b)$$

(ii) 複素極をもつ制御対象

$$G(s) = \frac{ps+q}{(s-c)^2+d^2} \quad (2.12a)$$

$$H(z) = \frac{\xi z + \eta}{(z-\phi)^2 + \phi^2}, \quad H_d(z) = \frac{\tilde{\xi} z + \tilde{\eta}}{(z-\phi)^2 + \phi^2} + \frac{\tilde{\kappa}}{z} \quad (2.12b)$$

ただし,

$$\phi = e^{cT} \cos dT, \quad \psi = e^{cT} \sin dT \quad (2.13)$$

で, $\xi, \eta, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\kappa}$ は適当な実数である.

以上をまとめると, $G(s)$ の離散化モデルのパルス伝達関数は以下のように表わせる.

演算時間遅れのある場合

$$H(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \sum_{i=0}^{n_+-1} \frac{\beta_i}{z - \alpha_i} + \sum_{i=n_++1}^{n_r} \frac{\beta_i}{z - \alpha_i} + \sum_{i=1}^{n_c} \frac{\xi_i z + \eta_i}{(z - \phi_i)^2 + \phi_i^2} \quad (2.14)$$

を得る. ただし, $\alpha(z)$ は N 次モニック多項式で, $\alpha_i, \beta_i, \phi_i, \xi_i, \eta_i$ は (2.11), (2.13) 式のそれぞれに添え字をつけたものに対応する.

演算時間遅れのある場合 ($0 < \Delta \leq 1$)

$$H_d(z) = \frac{\beta_d(z)}{\alpha_d(z)} = \sum_{i=0}^{n_+-1} \left[\frac{\tilde{\beta}_i}{z - \alpha_i} + \frac{\tilde{\gamma}_i}{z} \right] + \sum_{i=n_++1}^{n_r} \left[\frac{\tilde{\beta}_i}{z - \alpha_i} + \frac{\tilde{\gamma}_i}{z} \right] + \sum_{i=1}^{n_c} \left[\frac{\tilde{\xi}_i z + \tilde{\eta}_i}{(z - \phi_i)^2 + \phi_i^2} + \frac{\tilde{\kappa}_i}{z} \right] \quad (2.15)$$

ただし, $\alpha_d(z)$ は $N+1$ 次モニック多項式で, $\alpha_i, \tilde{\beta}_i, \tilde{\gamma}_i, \phi_i, \tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, \tilde{\kappa}_i$ は (2.11), (2.13) 式のそれぞれに添え字をつけたものに対応する.

以降, $H(z)$ および $H_d(z)$ の極 $\alpha_i(\phi_i \pm \psi_i j)$ を $G(s)$ の極 $a_i(c_i \pm d_i j)$ に対応する極と呼ぶ. また, $a_i(i=0 \sim n_r)$ を $G(s)$ の拡張された実極といい, $\alpha_i(i=0 \sim n_r)$ を $H(z)(H_d(z))$ の拡張された実極と呼ぶ. $H(z)(H_d(z))$ の極がすべて主域に入るようなサンプリング周期の集合を以下 $\mathcal{G}$ と記す. すなわち, $n_c \neq 0$ のとき

$$\mathcal{G} = \{T | 0 < T < \min_i \{\pi/|d_i|\}\} \quad (2.16)$$

を, $n_c = 0$ のとき $\mathcal{G} = \{T | T > 0\}$ を意味する(注1).

離散化システムに関しつぎの性質が成り立つ.

(注1) ここでは, 実用上意味のあるサンプリング周期ということで T を主域に入るクラスに限定した. しかし, T が主域に入らない場合でも性質 P2) と T2) が成り立つ T , すなわち $T \in \mathcal{G}$, ただし

$$\tilde{\mathcal{G}} = \left\{ T > 0 \mid d_i \neq k \cdot \frac{\pi}{T}, d_i \pm d_j \neq 2k \cdot \frac{\pi}{T} (i \neq j); \right. \\ \left. i, j = 1 \sim n_c, k = \pm 1, \pm 2, \dots \right\} \supset \mathcal{G}$$

ならば, 本論文の結果はすべて成立する. すなわち generic に成り立つ.

P1) $H(z)$ は $G(s)$ の極に対応する N 個の極をもつ. $H_d(z)$ はこれに加え generic に原点に一つ極をもつ.

P2) $H(z)(H_d(z))$ の対応する極は $T \in \mathcal{G}$ のとき以下の性質をもつ.

$G(s)$ の実数極 $\rightarrow$ 正の実数極

$G(s)$ の複素極 $\rightarrow$ 複素極

P3) $H(z)(H_d(z))$ の実数極に関し

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_{n_+-1} > \alpha_{n_+} (=1) > \alpha_{n_++1} > \dots > \alpha_{n_r} > 0 \quad (2.17)$$

が成り立つ.

Z1) $H(z)$ は generic に $N-1$ 個の零点をもつ.

$H_d(z)$ は, generic に N 個の零点をもつ.

$$T1) G(0) = H(1) = H_d(1) \quad (2.18)$$

T2) $T \in \mathcal{G}$ のとき $\alpha(z)$ と $\beta(z)(\beta_d(z))$ は (generic に) 既約.

3. 実極と実零点との関係

3.1 演算時間遅れのない場合

$G(s)$ と $H(z)$ においてサンプリング周期 T の値によらず保存される実極と実零点との関係を示す.

《定理1》 $G(s)$ に対して仮定 A1), A2) が成立しているとする. このとき, 任意の $T(\in \mathcal{G})$ に対して,

$$b(a_i) \cdot \beta(a_i) > 0; i = 0 \sim n_r \quad (3.1)$$

が成立する. すなわち, 以下のことが成り立つ.

「 $G(s)$ の拡張された実極の間にある実零点の個数が偶数 (0 を含む) か奇数かという性質は, 任意の $T(\in \mathcal{G})$ に対する $H(z)$ の対応する拡張された実極の間にある実零点の個数に対しても保存される」 ■

定理1の証明につき二つの補題を必要とする.

[補題1] 任意の $T(\in \mathcal{G})$ に対して,

$$b_i \cdot \beta_i > 0; i \neq n_+ \quad (3.2)$$

(証明) (2.11a) 式と $(e^x - 1)/x > 0; \forall x$ の関係より明らか. ■

[補題2] 区間 $(a_{i+1}, a_i); 0 \sim n_r - 1$ に存在する $G(s)$ の実零点の個数は,

$$1) b(a_i) \cdot b(a_{i+1}) > 0 \text{ のとき偶数個 (0 を含む)} \quad (3.3a)$$

$$2) b(a_i) \cdot b(a_{i+1}) < 0 \text{ のとき奇数個} \quad (3.3b)$$

同様に, 区間 $(\alpha_{i+1}, \alpha_i); 0 \sim n_r - 1$ に存在する $H(z)$ の実零点の個数は,

$$1) \beta(a_i) \cdot \beta(a_{i+1}) > 0 \text{ のとき偶数個 (0 を含む)} \quad (3.4a)$$

$$2) \beta(a_i) \cdot \beta(a_{i+1}) < 0 \text{ のとき奇数個} \quad (3.4b)$$

(証明) $b(s), \beta(z)$ の連続性と中間値の定理より明らか. ■

(定理1の証明) 前半部: $i = n_+$ のときは, $G(0) =$

$H(1)$ と $a(0) \cdot \alpha(1) > 0$ より明らか. $i \neq n_+$ のときを示す. (2.14)式を通分して $b(s)$ を求め, a_i を代入すると,

$$b(a_i) = b_i \cdot \prod_{j \neq i, n_+} (a_i - a_j) \cdot \prod_{j=1}^{n_c} [(a_i - c_j)^2 + d_j^2] \quad (3.5)$$

を得る. 同様に,

$$\beta(\alpha_i) = \beta_i \cdot \prod_{j \neq i, n_+} (\alpha_i - \alpha_j) \cdot \prod_{j=1}^{n_c} [(\alpha_i - \phi_j)^2 + \psi_j^2] \quad (3.6)$$

となり, 補題1と不等式(2.3), (2.17)および $[(a_i - c_j)^2 + d_j^2] > 0$, $[(\alpha_i - \phi_j)^2 + \psi_j^2] > 0$ の関係を用いると(3.1)式が導かれる.

後半部: 補題2より明らか. ■

[注意1] (3.5), (3.6)式を用いると,

1) $i < n_+$ かつ奇数, あるいは $i > n_+$ かつ偶数:

$$b(a_i) \cdot b_i < 0, \beta(\alpha_i) \cdot \beta_i < 0 \quad (3.7a)$$

2) $i < n_+$ かつ偶数, あるいは $i > n_+$ かつ奇数:

$$b(a_i) \cdot b_i > 0, \beta(\alpha_i) \cdot \beta_i > 0 \quad (3.7b)$$

の関係を得る. したがって, 条件(3.1)は

$$b_i \cdot \beta_i > 0; i = 0 \sim n_r (i \neq n_+) \quad (3.8)$$

および $b(0) \cdot \beta(1) > 0$ と書き換えてもよい. ■

(3.1)式の性質は, 単に $G(s), H(z)$ の実際の実極だけでなく, 拡張した極 $a_{n_+} = 0, \alpha_{n_+} = 1$ に対しても成立している点を注意しておく. これは仮定A1)のもとで成り立つ性質である([注意2]を参照). また, 定理1は, 対応する極の間にある零点の個数が T によらず不変であることを必ずしも意味しない([例題1]参照). ただし, 零点の個数が保存される場合がある. これを以下の系で示す.

[系1] $G(s)$ は仮定A1), A2)を満たし, かつすべての極が実極(すなわち, $N = n_r$)で, (3.3b)式を満たす i が $N-1$ 個あるいは $N-2$ 個あったとする. このとき, $G(s)$ は a_i と a_{i+1} の間に必ず1個実零点をもち, 任意の $T(>0)$ に対する $H(z)$ は, α_i と α_{i+1} の間に必ず1個実零点をもつ. ただし, i は(3.3b)式を満たす整数である.

(証明) (3.3b)式を満たす i に対応する区間 (a_i, a_{i+1}) には, 少なくとも1個の実零点がある. よって, そのような i が $N-1$ 個もしくは $N-2$ 個あるならば, 実零点は少なくとも $N-1$ 個もしくは $N-2$ 個存在する. もしある区間で3個以上の実零点をもつことになるならば, $b(s)$ が $N-1$ 次式であることに反する. このことと定理1より $H(z)$ についても成り立つ. ■

[例題1]

$G(s) = 25(s-2.4)(s-2.6)/(s-1)(s-2)(s-3)$ で表わされる連続系を考える. この系を離散化する

Table 1 Poles and zeros (example 1)

T	0.3	1	4
α_2	1.35	2.72	54
α_1	1.82	7.39	2981
α_0	2.46	20.09	162755
z_1	2.08	$11.21 - 2.99j$	-1337
z_2	2.15	$11.21 + 2.99j$	-3252

と, その分子多項式は,

$$\beta(z) = (\theta^3 - 3\theta^2 + 28\theta - 26)z^2 + (2\theta^5 - 29\theta^4 + 29\theta^2 - 2\theta)z + 26\theta^6 - 28\theta^5 + 3\theta^4 - \theta^3$$

となる. ただし, $\theta = e^T$ である. サンプリング周期 T を 0.3, 1, 4 と変えたときの極 $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ と零点 (z_1, z_2) を Table 1 に示す. $T=0.3$ では区間 (α_2, α_1) に2個実零点があり, $G(s)$ の極と零点との関係が保存されている. しかし, $T=1$ とすると複素零点となり, $T=4$ とすると負の実零点2個をもつ. このように T を大きくすると, 2実極間に零点はなくなりその個数は変わるが, 偶数であるという性質は保存されている. □

なお, 仮定A1)が成立しない場合は, 以下の系が成立する.

[系2] $G(s)$ は原点に極あるいは零点をもち, かつ仮定A2)が成立しているとする. このとき, 任意の $T(\in \mathcal{T})$ に対して,

$$b(a_i) \cdot \beta(\alpha_i) > 0; i = 0 \sim n_r (i \neq n_+) \quad (3.9)$$

が成立する. すなわち, 以下のことが成り立つ.

「 $G(s)$ の実極の間にある実零点の個数が偶数(0を含む)か奇数かという性質は, 任意の $T(\in \mathcal{T})$ に対する $H(z)$ の対応する実極の間にある実零点の個数に対しても保存される」

(証明) 定理1の証明で, $i \neq n_+$ の場合だけ考えればよい.

[注意2] 定理1と系2の違いは, 拡張した極 $a_{n_+} = 0, \alpha_{n_+} = 1$ における分子多項式の符号の保存が保証されるかどうかである. $G(s)$ が原点に極をもつ場合は, それが拡張した極と重複する. 一方, $G(s)$ が原点に零点をもつときは, $b(0) = \beta(1) = 0$ となり符号情報がとれない. いずれにしても仮定A1)が成立しない場合は $i = n_+$ における付加的な情報が得られないからである. A1)を満たさない場合の考察は, 以下の議論においても同様に可能であるが省略する. ■

3.2 演算時間遅れのある場合

前節と同様にして, 演算時間遅れのある場合にもつぎの定理が成立する.

《定理2》 $G(s)$ に対して仮定A1), A2)が成立しているとする. このとき, 任意の $T(\in \mathcal{T})$, $\Delta(0 < \Delta \leq$

1) に対して,

$$b(\alpha_i) \cdot \beta(\alpha_i) > 0; i=0 \sim n_r \quad (3.10)$$

が成立する. すなわち, 以下のことが成り立つ.

「 $G(s)$ の拡張された実極の間にある実零点の個数が偶数 (0 を含む) か奇数かという性質は, 任意の $T(\in \mathcal{T})$ に対する $H_d(z)$; $0 < \Delta \leq 1$ の対応する拡張された実極の間にある実零点の個数に対しても保存される。」

(証明) 前半部: まず, (2.15) 式を通分して $\beta_d(z)$ を求め, α_i を代入すると,

$$\beta_d(\alpha_i) = \tilde{\beta}_i \alpha_i \cdot \prod_{j \neq i, n_+} (\alpha_i - \alpha_j) \cdot \prod_{j=1}^{n_c} [(\alpha_i - \phi_j)^2 + \psi_j^2] \quad (3.11)$$

を得る. この式と (3.6) 式を比較すると,

$$\beta_d(\alpha_i) = (\tilde{\beta}_i / \beta_i) \cdot \alpha_i \cdot \beta(\alpha_i) \quad (3.12)$$

と書ける. ここで, $\beta_i \cdot \tilde{\beta}_i > 0$, $\alpha_i = e^{e^{i\theta_i} T} > 0$, の関係を用いると, $\beta_d(\alpha_i) \cdot \beta(\alpha_i) > 0$ を得る. これと (3.1) 式より (3.10) 式が導かれる.

後半部: $H_d(z)$ に対しても, 補題 2 と同様の性質が成り立つことより示される. ■

4. 極限零点の性質

伝達関数 $G(s)$ の分母分子多項式の次数差が m のとき, サンプリグ周期を 0 に近づけていくと, パルス伝達関数 $H_d(z)$ は $1/s^m$ に対するパルス伝達関数のスカラー倍に収束することが知られている^{1), 6)}. そのため, この収束したパルス伝達関数の零点は, 極限零点と呼ばれる. Aström ら¹⁾ は, m が 2 以上のとき $H(z)$ の極限零点は必ず不安定なものを含むことを示した. また新ら⁶⁾ は $H_d(z)$ に関して数値的にこれを考察している. ここでは任意の Δ に対して, m が 2 以上ならば $H_d(z)$ の極限零点が不安定なものを少なくとも一つ含むことを理論的に明らかにする.

$G(s) = 1/s^m$ に対するパルス伝達関数 $H_d(z)$ は次式で与えられる⁶⁾.

$$H_d(z) = \frac{T^m B_m(z, \Delta)}{m!(z-1)^m z} \quad (4.1)$$

$$B_m(z, \Delta) = b_0^m(\Delta) z^m + \dots + b_m^m(\Delta) \quad (4.2)$$

$$b_k^m(\Delta) = \sum_{l=0}^{m-k} (-1)^{m-k-l} (l+\Delta)^m \binom{m+1}{m-k-l}, \quad k=0, 1, \dots, m \quad (4.3)$$

ただし $\binom{m}{k}$ は $m! / [k!(m-k)!]$ を表す. 係数間にはつぎの関係が成り立つ (証明は付録参照).

$$b_{k-1}^m(0) = b_{m-k}^m(0), \quad k=1 \sim m; \quad b_m^m(0)=0, \quad (4.4a)$$

$$b_k^m(\Delta) = b_{m-k}^m(1-\Delta), \quad k=0 \sim m \quad (4.4b)$$

$$b_{k+1}^m(1) = b_{m-k}^m(1), \quad k=0 \sim m-1; \quad b_0^m(1)=0, \quad (4.4c)$$

したがって, $H_d(z)$ は $\Delta=0, 1/2, 1$ のときに係数が対称となり, 単位円内と単位円外に同数の零点をもつ (奇数次のときは, さらに -1 に零点をもつ) ことがわかる. それでは適当な Δ を選べば $B_m(z, \Delta)$ を安定にできるであろうか. 答えは否定的でありつぎの定理が成り立つ (証明は付録参照). したがって, サンプリグ周期を小さくしていくと, たとえサンプリグ時機をずらしても必ず不安定零点が現れる.

《定理 3》 相対次数 m が 2 以上の $G(s)$ を離散化したパルス伝達関数 $H(z)$ および任意の $\Delta(0 < \Delta \leq 1)$ に対する $H_d(z)$ は T を 0 に近づけると少なくとも一つの不安定零点をもつ. ■

5. 安定零点・不安定零点の保存条件

本章では, 前章までの結果を用いて, 安定零点や不安定零点が保存されるための十分条件を与える.

5.1 安定零点の保存条件

定理 3 より, 相対次数が 2 以上の制御対象に対しては任意の T に対して零点がすべて安定であるということ保証できない. ここでは $G(s)$ がその極はすべて実単極で, $N-1$ 個の実安定零点をもつ場合に対して, 安定零点が保存されるための十分条件を与える.

[系 3] $G(s)$ は仮定 A1), A2) を満たし, かつ (3.3b) 式を満たす i が $N-1$ 個であったとする. このとき,

$$1) \quad n_+ = 0 \quad (\text{すなわち安定}) \quad (5.1)$$

あるいは,

$$2) \quad n_+ = 1 \quad \text{かつ} \quad b(a_0)b(0) > 0 \quad (5.2)$$

が成立するならば, $G(s)$ および任意の $T(>0)$ に対する $H(z)$ の零点は, すべて安定である.

(証明) 1) の場合は区間 (a_{i+1}, a_i) ; $i=0 \sim N-1$ のうちの $(N-1)$ 個の区間に, 一方, 2) の場合は区間 (a_{i+1}, a_i) ; $i=1 \sim N-1$ に必ず一つづつ実零点をもつ. いずれの場合も $G(s)$ は負の実極および原点の間に合計 $N-1$ 個の実零点をもつことになる. よって, 系 1 より $H(z)$ は区間 $(0, 1]$ に存在する拡張された極の間にすべて $(N-1)$ 個の実零点をもつ. また, この系の条件のもとでは $G(s)$ の極はすべて実数であるので, 任意の $T(>0)$ に対して零点は安定となる. ■

文献 1) では, $G(j\omega)$ の位相条件に基づいた十分条件を与えている. 系 3 の結果も十分条件ではあるが, 文献 1) の条件に含まれないケースを含んでいる (例題 2 参照), という点で意味ある結果といえる.

【例題 2】 $G(s) = (s+1)/(s+2)(s-a)$ なる連続系を考える. これは, $\text{Im } G(j\omega) = -\omega(a+2+\omega^2)/(\omega^2+4)$

$(\omega^2 + a^2)$ より, $a < -2$ ならば, $a + 2 + \omega^2$ の符号により $\text{Im } G(j\omega)$ の符号が変わる. よって文献1)の定理3の条件を満たさない例となる. しかし, 系3より任意の $a (\neq 0, -1, -2)$ に対して安定零点を保存することがわかる. このことを $a = -4$ として以下に示す. いま, $\theta = e^T$ とすると, $\beta(z) = (\theta^2 - 1)[\theta^2(\theta^2 + 3)z - (3\theta^2 + 1)]$ と書け, $\beta(\theta^{-2}) = -2\theta^2(\theta^2 - 1) < 0$, $\beta(1) = (\theta^2 - 1)^2(\theta^2 + 1) > 0$ を得る. よって, T によらず区間 $(\theta^{-2}, 1)$ に必ず一つ安定零点をもつことが確認できる. $\square$

[注意3] 系3の条件には, $G(s)$ が

1) すべての零点 ($N-1$ 個) は安定 (5.3)

2) 極はすべて実数で, 零点はすべての極の間に1個ずつ存在する. (5.4)

の条件をみたす場合を含んでいる. これは, 文献1)の $0 < G(j\omega) < 180; \forall \omega > 0$ (5.5)

の条件の十分条件となっている. しかし, これは以下に示すように判定に必要となる計算量の面で優れている. 条件(5.3), (5.4)の判定条件は, $G(s)$ の分母分子多項式 $a(s)$ と $b(s)$ の係数を用いて, 根を求めることなく容易にチェックできる. 1) はラウス・フルヴィツの判定法を, また 2) はユークリッドの互除法 (スツルムの定理を応用した文献8)の問題1を参照)を適用すればよい.

つぎに, 演算時間遅れのある場合の条件を与える.

[系4] $G(s)$ は仮定 A1), A2) を満たし, かつ

1) 極はすべて実安定である (すなわち, $N = n_+$, $= n_-$) (5.6)

2) 零点はすべて実安定で, すべての極の間に1個ずつ存在する (すなわち, $b(a_i) \cdot b(a_{i+1}) < 0; i = 1 \sim N-1$) (5.7)

が成立しているとする. このとき, $0 < \Delta \leq 1/2$ ならば, 任意の $T(>0)$ に対する $H_d(z)$ は N 個の実安定零点をもつ.

(証明) 注意1より, 条件1)のもとでは条件2)が成り立つことと, b_i がすべての i に対して同符号であることは等価である. よって, 以下では $a_i < 0, b_i > 0 (i = 1 \sim N)$ と仮定して証明する. 系1より, $G(s)$ のすべての極は実数であるので任意の $T(>0)$ に対して $H_d(z)$ は α_i と $\alpha_{i+1} (i = 1 \sim N-1)$ の間に1個ずつ合計 $N-1$ 個実安定零点をもつことは明らかである. 以下, $0 < \Delta \leq 1/2$ ならば残りの一つの零点が区間 $(-1, 0)$ に存在することを示す. (3.11)式と $\hat{\gamma}_i < 0$ より

$$\beta_d(0) = \sum_{i=1}^N \hat{\gamma}_i \prod_{j=1}^N (-\alpha_j) \begin{cases} < 0: N \text{ が偶数} \\ > 0: N \text{ が奇数} \end{cases} \quad (5.8)$$

を得る. 一方, $0 < \Delta \leq 1/2$ ならば(2.15)式より

$$H_d(-1) = \sum_{i=1}^N \frac{1 + e^{a_i T} - 2e^{(1-\Delta)a_i T}}{a_i(1 + \alpha_i)} b_i < 0 \quad (5.9)$$

が成立する. 以下にこれを示す.

$$f(T) = (1 + e^{aT} - 2e^{(1-\Delta)aT})/a; a < 0 \quad (5.10)$$

とおくと, $f(0) = 0$ となる. また,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dT}(T) &= e^{aT} - 2(1-\Delta)e^{(1-\Delta)aT} \\ &= (1-2(1-\Delta)e^{-\Delta aT})e^{aT} \end{aligned} \quad (5.11)$$

となるので, $2(1-\Delta)e^{-\Delta aT} < 2(1-\Delta) \leq 1$ と $e^{aT} > 0$ の関係を用いると $\frac{df}{dT}(T) < 0; T > 0$ が成立する. 以上より, (5.9)式を得る. しかるに

$$\alpha_d(-1) = (-1) \cdot \prod_{i=1}^N (-1 - \alpha_i) \begin{cases} < 0: N \text{ が偶数} \\ > 0: N \text{ が奇数} \end{cases} \quad (5.12)$$

であるから, (5.8)式と(5.9)式とを併せて

$$\beta_d(0) \cdot \beta_d(-1) < 0 \quad (5.13)$$

を得る. $\blacksquare$

5.2 不安定零点の保存条件

不安定零点の保存に関しつぎの系を得る.

[系5] $G(s)$ が仮定 A1), A2) を満たし, 条件(3.3b)がある $i < n_+$ に対して成立したとする. このとき, $G(s)$ は, 少なくとも一つ実不安定零点をもち, 任意の $T(\in \mathcal{T})$ に対する $H(z), H_d(z); 0 < \Delta \leq 1$ も少なくとも一つの実不安定零点をもつ.

(証明) 定理1, 定理2と補題2より明らか. $\blacksquare$

6. おわりに

本論文では, サンプリング周期に依存しない離散化システムの実極と実零点との関係を明らかにし, この性質を利用して安定零点や不安定零点が保存されるための条件を求めた. さらに, これらの性質や条件が演算時間遅れを考慮した場合にもほぼ同様に成立することを示した. したがって, これらはサンブラ+0次ホールダで離散化した場合に保存される基本的性質の一つといえよう. また, ここでの結果は, 強安定化可能条件 (PIP 条件)⁹⁾ の判定にも適用できる¹⁰⁾ など多くの応用が期待できる.

参考文献

- 1) K. J. Aström, et al.: Zeros of Sampled Systems, Automatica, **20**-1, 31/38 (1984)
- 2) Y. Hayakawa, et al.: On the Limiting Zeros of Sampled Multivariable Systems, Systems & Control Letters, **2**, 292/300 (1983)
- 3) T. Mita: Optimal Digital Feedback Control System Counting Computation Time of Control Laws, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-30**-6, 542/548 (1985)
- 4) 美多, 大山, 古田: サンプル周期より短い制御遅れ時間をもつ最適ディジタルレギュレータとその特性, 計測自

動制御学会論文集, 19-7, 589/591 (1983)

- 5) R. Kondo and K. Furuta: Sampled-Data Optimal Control of Continuous Systems for Quadratic Criterion Function Taking Account of Delayed Control Action, Int. J. Control, 41-4, 1051/1060 (1985)
- 6) 新, 北森: 離散化時機と極限零点について, 第7回 DST シンポジウム資料, 35/38 (1984)
- 7) 美多, 向田, 坂中: 状態方程式の z 変換, 拡張 z 変換とサンプル点間応答の一つの性質, 計測自動制御学会論文集, 18-9, 950/951 (1982)
- 8) 高木貞治: 代数学講義, 共立出版 (1985)
- 9) D. C. Youla, et al.: Single-Loop Feedback-Stabilization of Linear Multivariable Dynamical Plants, Automatica, 10-2, 159/173 (1974)
- 10) 原, 近藤, 香取: 離散化システムの零点の性質, 第9回 DST シンポジウム資料, 95/98 (1986)

《付 録》

[補題 A.1] 任意の実数 a について

$$\sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \binom{n}{l} (l+a)^j = \begin{cases} 0 & (0 \leq j < n) \\ n! & (j=n) \end{cases} \quad (\text{A.1a})$$

(証明) $a=0$ と仮定する. $j \geq 0$ とすると, 一般に

$$\sum_{l=0}^{k+1} (-1)^{k+1-l} \binom{k+1}{l} l^j = (k+1) \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \binom{k}{l} (l+1)^{j-1}$$

が成立する. $(l+1)^{j-1}$ を展開し, k 以下のすべての n について (A.1) が成立するとすると, $j-1=k$ すなわち $j=k+1$ のとき右辺は $(k+1)!$ となる. また, $j-1 < k$ のとき 0 となる. したがって, 数学的帰納法により, $a=0$ のとき (A.1) は成り立つ. $a \neq 0$ の場合には, $(l+a)^j$ を 2 項展開して考えると, (A.1) が成り立つことがいえる. ■

((4.4) の証明) まず最初に (4.4b) を証明する.

$$\begin{aligned} b_k^m(\Delta) &= \sum_{l=0}^{m-k} (-1)^{m-k-l} (l+\Delta)^m \binom{m+1}{m-k-l} \\ &= \sum_{l=k+1}^{m+1} (-1)^{m+1-l} (l-k-1+\Delta)^m \binom{m+1}{m+1-l} \\ &\quad (l \rightarrow l-k-1) \\ &= - \sum_{l=0}^k (-1)^{m+1-l} (l-k-1+\Delta)^m \binom{m+1}{m+1-l} \\ &\quad (\text{A.1a}) \text{ より} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} (l+1-\Delta)^m \binom{m+1}{k-l} \\ &= b_{m-k}^m(1-\Delta) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ところで, $k=1 \sim m$ のとき

$$\begin{aligned} b_k^m(1) &= \sum_{l=0}^{m-k} (-1)^{m-k-l} (l+1)^m \binom{m+1}{m-k-l} \\ &= \sum_{l=1}^{m-k+1} (-1)^{m-k+1-l} \cdot l^m \cdot \binom{m+1}{m-k+1-l} \end{aligned}$$

$$(l \rightarrow l-1)$$

$$= b_{k-1}^m(0) \quad (\text{A.3})$$

が成立するので, (4.4a), (4.4c) は (A.2) および (A.3) を用いてつぎのように示せる.

$$b_{k-1}^m(0) = b_k^m(1) = b_{m-k}^m(0); \quad k=1 \sim m \quad (\text{A.4})$$

$$b_{k+1}^m(1) = b_k^m(0) = b_{m-k}^m(1); \quad k=0 \sim m-1 \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} b_0^m(1) &= \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} (l+1)^m \binom{m+1}{m-l} \\ &= \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} (l+1)^m \binom{m}{m-l} \\ &\quad + \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-l} (l+1)^m \binom{m}{l+1} \end{aligned}$$

(A.1a) より

$$= n! - \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} \cdot l^m \cdot \binom{m}{l} = 0$$

(A.1a) より

また, $b_m^m(0)=0$ は定義より直ちに得られる. □

(定理3の証明) $B_m(z, \Delta)$ の安定判別するために双1次変換を施す. $B_m\left(\frac{1+s}{1-s}, \Delta\right)$ の分子多項式 $\sum_{k=0}^m b_k^m(\Delta)(1+s)^{m-k}(1-s)^k$ の s に関する0次, 1次, 2次の係数は, それぞれ

$$\sum_{k=0}^m b_k^m(\Delta) = m! \quad (\text{A.6})$$

$$\sum_{k=0}^m (m-2k) b_k^m(\Delta) = (1-2\Delta)m! \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^m [(m^2-m)/2 - 2mk + 2k^2] b_k^m(\Delta) \\ &= \left[2\Delta(\Delta-1) - \frac{m-2}{3} \right] m! \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

で与えられる. これからわかるように0次の係数はつねに正であるが, 1次の係数は $\Delta=1/2$ において符号が変化する. また, $m>2$ ならば, 2次の係数は任意の $\Delta(0<\Delta<1)$ について負である. したがって, $B_m\left(\frac{1+s}{1-s}, \Delta\right)$ の分子多項式は任意の $\Delta(0<\Delta<1)$ について, 少なくとも一つ不安定な根をもつ. 結局, $B_m(z, \Delta)$ は任意の $\Delta(0 \leq \Delta \leq 1)$ について少なくとも一つ不安定根をもつ. ■

(証明) (A.6), (A.7), (A.8) はつぎの補題 A.2 より容易に得られる.

[補題 A.2]

$$\sum_{k=0}^m b_k^m(\Delta) = m! \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{k=0}^m k b_k^m(\Delta) = m!(m-1+2\Delta)/2 \quad (\text{A.9})$$

$$\sum_{k=0}^m k^2 b_k^m(\Delta) = m! \left[\frac{(m+1)(3m+4)}{12} - m \right]$$

$$+(m-1)\Delta+\Delta^2] \quad (\text{A. 10})$$

(証明) 紙面の都合上, (A. 6) だけ証明する.

$$\sum_{k=0}^m b_k^m(\Delta) = \sum_{k=0}^m \left[\sum_{l=0}^{m-k} (-1)^{m-k-l} (l+\Delta)^m \binom{m+1}{m-k-l} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=0}^m (l+\Delta)^m \sum_{k=0}^{m-l} (-1)^{m-k-l} \binom{m+1}{m-k-l} \\ &= \sum_{l=0}^m (l+\Delta)^m (-1)^{m-l} \binom{m}{l} = m! \quad \blacksquare \end{aligned}$$