本質的なむだ時間を一つ含む 1 入力線形系の 有限極配置法[†]

玄 英 澤*・新 誠 一*・大久保 重 範*

A Finite Spectrum Assignment Procedure for the Single-Input Linear Systems with Commensurate Time-Delays

Young-Taek HYUN*, Seiichi SHIN* and Shigenori OKUBO*

This paper presents a finite spectrum assignment (f. s. a.) procedure for the single-input linear systems with commensurate time-delays. For this purpose, an algorithm is given to construct the feedback for f. s. a. and it is shown that the algorithm is available under the spectral controllability of the system. Therefore, it turns out that the system is finite spectrally assignable if and only if it is spectrally controllable. The result is consistent with the existing one.

The algorithm consists of the following three steps.

- (1) Construct a feedback formally by a state feedback with the future states.
- (2) Construct a predictor for the future states.
- (3) Realize the feedback for f. s. a. by the substitution of the predictor to that constructed in step (1).

In particular, for step (2) a sufficient condition to predict the future states is given and an algorithm to construct the predictor is also presented. Finally, it is proven that the spectrum of the closed-loop system is in fact assigned to be a finite set by using the resulting feedback.

Key Words: time-delay system, finite spectrum assignment, spectral controllability, predictor

1. ま え が き

本質的なむだ時間を一つ含む 1 入力線形系とは、つ

ぎの(1)式で表わされる系のことをいう。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=0}^p A_i \mathbf{x}(t-id) + \sum_{i=0}^q \mathbf{b}_i u(t-id) \quad (1)$$

一般に、系(1)は可算無限個の極をもつ。そのことがむだ時間系の制御を困難にしている主な原因である。それに対し、閉ループ系が任意に指定された有限個の極だけをもつようにする設計法があり、有限極配置法^{1)~6)}と呼ばれる。この有限極配置法はむだ時間系の本質を解明するうえで、また、MRACS⁷⁾などのより高度な制御系を設計するうえで重要な役割を演ずるものと期待される。

有限極配置可能なために系が満たすべき条件は何かという有限極配置問題に対し、まず Manitius ら¹⁾は系がスペクトル可制御なことが必要条件であることを示した。そして、有限区間積分(有限ラプラス変換)の項を含む制御入力を用いて一つの有限極配置アルゴリズムを提案したが、系のスペクトル可制御性が十分条件であることを示すには至らなかった。続いて、渡部らはまず $p=1, q=0$ の場合に対し制御入力を構成するアルゴリズムを与えることにより、スペクトル可制御性が十分条件でもあることを示した²⁾。そして、その結果を(1)で表わされる系⁴⁾、さらに多入力系⁵⁾へと拡張した。こうして、系のスペクトル可制御性が有限極配置可能なための必要十分条件であるという有限極配置問題に対する解答が与えられた。しかし、手法としては一つのアルゴリズムが与えられただけであり、有限極配置法として確立するためにはより多くの研究が必要である。

本論文では予測器を導入することにより、より直観的なアルゴリズムを用いた有限極配置法を与える。そして系がスペクトル可制御ならばそれが適用可能であることを示す。その結果、系(1)が有限極配置可能であるための必要十分条件は系(1)がスペクトル可制御

[†] 第8回 Dynamical System Theory シンポジウムで一部発表(昭和60・12)

* 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

* Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received October 21, 1986)

(Revised December 18, 1986)

なことであるという前述の事実が導かれる。

本アルゴリズムは、つぎの 3 段階からなる。

- (1) 未来値を含む状態フィードバックによる形式的な制御入力への構成
- (2) 状態の未来値に対する予測器の構成
- (3) (1) で構成した制御入力に予測器を代入することによる制御入力の実現

第 2 章では問題設定を行い (1) を与える。第 3 章では (2) に適用するために、状態の未来値が予測可能であるための一つの十分条件とその予測器を構成するアルゴリズムを与える。第 4 章では (3) を与え、全体のアルゴリズムをまとめる。そして、こうして得られた制御入力により実際に有限極配置が達成されていることを示す。また第 5 章ではいくつかの例題を与える。

2. 問題設定と未来値を含む状態フィードバック

本章では対象とする系と制御入力のクラスを与え、有限極配置可能性を定義する。そして、最後に未来値を含む状態フィードバックによる制御入力を与える。

2.1 系の記述と制御入力のクラス

本論文では系 (1) を対象とする。ただし、 $d(\geq 0) \in \mathbf{R}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}$ であり、 A_i は適当な大きさの定数行列とする (注 1)。ここで、形式的な時間遅れ作用素 $\sigma: f(t) \rightarrow f(t-d)$ を用いると、系 (1) は

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(\sigma)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(\sigma)u(t) \quad (1)'$$

と表わせる。ただし、

$$A(\sigma) = \sum_{i=0}^p A_i \sigma^i, \quad \mathbf{b}(\sigma) = \sum_{i=0}^q \mathbf{b}_i \sigma^i$$

であり、周波数領域では $\sigma = e^{-sd}$ である。そして、系 (1) に対して制御入力のクラス $\mathcal{U}$ をつぎのように定義する (注 2)。

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = \left\{ F(t) \mid F(t) = \sum_{i=0}^{N_0} \mathbf{f}_i^T \mathbf{x}(t-id) \right. \\ + \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=1}^{J_1} \sum_{k=0}^{K_1} \mathbf{g}_{ijk}^T \int_{-d}^0 \tau^k e^{-s_j \tau} \mathbf{x}(\tau+t-id) d\tau \\ \left. + \sum_{i=0}^{N_2} \sum_{j=1}^{J_2} \sum_{k=0}^{K_2} h_{ijk} \int_{-d}^0 \tau^k e^{-s_j \tau} u(\tau+t-id) d\tau \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

ただし、 $s_j \in \mathbf{C}$, $\mathbf{f}_i^T, \mathbf{g}_{ijk}^T \in \mathbf{C}^{1 \times n}$, $h_{ijk} \in \mathbf{C}$ とする。これを初期値 0 でラプラス変換すると、制御入力のク

ラスは周波数領域でつぎのように表わせる (注 3)。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} = \left\{ \tilde{F}(s, \sigma) \mid \tilde{F}(s, \sigma) = \mathbf{f}^T(\sigma) \tilde{\mathbf{x}}(s) \right. \\ + \sum_{j=1}^{J_1} \sum_{k=0}^{K_1} \mathbf{g}_{ijk}^T(\sigma) l_f(s; k, s_j) \tilde{\mathbf{x}}(s) \\ \left. + \sum_{j=1}^{J_2} \sum_{k=0}^{K_2} h_{ijk}(\sigma) l_f(s; k, s_j) \tilde{u}(s) \right\} \quad (2)' \end{aligned}$$

ただし、

$$\mathbf{f}^T(\sigma) = \sum_{i=0}^{N_0} \mathbf{f}_i^T \sigma^i, \quad \mathbf{g}_{ijk}^T(\sigma) = \sum_{i=0}^{N_1} \mathbf{g}_{ijk}^T \sigma^i$$

$$h_{ijk}(\sigma) = \sum_{i=0}^{N_2} h_{ijk} \sigma^i$$

($\sigma = e^{-sd}$) である。また

$$l_f(s; k, s_j) = \int_{-d}^0 \tau^k e^{(s-s_j)\tau} d\tau \quad (3)$$

であり、これは $(-1)^k e^{s_j d}$ を区間 $[0, d]$ で有限ラプラス変換³⁾したものである。さらに、 $l_f(s; k, s_j)$ は繰返し部分積分することにより

$$\begin{aligned} l_f(s; k, s_j) = (-1)^{k+1} k! \left\{ \frac{e^{s_j d} \sigma - 1}{(s-s_j)^{k+1}} \right. \\ \left. + e^{s_j d} \sigma \sum_{i=1}^k \frac{d^i}{i!(s-s_j)^{k-i+1}} \right\} \quad (3)' \end{aligned}$$

($k=0, 1, 2, \dots$) と表わせる。

2.2 有限極配置可能性

系 (1) に対し、 $\tilde{\mathbf{U}}$ のクラスの制御入力

$$\tilde{u}(s) = \tilde{F}(s, \sigma) \in \tilde{\mathbf{U}} \quad (4)$$

を加えると、閉ループ系の特性方程式は

$$\det \Delta_e = 0 \quad (5)$$

ただし、

$$\Delta_e = \begin{bmatrix} sI - A(\sigma) & -\mathbf{b}(\sigma) \\ -\mathbf{G}_1^T(s, \sigma) & 1 - G_2(s, \sigma) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_1^T(s, \sigma) = \mathbf{f}^T(\sigma) + \sum_{j=1}^{J_1} \sum_{k=0}^{K_1} \mathbf{g}_{ijk}^T(\sigma) l_f(s; k, s_j)$$

$$G_2(s, \sigma) = \sum_{j=1}^{J_2} \sum_{k=0}^{K_2} h_{ijk}(\sigma) l_f(s; k, s_j)$$

となる。このとき、有限極配置可能性はつぎのように定義される⁶⁾。

【定義 1】 任意に与えられた実数 $\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{n-1}$ に対し、

$$\det \Delta_e = s^n + \hat{a}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \hat{a}_1 s + \hat{a}_0 \quad (6)$$

とするフィードバックが存在したとき、系 (1) は有限極配置可能であるという。□

(6) 式は閉ループ系があらかじめ与えられた有限個 (n 個) の極だけとなることを示す。次節以降では、(6) を達成するための制御入力 (4) を構成するアルゴ

(注 1) $\mathbf{R}$ は実数全体の集合、 $\mathbf{C}$ は複素数全体の集合、 $\mathbf{R}[\sigma]$ は σ の実数係数多項式全体の集合、 $\mathbf{R}(\sigma)$ は σ の実数係数有理関数全体の集合とする。また、 T は行列の転置を表す。

(注 2) この定義で $F(t)$ は複素数となるが、実際に制御入力として用いる場合、実数の範囲で構成できる (定理 2 参照)。

(注 3) $\tilde{F}(s, \sigma) = \mathcal{L}[F(t)]$, $\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}(t)]$, $\tilde{u}(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ ($\mathcal{L}[\cdot]$: ラプラス変換) とする。

リズムを与え、系がスペクトル可制御ならばそれが適用可能であることを示す。

ところで、系(1)がスペクトル可制御であるとは、 $\det(sI - A(e^{-s\alpha})) = 0$ の根であるすべてのスペクトルモードが可制御なことであり、つぎの命題が成立する⁶⁾。

〔命題 1〕 つぎの 3 条件は等価である。

(i) 系(1)はスペクトル可制御。

(ii) 任意の $s \in \mathbf{C}$ に対して

$$\text{rank}[sI - A(e^{-s\alpha})]b(e^{-s\alpha}) = n \quad (7)$$

$$\text{(iii)}^{11)} \det[b(\sigma)A(\sigma)b(\sigma) \cdots A^{n-1}(\sigma)b(\sigma)] \neq 0 \quad (8)$$

かつ、任意の $s_0 \in \Phi_0 \cap \Omega_0$ に対して

$$\text{rank}[s_0I - A(e^{-s_0\alpha})]b(e^{-s_0\alpha}) = n$$

ただし、 $\Phi_0 = \{s_0 \in \mathbf{C} | e^{-s_0\alpha} \in \Sigma_0\}$, $\Sigma_0 = \{s_0 \in \mathbf{C} | \det[b(s_0)A(s_0)b(s_0) \cdots A^{n-1}(s_0)b(s_0)] = 0\}$, $\Omega_0 = \{s_0 \in \mathbf{C} | \det(s_0I - A(e^{-s_0\alpha})) = 0\}$ である。□

2.3 未来値を含む状態フィードバック

本節では予測器を導入する前段階として、未来値を含む状態フィードバックによる制御入力を与える。

いま、系(1)の特性関数

$$\det \Delta = s^n + a_{n-1}(\sigma)s^{n-1} + \cdots + a_1(\sigma)s + a_0(\sigma) \quad (9)$$

の係数 $a_i(\sigma) \in \mathbf{R}[\sigma]$ ($i=0, \dots, n-1$) に対し、

$$\eta^T(\sigma) = [a_0(\sigma) - \hat{a}_0 \mid \cdots \mid a_{n-1}(\sigma) - \hat{a}_{n-1}]M^{-1}(\sigma) \quad (10)$$

とおく。ただし、 $\hat{a}_i (i=0, \dots, n-1)$ は任意に与えられた実数であり、

$$M(\sigma) = [b(\sigma)A(\sigma)b(\sigma) \cdots A^{n-1}(\sigma)b(\sigma)]$$

$$\times \begin{bmatrix} a_1(\sigma) & \cdots & a_{n-1}(\sigma) & 1 \\ \vdots & & & \\ a_{n-1}(\sigma) & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \quad \mathbf{0}$$

である。このとき未来値を含む状態フィードバックによる制御入力は、

$$\tilde{u}(s) = \eta^T(\sigma)\tilde{x}(s) \quad (11)$$

で与えられる。この制御入力により閉ループ系の特性関数は、よく用いられる変形¹¹⁻⁶⁾により

$$\begin{aligned} \det \Delta_c &= \det(sI - A(\sigma) - b(\sigma)\eta^T(\sigma)) \\ &= \det(sI - A(\sigma)) - \eta^T(\sigma)\text{adj}(sI - A(\sigma))b(\sigma) \\ &= \det(sI - A(\sigma)) - \eta^T(\sigma)M(\sigma)v(s) \\ &= s^n + \hat{a}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \hat{a}_1s + \hat{a}_0 \end{aligned} \quad (12)$$

($v(s) = [1 \mid s \mid \cdots \mid s^{n-1}]^T$)となる。ただし、Fadeeva のアルゴリズム⁹⁾により次式が成立することを用いた。

$$\text{adj}(sI - A(\sigma))b(\sigma) = M(\sigma)v(s)$$

ここで、もし系(1)が環上可到達¹⁰⁾、すなわち

$$\det[b(\sigma)A(\sigma)b(\sigma) \cdots A^{n-1}(\sigma)b(\sigma)] = \text{const} (\neq 0)$$

であれば $\eta^T(\sigma)$ は σ の多項式となり、制御入力(11)は状態の現在までの値で実現可能である。よって(12)式より有限極配置は達成される。しかし系(1)がスペクトル可制御な場合、一般に $\eta^T(\sigma)$ は σ の有理関数となるので(11)はそのままでは実現できない。これは、 $\eta^T(\sigma)\tilde{x}(s)$ の σ に関し厳密にプロパーな部分が状態の未来値を表わすからである。そこで次章ではその状態の未来値に対する予測器を $\tilde{U}$ のクラスで構成する。

3. 状態の予測

一般に、 $\xi^T(\sigma)/(\sigma-a)^e (\xi^T(\sigma) \in \mathbf{C}[\sigma]^{1 \times n}, a \in \mathbf{C})$ が σ に関し厳密にプロパーであるとき、 $\xi^T(\sigma)\tilde{x}(s)/(\sigma-a)^e$ は状態の未来値を表わす(たとえば $\tilde{x}(s)/\sigma$ は $x(t+d)$)。本章の目的はこの未来値に対する予測器を構成することである。

まず基本方針を述べるために、 $\xi^T\tilde{x}(s)/(\sigma-a)$ に対する予測器の構成を考える。ここで $s_0 \in \mathbf{C}$ が存在して

$$\xi^T[s_0I - A(a)] - b(a) = \mathbf{0}^T$$

が成立したとする。このとき a を σ に戻すと

$$\begin{aligned} \xi^T[sI - A(\sigma)] - b(\sigma) \\ = [(s-s_0)\xi^T + (\sigma-a)r^T(\sigma)](\sigma-a)\rho(\sigma) \end{aligned}$$

となる。ところで、系(1)は周波数領域では

$$[sI - A(\sigma)] - b(\sigma) \begin{bmatrix} \tilde{x}(s) \\ \tilde{u}(s) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (13)$$

と書けるので、両辺左から ξ^T を乗じて整理すると

$$\frac{\xi^T}{\sigma-a}\tilde{x}(s) = -\frac{1}{s-s_0}\{r^T(\sigma)\tilde{x}(s) + \rho(\sigma)\tilde{u}(s)\} \quad (14)$$

を得る。これは、未来値 $\xi^T\tilde{x}(s)/(\sigma-a)$ が状態と入力の $[0, t]$ 区間積分で構成できることを示す。しかし s_0 の実部が負でない場合、 $t \rightarrow \infty$ とともにその積分核は有界でなくなるので実際に用いることはできない。そのため、有限区間積分(有限ラプラス変換)を用いた $\tilde{U}$ のクラスで考えなければならない。そこで、(14)式に $1 - (\sigma-a)f_0$ を乗じて整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\xi^T}{\sigma-a}\tilde{x}(s) &= f_0\xi^T\tilde{x}(s) - g_0l_f(s; 0, s_0) \\ &\quad \times \{r^T(\sigma)\tilde{x}(s) + \rho(\sigma)\tilde{u}(s)\} \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、

$$f_0 = e^{s_0\alpha}/(1 - e^{s_0\alpha}a), \quad g_0 = 1/(1 - e^{s_0\alpha}a)$$

となり、この右辺は $\tilde{U}$ のクラスに属する。すなわち、 $\xi^T\tilde{x}(s)/(\sigma-a)$ に対する予測器が $\tilde{U}$ のクラスで構成できたことになる。以上の議論を一般化するとつぎの補題 1 が得られる。

〔補題 1〕 系(1)はスペクトル可制御であるとし、 $\xi^T(\sigma)/(\sigma-a)^e$ は σ に関して厳密にプロパーであるとする。ただし $\xi^T(\sigma) \in \mathbf{C}[\sigma]^{1 \times n}$, $a \in \mathbf{C}$, $\xi^T(a) \neq \mathbf{0}^T$ である。このとき

$$\begin{aligned} & \xi^T(\sigma)[b(\sigma)|A(\sigma)b(\sigma)|\cdots|A^{n-1}(\sigma)b(\sigma)] \\ & = (\sigma-a)^* \phi^T(\sigma) \end{aligned} \quad (16)$$

となる $\phi^T(\sigma) \in C[\sigma]^{1 \times n}$ が存在するならば,

$$\frac{\xi^T(\sigma)}{(\sigma-a)^*} \tilde{x}(s) = \tilde{F}_0(s, \sigma) \quad (17)$$

である $\tilde{F}_0(s, \sigma) \in \tilde{U}$ を構成することができる. $\square$

(証明) つぎの6段階で証明する.

(I) つぎの(18)をみたす最小の j を ν とおく.

$$\begin{aligned} \xi^T(a)A^j(a) & \in \text{span} \{ \xi^T(a), \xi^T(a)A(a), \\ & \quad \dots, \xi^T(a)A^{j-1}(a) \} \end{aligned} \quad (18)$$

このとき, $\phi_0, \dots, \phi_{\nu-1} \in C$ が存在し,

$$\theta_1(s) = s^\nu - \phi_{\nu-1}s^{\nu-1} - \dots - \phi_1s - \phi_0$$

とおくと, (18)はつぎのように書ける.

$$\xi^T(a)\theta_1(A(a)) = 0^T \quad (18)'$$

a を σ に戻すと, ある $\zeta_j^T(\sigma) \in C[\sigma]^{1 \times n}$ が存在し

$$\xi^T(\sigma)\theta_1(A(\sigma)) = (\sigma-a)\zeta_j^T(\sigma) \quad (19)$$

となる. もし, $\kappa=1$ ならば

$$\beta(s) = \theta_1(s), \quad r^T(\sigma) = \zeta_j^T(\sigma) \quad (20)$$

とおく. そうでなければ, 上記の操作を $(\kappa-1)$ 回繰返し, つぎの(21)を満たす $\theta_j(s) \in C[s]$, $\zeta_j^T(\sigma) \in C[\sigma]^{1 \times n}$ ($j=2, \dots, \kappa$) を求める.

$$\zeta_{j-1}^T(\sigma)\theta_j(A(\sigma)) = (\sigma-a)\zeta_j^T(\sigma) \quad (21)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \beta(s) & = \theta_1(s) \cdots \theta_\kappa(s) \\ r^T(\sigma) & = \zeta_\kappa^T(\sigma) \end{aligned} \quad (22)$$

とおくと, (19), (21)式より

$$\xi^T(\sigma)\beta(A(\sigma)) = (\sigma-a)^* r^T(\sigma) \quad (23)$$

が成立する. もし, (21)の途中で $\zeta_j^T(\sigma) \equiv 0^T$ ($j \leq \kappa$) となった場合,

$$\beta(s) = \theta_1(s) \cdots \theta_j(s), \quad r^T(\sigma) = 0^T$$

とおくと, $\kappa=1$ の場合も含めて(23)式が成立する.

(II) $\beta(s)$ の零点を $s_1, \dots, s_J$, その重複度を $\mu_1, \dots, \mu_J$ とし,

$$\begin{aligned} \beta(s) & = (s-s_1)^{\mu_1} \cdots (s-s_J)^{\mu_J} \\ & = (s-s_j)^{\mu_j-k} \hat{\beta}_{jk}(s) \end{aligned} \quad (24)$$

と $\hat{\beta}_{jk}(s)$ ($j=1, \dots, J$; $k=0, \dots, \mu_j$) を定義する. このとき $1/\beta(s)$ はつぎのように部分分数展開できる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta(s)} & = \sum_{j=1}^J \left\{ \frac{c_{j1}}{(s-s_j)^{\mu_j}} + \dots + \frac{c_{j\mu_j}}{s-s_j} \right\} \\ & = \sum_{j=1}^J c_j^T \left[\frac{1}{(s-s_j)^{\mu_j}} \cdots \frac{1}{s-s_j} \right]^T \end{aligned} \quad (25)$$

ただし $c_j^T = [c_{j1} | \dots | c_{j\mu_j}] \in C^{1 \times \mu_j}$. そして両辺に $\beta(s)$ を乗ずると, (24)より

$$1 = \sum_{j=1}^J c_j^T [\hat{\beta}_{j0}(s) | \dots | \hat{\beta}_{j\mu_j-1}(s)]^T \quad (26)$$

となる. よって(26)式において, s に $A(\sigma)$ を代入し

左から $\xi^T(\sigma)$ を乗ずると, つぎの(27)式を得る.

$$\xi^T(\sigma) = \sum_{j=1}^J c_j^T R_j(\sigma) \quad (27)$$

ただし,

$$\begin{aligned} R_j(\sigma) & = [r_{j1}(\sigma) | \dots | r_{j\mu_j}(\sigma)]^T \\ r_{jk}^T(\sigma) & = \xi^T(\sigma) \hat{\beta}_{jk-1}(A(\sigma)) \end{aligned} \quad (28)$$

(III) (24), (28)式より(23)式は

$$r_{j\mu_j+1}^T(\sigma) = (\sigma-a)^* r^T(\sigma) \quad (23)'$$

と書け, さらに

$$r_{jk+1}^T(\sigma) = -r_{jk}^T(s_j I - A(\sigma)) \quad (29)$$

である. よって,

$$\begin{aligned} r_{jk}^T(\sigma)(sI - A(\sigma)) & = r_{jk}^T(\sigma)(s_j I - A(\sigma)) + (s-s_j)r_{jk}^T(\sigma) \\ & = -r_{j,k+1}^T(\sigma) + (s-s_j)r_{jk}^T(\sigma) \end{aligned} \quad (30)$$

($j=1, \dots, J$; $k=1, \dots, \mu_j$) となり, これを $k=1, \dots, \mu_j$ について行列表現すると, (28), (23)'式より

$$\begin{aligned} R_j(\sigma)(sI - A(\sigma)) & = -(\sigma-a)^* V(\sigma) + S_j(s)R_j(\sigma) \end{aligned} \quad (31)$$

ただし,

$$\begin{aligned} V(\sigma) & = [0 | \dots | 0 | r(\sigma)]^T \\ S_j(s) & = \begin{bmatrix} s-s_j & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 \\ & & & s-s_j \end{bmatrix} : \mu_j \times \mu_j \end{aligned} \quad (32)$$

となる. また, 単純な計算により

$$S_j^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ s-s_j & & (s-s_j)^{\mu_j} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ & & & s-s_j \end{bmatrix} \quad (33)$$

である. ところで, $r_{jk}^T(\sigma)$ の定義(28)より,

$$r_{jk}^T(\sigma) = \xi^T(\sigma) \times \{A(\sigma) \text{ の多項式} \}$$

なので, 条件(16)より

$$r_{jk}^T(\sigma)b(\sigma) = (\sigma-a)^* \rho_{jk}(\sigma) \quad (34)$$

なる $\rho_{jk}(\sigma) \in C[\sigma]$ が存在する. これを行列表現すると,

$$R_j(\sigma)b(\sigma) = (\sigma-a)^* \rho_j(\sigma) \quad (35)$$

ただし,

$$\rho_j(\sigma) = [\rho_{j1}(\sigma) | \dots | \rho_{j\mu_j}(\sigma)]^T \quad (36)$$

となる. (31), (35)式をあわせて左から $S_j^{-1}(s)/(\sigma-a)^*$ を乗ずると, つぎの(37)式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{S_j^{-1}(s)R_j(\sigma)}{(\sigma-a)^*} [sI - A(\sigma) | -b(\sigma)] & = \left[-S_j^{-1}(s)V(\sigma) + \frac{R_j(\sigma)}{(\sigma-a)^*} \mid -S_j^{-1}(s)\rho_j(\sigma) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

(IV) ここで,

$$L_j(s) = \begin{bmatrix} l_f(s; 0, s_j) & -l_f(s; 1, s_j) & \cdots & \frac{(-1)^{\mu_j-1}}{(\mu_j-1)!} l_f(s; \mu_j-1, s_j) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & -l_f(s; 1, s_j) & \\ 0 & & & l_f(s; 0, s_j) \end{bmatrix} \quad (38)$$

とおくと, (3)', (33)式より

$$L_j(s) = -\Lambda_j(\sigma) S_j^{-1}(s) \quad (39)$$

ただし,

$$\Lambda_j(s) = \begin{bmatrix} e^{s_j d} \sigma - 1 & d e^{s_j d} \sigma & \cdots & \frac{d^{\mu_j-1}}{(\mu_j-1)!} e^{s_j d} \sigma \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & d e^{s_j d} \sigma & \\ 0 & & & e^{s_j d} \sigma - 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

と表わせる。さらに,

$$f_j = \left(\frac{e^{s_j d}}{1 - e^{s_j d} a} \right)^{\kappa} \quad (41)$$

$$g_j(\sigma) = \sum_{k=1}^{\kappa} \binom{\kappa}{k} \frac{(e^{s_j d} \sigma - 1)^{k-1}}{(1 - e^{s_j d} a)^k}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} f_j(\sigma - a)^{\kappa} &= \left(\frac{e^{s_j d} \sigma - 1}{1 - e^{s_j d} a} + 1 \right)^{\kappa} \\ &= \sum_{k=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{k} \frac{(e^{s_j d} \sigma - 1)^k}{(1 - e^{s_j d} a)^k} \\ &= 1 + (e^{s_j d} \sigma - 1) g_j(\sigma) \end{aligned} \quad (42)$$

となる。ただし $f_j, g_j(\sigma)$ の分母が0にならないことは, 系のスペクトル可制御性により保証される ((VI) で証明)。そして (40), (42)式を用いると,

$$g_j(\sigma) \Lambda_j(\sigma) = f_j(\sigma - a)^{\kappa} U_{2j} - U_{1j}(\sigma) \quad (43)$$

ただし,

$$U_{1j}(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & d(1 - g_j(\sigma)) & \cdots & \frac{d^{\mu_j-1}}{(\mu_j-1)!} (1 - g_j(\sigma)) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & d(1 - g_j(\sigma)) & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$U_{2j} = \begin{bmatrix} 1 & d & \cdots & \frac{d^{\mu_j-1}}{(\mu_j-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & d & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

と表わせる。よって (37)式両辺左から $-g_j(\sigma) \Lambda_j(\sigma)$ を乗ずると, (39), (43)式よりつぎの (46)式を得る。

$$\frac{g_j(\sigma) L_j(s) R_j(\sigma)}{(\sigma - a)^{\kappa}} [sI - A(\sigma)] - \mathbf{b}(\sigma)]$$

$$\begin{aligned} &= \left[-g_j(\sigma) L_j(s) V(\sigma) - f_j U_{2j} R_j(\sigma) \right. \\ &\quad \left. + \frac{U_{1j}(\sigma) R_j(\sigma)}{(\sigma - a)^{\kappa}} - g_j(\sigma) L_j(s) \rho_j(\sigma) \right] \end{aligned} \quad (46)$$

(V) 系(1)は周波数領域で (13) のように書けるので, (13)式左から $g_j(\sigma) L_j(s) R_j(\sigma) / (\sigma - a)^{\kappa}$ を乗じ, (46)式を用いて $R_j(\sigma) \tilde{\mathbf{x}}(s) / (\sigma - a)^{\kappa}$ について解き, さらに左から (25) の $\mathbf{c}_j^T$ を乗じ $j=1, \dots, J$ の総和をとると

$$\sum_{j=1}^J \mathbf{c}_j^T \frac{R_j(\sigma)}{(\sigma - a)^{\kappa}} \tilde{\mathbf{x}}(s) = \tilde{F}_0(s, \sigma) \quad (47)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0(s, \sigma) &= \sum_{j=1}^J \mathbf{c}_j^T U_{1j}^{-1}(\sigma) [f_j U_{2j} R_j(\sigma) \tilde{\mathbf{x}}(s) \\ &\quad + g_j(\sigma) L_j(s) \{V(\sigma) \tilde{\mathbf{x}}(s) + \rho_j(\sigma) \tilde{u}(s)\}] \end{aligned} \quad (48)$$

となる。 $U_{1j}(\sigma)$ はユニモジュラなので $\tilde{F}_0(s, \sigma) \in \tilde{\mathcal{U}}$ であり, (27), (47)より (17)式が成立する。すなわち, (48)式の $\tilde{F}_0(s, \sigma)$ が求めるものである。

(VI) あとは $f_j, g_j(\sigma)$ の分母が0にならないこと, すなわち $1 - e^{s_j d} a \neq 0$ ($j=1, \dots, J$) であることを示せばよい。 $s_j \in \mathbf{C}$ は $\beta(s)$ の零点なので (22)より $\theta_k(s_j) = 0$ となる $k(1 \leq k \leq \kappa)$ が存在する。ここで, $\theta_k(s) = (s - s_j) \hat{\theta}_k(s)$ とおくと, (21)式より (30)と同様に

$$\begin{aligned} \zeta_{k-1}^T(\sigma) \hat{\theta}_k(A(\sigma)) (sI - A(\sigma)) \\ = -(\sigma - a) \zeta_k^T(\sigma) + (s - s_j) \zeta_{k-1}^T(\sigma) \hat{\theta}_k(A(\sigma)) \end{aligned} \quad (49)$$

となる。また, (19), (21)式と条件(16)より

$$\zeta_{k-1}^T(\sigma) \hat{\theta}_k(A(\sigma)) \mathbf{b}(\sigma) = (\sigma - a)^{\kappa-k+1} \phi_k(\sigma) \quad (50)$$

なる $\phi_k(\sigma) \in \mathbf{C}[\sigma]$ が存在する。よって, (49), (50)式をあわせて $\sigma = a, s = s_j$ を代入すると

$$\zeta_{k-1}^T(a) \hat{\theta}_k(A(a)) [s_j I - A(a)] \mathbf{b}(a) = 0^T \quad (51)$$

となる。 $\theta_k(s)$ の次数の最小性より

$$\zeta_{k-1}^T(a) \hat{\theta}_k(A(a)) \neq 0^T$$

なので, もし $1 - e^{s_j d} a = 0$ すなわち $a = e^{-s_j d}$ ならば, (51)式は系(1)のスペクトル可制御性(7)に反する。よって, $1 - e^{s_j d} a \neq 0$ である。■

証明中に述べた予測器 $\tilde{F}_0(s, \sigma)$ の構成法を, アルゴリズムとしてまとめるとつぎのようになる。

ステップ1: (23)式をみたす $\beta(s), \mathbf{r}(\sigma)$ を求める。

ステップ2: (28), (36)式で定義された $R_j(\sigma), \rho_j(\sigma)$ ($j=1, \dots, J$) を計算する。

ステップ3: (25), (32), (38), (41), (44), (45)の $\mathbf{c}_j, V(\sigma), L_j(s), f_j, g_j(\sigma), U_{1j}(\sigma), U_{2j}$ を用いて (48)の $\tilde{F}_0(s, \sigma)$ を計算する。□

つぎに後の議論を容易にするために, 補題1を用い

てより一般的なつぎの定理 1 を証明する。

《定理 1》系 (1) はスペクトル可制御であるとする。このとき、 σ の有理関数ベクトル $\eta^T(\sigma) \in \mathbf{C}(\sigma)^{1 \times n}$ に対し、

$$\eta^T(\sigma)[b(\sigma) | A(\sigma)b(\sigma) | \cdots | A^{n-1}(\sigma)b(\sigma)] \in \mathbf{C}[\sigma]^{1 \times n} \quad (52)$$

すなわち、

$$\eta^T(\sigma) = \phi^T(\sigma)[b(\sigma) | A(\sigma)b(\sigma) | \cdots | A^{n-1}(\sigma)b(\sigma)]^{-1} \quad (52)'$$

なる σ の多項式ベクトル $\phi^T(\sigma) \in \mathbf{C}[\sigma]^{1 \times n}$ が存在するならば

$$\eta^T(\sigma)\tilde{x}(s) = \tilde{F}(s, \sigma) \quad (53)$$

である $\tilde{F}(s, \sigma) \in \tilde{\mathcal{U}}$ を構成することができる。□

(証明) まず、 $\eta^T(\sigma)$ をつぎの (54) 式のように、 σ の多項式と厳密にプロパーな項に分け、さらに厳密にプロパーな項を部分分展開する。

$$\eta^T(\sigma) = \eta_{pi}^T(\sigma) + \sum_{i=1}^N \frac{(\eta_{ip}^{(i)}(\sigma))^T}{(\sigma - \sigma_i)^{\lambda_i}} \quad (54)$$

ただし、 $\eta_{pi}^T(\sigma)$ 、 $(\eta_{ip}^{(i)}(\sigma))^T \in \mathbf{C}[\sigma]^{1 \times n}$ であり、 $\sigma_i \in \mathbf{C}$ は $\eta^T(\sigma)$ の分母多項式の零点、 λ_i はその重複度である。このとき、(52)', (54) 式より

$$\begin{aligned} (\eta_{ip}^{(i)}(\sigma))^T [b(\sigma) | \cdots | A^{n-1}(\sigma)b(\sigma)] \\ = (\sigma - \sigma_i)^{\lambda_i} \phi_i^T(\sigma) \end{aligned} \quad (55)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \phi_i^T(\sigma) = \phi^T(\sigma) - \left\{ \eta_{pi}^T(\sigma) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{(\eta_{jp}^{(j)}(\sigma))^T}{(\sigma - \sigma_j)^{\lambda_j}} \right\} \\ \times [b(\sigma) | \cdots | A^{n-1}(\sigma)b(\sigma)] \end{aligned}$$

となる。(55) 式の左辺は σ に関し多項式であり、 $i \neq j$ ならば $\sigma_i \neq \sigma_j$ なので、右辺の $\phi_i^T(\sigma)$ も σ に関し多項式でなければならない。よって、

$$\begin{aligned} \xi^T(\sigma) = (\eta_{ip}^{(i)}(\sigma))^T, \quad a = \sigma_i \\ \phi^T(\sigma) = \phi_i^T(\sigma), \quad \kappa = \lambda_i \end{aligned} \quad (56)$$

とおくと、これらは補題 1 の条件を満たすので、

$$\frac{(\eta_{ip}^{(i)}(\sigma))^T}{(\sigma - \sigma_i)^{\lambda_i}} \tilde{x}(s) = \tilde{F}_i(s, \sigma) \quad (57)$$

となる $\tilde{F}_i(s, \sigma) \in \tilde{\mathcal{U}}$ ($i=1, \dots, N$) を構成できる。したがって、

$$\tilde{F}(s, \sigma) = \eta_{pi}^T(\sigma)\tilde{x}(s) + \sum_{i=1}^N \tilde{F}_i(s, \sigma) \quad (58)$$

とおくと、 $\tilde{F}(s, \sigma) \in \tilde{\mathcal{U}}$ であり、(54)、(57)、(58) 式より (53) 式が成立することがいえる。■

定理 1 は、状態の未来値を含む $\eta^T(\sigma)\tilde{x}(s)$ に補題 1 の予測器を代入することにより $\tilde{\mathcal{U}}$ のクラスで実現できることを示す。次章では (54)~(58) を有限極配置のための制御入力構成法としてそのまま用いる。

4. 主 結 果

本章では、未来値を含む状態フィードバック (11) を定理 1 を用いて実現することにより、実際に有限極配置が達成できることを示す(注 4)。

《定理 2》系 (1) が有限極配置可能なための必要十分条件は、系 (1) がスペクトル可制御なことである。□

(証明) 必要性：系 (1) がスペクトル可制御でないとする、命題 1 の (7) より

$$\text{rank}[s_0 I - A(e^{-s_0 d}) | b(e^{-s_0 d})] < n$$

なる $s_0 \in \mathbf{C}$ が存在する。このとき、任意の制御入力 (4) に対して閉ループ系の特性関数 (5) は

$$\det \Delta_c|_{s=s_0} = 0 \quad (59)$$

となる。これは、閉ループ系の極を任意に配置できるという有限極配置の条件に反する。

十分性：系 (1) がスペクトル可制御であれば、(8) より $M^{-1}(\sigma)$ が存在し、(10) 式の $\eta^T(\sigma)$ を定義できる。この $\eta^T(\sigma)$ は明らかに定理 1 の条件を満たすので、補題 1、定理 1 のアルゴリズムにより

$$\eta^T(\sigma)\tilde{x}(s) = \tilde{F}(s, \sigma) \quad (60)$$

となる $\tilde{F}(s, \sigma) \in \tilde{\mathcal{U}}$ を構成することができる。しかも、(60) 式左辺は実数係数なので、右辺の $\tilde{F}(s, \sigma)$ も実数の範囲で構成できる。よって、この $\tilde{F}(s, \sigma)$ を用いた制御入力 (4) により、閉ループ系の特性関数 (5) が実際に (6) を満たすことを示せばよい。ただしこの場合、(5) 式の $G_1^T(s, \sigma)$ 、 $G_2(s, \sigma)$ は、

$$\tilde{F}(s, \sigma) = G_1^T(s, \sigma)\tilde{x}(s) + G_2(s, \sigma)\tilde{u}(s) \quad (61)$$

と $\tilde{x}(s)$ 、 $\tilde{u}(s)$ の係数をまとめたものである。以下では補題 1、定理 1 で用いた記号をそのまま使用する。ここです、(57) 式の $\tilde{F}_i(s, \sigma)$ に対応するものの右肩に (i) を付けることにすると、(48)、(54)、(61) 式より

$$\begin{aligned} G_1^T(s, \sigma) \\ = \eta_{pi}^T(\sigma) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J^{(i)}} (\mathbf{c}_j^{(i)})^T (U_{1j}^{(i)}(\sigma))^{-1} \\ \times \{ f_j^{(i)} U_{2j}^{(i)} R_j^{(i)}(\sigma) + g_j^{(i)}(\sigma) L_j^{(i)}(s) V^{(i)}(\sigma) \} \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} G_2(s, \sigma) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J^{(i)}} (\mathbf{c}_j^{(i)})^T (U_{1j}^{(i)}(\sigma))^{-1} \\ \times g_j^{(i)}(\sigma) L_j^{(i)}(s) \rho_j^{(i)}(\sigma) \end{aligned} \quad (63)$$

と表わせる。ここで、(5) 式の Δ_c の両辺左から

$$\Gamma(s, \sigma) \equiv \begin{bmatrix} I & 0 \\ \vdots & \vdots \\ G_1^T(s, \sigma)(sI - A(\sigma))^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

(注 4) 定理 2 は文献 4) によりすでに示されているが、ここでは本アルゴリズムを用いても同じ結果が得られることを示している。

を乗ずると,

$$\Gamma(s, \sigma) \Delta_c(s, \sigma) = \begin{bmatrix} sI - A(\sigma) & -b(\sigma) \\ 0^T & 1 - \omega(s, \sigma) \end{bmatrix} \quad (64)$$

ただし,

$$\omega(s, \sigma) = G_2(s, \sigma) + G_1^T(s, \sigma)(sI - A(\sigma))^{-1}b(\sigma) \quad (65)$$

となる。そして (46) 式両辺右から

$$\begin{bmatrix} (sI - A(\sigma))^{-1}b(\sigma) \\ 1 \end{bmatrix}$$

を乗じ、 $R_j^{(i)}(\sigma)(sI - A(\sigma))^{-1}b(\sigma)/(\sigma - \sigma_i)^{\lambda_i}$ について解き、さらに左から $(c_j^{(i)})^T$ を乗じ $i=1, \dots, J^{(i)}$ の総和をとると、(27)、(62)、(63) 式より

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{(\eta_{sp}^{(i)})^T}{(\sigma - \sigma_i)^{\lambda_i}} (sI - A(\sigma))^{-1}b(\sigma) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J^{(i)}} \frac{(c_j^{(i)})^T R_j^{(i)}(\sigma)(sI - A(\sigma))^{-1}b(\sigma)}{(\sigma - \sigma_i)^{\lambda_i}} \\ &= \{G_1^T(s, \sigma) - \eta_{sp}^T(\sigma)\} (sI - A(\sigma))^{-1}b(\sigma) \\ & \quad + G_2(s, \sigma) \end{aligned} \quad (66)$$

となる。ただし、(56) 式の関係を用いた。よって (54)、(65)、(66) 式より、つぎの (67) 式を得る。

$$\omega(s, \sigma) = \eta^T(\sigma)(sI - A(\sigma))^{-1}b(\sigma) \quad (67)$$

したがって、(64)、(67) 式を用いて (12) 式と同じ計算を行うことにより

$$\begin{aligned} \det \Delta_c &= \det \{\Gamma^T(s, \sigma) \Delta_c\} \\ &= \det \{sI - A(\sigma)\} \{1 - \omega(s, \sigma)\} \\ &= s^n + \hat{a}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \hat{a}_1s + \hat{a}_0 \end{aligned} \quad (68)$$

となる。

以上をまとめると、有限極配置を達成する制御入力 はつぎのアルゴリズムにより構成できる。

ステップ 1: (10) 式の $\eta^T(\sigma)$ に対し、(54) 式のように σ に関して多項式の項と厳密にプロパーな項に分け、厳密にプロパーな項をさらに部分分数展開する。

ステップ 2: 部分分数展開した各項に対して補題 1 のアルゴリズムを適用し、(57) 式を満たす $\tilde{F}_i(s, \sigma)$ ($i=1, \dots, N$) を求める。

ステップ 3: (58) 式の $\tilde{F}(s, \sigma)$ を計算する。このとき、求める制御入力は $\tilde{F}(s, \sigma)$ を逆ラプラス変換した $u(t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{F}(s, \sigma)]$ で与えられる。□

5. 例 題

[例 1] (文献 3) の例)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-d) \\ x_2(t-d) \end{bmatrix} \\ & \quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-d) \end{aligned}$$

なる系に対し、閉ループ系の特性関数が

$$\det \Delta_c = s^2 + 3s + 2$$

となる制御入力を構成する。

ステップ 1

$$\eta^T(\sigma) = [-3 - \sigma \mid -1] + [-2 \mid -3]/\sigma$$

ステップ 2

$$\xi^T = [-2 \mid -3], \quad a=0, \quad \kappa=1$$

$$\beta(s) = s^2, \quad \mathbf{r}^T(\sigma) = [-2\sigma \mid -2]$$

$$R_1(\sigma) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2\sigma & -2 \end{bmatrix}, \quad \rho_1(\sigma) = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$c_1^T = [1 \mid 0], \quad f_1=1, \quad g_1(\sigma)=1$$

ステップ 3

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s, \sigma) &= [-5 - (1+2d)\sigma \mid -4-2d] \tilde{\mathbf{x}}(s) \\ & \quad + [2\sigma \mid 2] l_f(s; 1, 0) \tilde{\mathbf{x}}(s) \\ & \quad + \{2l_f(s; 1, 0) - 3l_f(s; 0, 0)\} \tilde{u}(s) \end{aligned}$$

よって、制御入力は

$$\begin{aligned} u(t) &= -5x_1(t) - (1+2d)x_1(t-d) - (4+2d)x_2(t) \\ & \quad + 2 \int_{\tau} x_1(\tau+t-d) d\tau + 2 \int_{\tau} x_2(\tau+t) d\tau \\ & \quad + \int_{\tau} (2\tau-3)u(\tau+t) d\tau \end{aligned}$$

となる。ただし、積分区間はすべて $[-d, 0]$ である。

[例 2]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-d) \\ x_2(t-d) \end{bmatrix} \\ & \quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-2d) \\ x_2(t-2d) \end{bmatrix} \\ & \quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t-d) \end{aligned}$$

なる系に対し、閉ループ系の特性関数を

$$\det \Delta_c = s^2 + 3s + 2$$

とする制御入力を構成する。

ステップ 1

$$\eta^T(\sigma) = [0 \mid -(\sigma^2+4)] + [6 \mid -6\sigma]/\sigma^3$$

ステップ 2

$$\xi^T(\sigma) = [6 \mid -6\sigma], \quad a=0, \quad \kappa=3$$

$$\beta(s) = s-1, \quad \mathbf{r}^T(\sigma) = [0 \mid -6]$$

$$R_1(\sigma) = [6 \mid -6\sigma], \quad \rho_1(\sigma) = 0, \quad c_1=1$$

$$f_1 = e^{3d}, \quad g_1(\sigma) = e^{2d}\sigma^2 + e^d\sigma + 1$$

ステップ 3

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s, \sigma) &= [6f_1 \mid -6f_1\sigma - (\sigma^2+4)] \tilde{\mathbf{x}}(s) \\ & \quad + g_1(\sigma) l_f(s, 0, 1) [0 \mid -6] \tilde{\mathbf{x}}(s) \end{aligned}$$

よって、制御入力は

$$\begin{aligned} u(t) &= 6e^{3d}x_1(t) - 4x_2(t) - 6e^{3d}x_2(t-d) - x_2(t-2d) \\ & \quad - 6 \left\{ \int_{\tau} e^{-\tau} x_2(\tau+t) d\tau + e^d \int_{\tau} e^{-\tau} x_2(\tau+t-d) d\tau \right. \\ & \quad \left. + e^{2d} \int_{\tau} e^{-\tau} x_2(\tau+t-2d) d\tau \right\} \end{aligned}$$

となる。ただし、積分区間はすべて $[-d, 0]$ である。

6. あとがき

有限極配置のための制御入力を構成するアルゴリズムを与え、系がスペクトル可制御ならばそれが適用可能であることを示した。また、状態の未来値が予測可能であるための一つの十分条件と予測器を構成するアルゴリズムを与えた。

最後に、日頃よりご指導してくださる東京大学工学部北森俊行教授に感謝いたします。

参考文献

- 1) A. Z. Manitius and A. W. Olbrot: Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-24-4**, 541/553 (1979)
- 2) 渡部, 伊藤: 状態にむだ時間をもつ系の有限極配置問題, 計測自動制御学会論文集, **18-9**, 886/892 (1982)
- 3) 渡部, 金子, 伊藤: 入力状態にむだ時間が混在する系の有限極配置問題, 計測自動制御学会論文集, **19-6**, 445/450 (1983)
- 4) K. Watanabe, M. Ito and K. Kaneko: Finite Spectrum Assignment of Systems with Multiple Commensurate Delays in States and Control, Int. J. Control, **39-5**, 1073/1082 (1984)
- 5) K. Watanabe: Finite Spectrum Assignment and Observer for Multivariable Systems with Commensurate Delays, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-31-6**, 543/550 (1986)
- 6) 渡部: 状態にむだ時間を含むシステムの制御Ⅲ—関数解析的手法による設計法, システムと制御, **28-5**, 309/317 (1984)
- 7) 新, 北森: 状態にむだ時間を含む連続時間形式線形系への MRACS (第2報), 第24回制御理論シンポジウム資料, 151/154 (1985)
- 8) C. H. Anderson: The Linear Differential-Difference Equation with Constant Coefficients, J. Mathematical Analysis and Applications, **40**, 122/130 (1972)
- 9) 伊藤, 木村, 細江: 線形制御系の設計理論, 計測自動制御学会 (1980)
- 10) 山本: 状態にむだ時間を含むシステムの制御Ⅱ—代数的手法による設計法, システムと制御, **28-5**, 299/308 (1984)
- 11) M. W. Spong and T. J. Tarn: On the Spectral Controllability of Delay-Differential Equations, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-26-2**, 527/528 (1981)