ハミルトン行列が虚軸上の根を含む場合の リカッチ方程式の解の存在条件[†]

西 村 敏 充*

On the Existence of Solutions of Matrix Riccati Equation When Hamiltonian Matrix Has Roots on the Imaginary Axis

Toshimitsu NISHIMURA*

The conditions of existence of a unique, real, symmetric and non-negative definite solution of the matrix Riccati equation is derived when the Hamiltonian matrix composed of coefficient matrices of system equations has eigenvalues on the imaginary axis in the complex plane.

Such conditions are precisely determined based on the concept of the detectability and quasi-stabilizability.

The method established in this paper is useful in deriving stationary solutions of matrix Riccati equations when sinusoidal or constant signals are estimated by mean of Kalman filters.

Key Words: matrix Riccati equation, detectability, stabilizability, Hamiltonian matrix, Kalman filter

1. はじめに

次式で示される定係数マトリクス・リカッチ方程式は最適推定制御問題において中心的な役割を果たすことはよく知られている。

$$\dot{P}(t) = FP(t) + P(t)F^T - P(t)H^T HP(t) + GG^T \quad (1)$$

ここで $P(n \times n)$, $F(n \times n)$, $H(k \times n)$, $G(n \times q)$ 行列。この方程式の定常解 P は次式で与えられる。

$$FP + PF^T - PH^T HP + GG^T = 0 \quad (2)$$

この解を求めるにはハミルトン行列 $A(2n \times 2n)$ をつぎのように構成し、その Jordan 形固有値行列 $\Lambda(2n \times 2n)$ および固有ベクトル行列 $T(2n \times 2n)$ に分解

する。

$$A = \begin{bmatrix} F & GG^T \\ H^T H & -F^T \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$AT = TA \quad (4)$$

この Jordan 形固有値行列 Λ はハミルトン行列の性質から n 次の Jordan ブロック Λ_I および Λ_{II} および $(n \times n)$ ブロック Λ_{III} に分解され、対応して T 行列も分解する。

ここで $\text{diag } \Lambda_{II} = -\text{diag } \Lambda_I$ である。

$$A = \begin{bmatrix} \Lambda_I & \Lambda_{III} \\ 0 & \Lambda_{II} \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} Y & V \\ X & U \end{bmatrix} \quad (5)$$

このとき(2)式の解 P は次式で与えられる。

$$P = YX^{-1} \quad \text{if } |X| \neq 0 \quad (6)$$

Kalman は可観測、可制御であれば(2)式は唯一の正定解をもつことを証明した。その後 Wonham が可安定性、可検出性の概念を導入し¹⁾、この条件のもとで(2)式は唯一の半正定解をもち閉ループ系が漸近安定であることを導き、さらに後に Kucera は系 1~3 に示すようにそれが必要十分条件であることを証明した^{2),3)}。またこのとき、(5)式の Λ_I が $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ $i = 1, \dots, n$ となるように選び、それに対応する固有ベクトル $[Y^T, X^T]^T$ を用いて(6)式のごとく P を構成すれば P は半正定実対称解となることを示した。

この Kucera の論文は半正定実対称解を求めるためにはハミルトン行列 A が虚軸上に固有値をもたないことを大前提としており、そのこと自体は補題5にみるように可安定、可検出のもとでは A は虚根をもたないので系3にみるように上の Kucera の結論には影響しない。

しかし、実際には正弦波あるいは定数を観測する場合もあるわけで、このような事態には文献2)に述べ

[†] 第15回制御理論シンポジウムで発表(昭61・6)

* 宇宙科学研究所 東京都目黒区駒場 4-6-1

* Institute of Space and Astronautical Science, Meguro-ku, Tokyo

(Received June 7, 1986)

(Revised January 23, 1987)

られているように対処していない。これは A が虚軸上に根をもつ場合には必然的に重根となり (2) 式の固有値分解でも A_1 がしばしば Jordan 形となりまた一般化固有ベクトルを使わなければならないので解析が複雑となるためである。

本論文では、 A 行列が虚軸上に根をもつ場合に解析を拡張し、Kucera の定理をより一般化した形で結果を導入する。添字 $\sim$ は共役を、 $*$ は共役転置である。

2. 数学的準備

本文の主題の導入に必要な結果を主として文献 2) に基づきさらに新しい結果を入れて以下に補題および系の形で列記する。

2.1 ハミルトン行列の固有ベクトルの性質²⁾

まず文献 2) に基づいてハミルトン行列の固有ベクトルの基本的性質を述べる。

【補題 1】²⁾ λ_i が A の固有値で p_i 次の Jordan ブロックであり対応する固有ベクトル列を

$$\begin{pmatrix} y_i \\ x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i,1} \\ x_{i,1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} y_{i,p_i-1} \\ x_{i,p_i-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

とするとき、 $-\lambda_i$ は A の固有値で p_i 次の Jordan ブロックを構成し、対応する A^T の固有ベクトル列は

$$\begin{pmatrix} -x_i \\ y_i \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} -x_{i,1} \\ y_{i,1} \end{pmatrix} \cdots (-1)^{p_i-1} \begin{pmatrix} -x_{i,p_i-1} \\ y_{i,p_i-1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

である。

(7) 式の固有ベクトルは最初の一つを除いて一般化固有ベクトルで

$$(A - \lambda_i I) \eta_{i,j+1} = \eta_{i,j} \quad j=0, \dots, p_i-2 \quad (9)$$

によって求められる。以下では必要以外のときは簡単のため一般化固有ベクトルも含めて固有ベクトルと称することにする。また添数 i も除く。

【補題 2】²⁾ 1) ハミルトン行列 A の固有値 λ_i が p_i 次の Jordan ブロックで、固有ベクトルが (7) 式で与えられるとき、正規化された固有ベクトルはつぎのように選ぶことができる。

$$x_k^T y_l - y_k^T x_l = 0 \quad (10)$$

$$(x_k^T y_l - (y_k^T x_l) = \delta_{p_i-1-k,l} \quad 0 \leq k, l \leq p_i-1 \quad (11)$$

ここで $\begin{pmatrix} y_k \\ x_k \end{pmatrix}$ は $-\lambda_i$ に対する A の k 次の固有ベクトルである。また δ はクロネッカー・デルタである。

$$A \begin{pmatrix} y_l \\ x_l \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} y_l \\ x_l \end{pmatrix} \quad 0 \leq l \leq p_i-1 \quad (12)$$

$$A \begin{pmatrix} y_k \\ x_k \end{pmatrix} = -\lambda_i \begin{pmatrix} y_k \\ x_k \end{pmatrix} \quad 0 \leq k \leq p_i-1 \quad (13)$$

2) また他の λ_j なる p_j 次の Jordan ブロックの

固有値に対して $\begin{pmatrix} v_l \\ u_l \end{pmatrix}$ を対応する l 次の固有ベクトルとすると

$$x_k^T v_l - y_k^T u_l = 0 \quad (14)$$

$$0 \leq k \leq p_i-1, \quad 0 \leq l \leq p_j-1$$

となる。この補題 2 を以下直交定理という。

ここで 1) の場合、(10) 式は A の固有ベクトルが同じ λ_i の Jordan ブロックに属している場合で、 $(x_k^T, -y_k^T)$ と $(y_l^T, x_l^T)^T$ の内積が 0 となり直交している。(11) 式では λ_i および $-\lambda_i$ によって構成される Jordan ブロックに対応する A の固有ベクトルの間の関係を示すもので、固有ベクトルの次数によって直交するかしないかが決まる。

また 2) では λ_i のブロックと他の λ_j のブロックに対応する固有ベクトルの間の関係を示すもので一般には $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ である限り直交する。ここで注意すべきことは、たとえば $(x_k^T, -y_k^T)^T$ は A の固有ベクトルそのものではなく補題 1 を利用して求められる A^T の固有ベクトルである点である。この補題 2 は以下の証明で重要な役割を果たす。

2.2 可検出性、可安定性の拡張

つぎに Wonham の可検出性、可安定性を文献 2), 3) に従って一般化固有ベクトルにも拡張して定義する。

これは文献 3) には部分的に述べられている結果であるが本論文では可検出性、可安定性に分けてより明確に定義した必要な証明をつけ加える。

【定義 1】 F の固有値 λ は

$$(F - \lambda I) y_i = y_{i-1} \quad i=0, 1, \dots, p-1 \quad (15)$$

$$H y_i = 0 \quad y_{-1} = 0 \quad (16)$$

なる n 次元ベクトル $y_i \neq 0, i=0, \dots, p-1$ が存在するとき F の (p 位) 観測不能な固有値であるという。

また $\operatorname{Re} \lambda(F) \geq 0$ なる固有値がすべて観測可能であるとき (観測不能な固有値ではないとき)、マトリクス対 (H, F) は可検出であるという。

【定義 2】 F の固有値 λ は

$$(F^T - \lambda I) x_i = x_{i-1} \quad i=0, \dots, p-1 \quad (17)$$

$$G^T x_i = 0 \quad x_{-1} = 0 \quad (18)$$

なる n 次元ベクトル $x_i \neq 0, i=0, \dots, p-1$ が存在するとき F の (p 位) 制御不能な固有値であるという。

また $\operatorname{Re} \lambda(F) \geq 0$ なる固有値がすべて制御可能であるとき (制御不能な固有値ではないとき)、マトリクス対 (F, G) は可安定であるという。

つぎに上の定義を用い文献 2) に記されている A の固有ベクトルに関する特質を一般化する。

【補題 3】 λ が F の (p 位) の観測不能な固有値であるための必要十分条件は次式を満足する n 次元ベクトル $y_i \neq 0, i=0, \dots, p-1$ が存在することである。

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} y_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad i=0, \dots, p-1, y_{-1}=0 \quad (19)$$

(必要条件) 定義1の(15), (16)式と(3)式を用いて上式に代入すれば,

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} y_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F - \lambda I)y_i \\ H^T H y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$y_{-1}=0, \quad i=0, \dots, p-1 \quad \text{Q. E. D.}$$

(十分条件) $y_i \neq 0 \quad i=0, \dots, p-1$ について(19)式が成立するとき, 上式より明らかに定義1の(15), (16)式が導かれる. Q. E. D.

〔補題4〕 λ が F の (p 位) の制御不能な固有値であるための必要十分条件は, 次式を満足する n 次元ベクトル $x_i \neq 0 \quad i=0, \dots, p-1$ が存在することである.

$$(A + \lambda I) \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^i x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^{i-1} x_{i-1} \end{pmatrix} \quad i=0, \dots, p-1 \quad x_{-1}=0 \quad (21)$$

(必要条件) 定義2の(17), (18)式を上記の左辺に代入すれば

$$(A + \lambda I) \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^i x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^i G G^T x_i \\ -(-1)^i (F^T - \lambda I) x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^{i-1} x_{i-1} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$x_{-1}=0, \quad i=0, \dots, p-1 \quad \text{Q. E. D.}$$

(十分条件) $x_i \neq 0, \quad i=0, \dots, p-1$ について(21)式が成立すれば上式より明らかに定義2の(17), (18)式が導かれる. Q. E. D.

2.3 ハミルトン行列の虚軸上の根の性質の拡張

つぎに本論文の A の虚軸上の固有値に関する拡張に関して最も重要な補題(文献2)について述べ, 多重根に関する修正を行う.

〔補題5〕 A が虚軸上の固有値をもつための必要十分条件は F が虚軸上の固有値をもちそれが観測不能かつ/または制御不能であることである.

これは Kucera によって導かれたが λ が単根の場合はそのまま成立するがそれが多重根の場合は十分条件は成立するが必要条件はそのままでは成立しない.

〔補題5-1〕 補題5の A の虚軸上の固有値が $2q$ 個 ($q \leq n$) あるとき, A が虚軸上の根をもつための十分条件はそのまま成り立つが必要条件は少なくとも q 個についてのみ成立する.

(証明) 十分条件に関しては補題3, 4より明らかである. 必要条件に関しては, いま A が虚軸上に λ の p 次の Jordan ブロックをもちそれが補題5によって最初の1個は観測不能であったとする. このとき,

$$A \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = j\alpha \quad (22-1)$$

したがって1次の一般化固有ベクトルは

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22-2)$$

より求まる. これから

$$F y_1 + G G^T x_1 - y = j\alpha y_1 \quad (23)$$

$$H^T H y_1 - F^T x_1 = j\alpha x_1 \quad (24)$$

(23)式に左側から x_1^* を(24)式に y_1^* を掛けて加えれば

$$(y_1^* H^T H y_1 + x_1^* G G^T x_1) + (x_1^* F y_1 - (x_1^* F y_1)^*) - x_1^* y = j\alpha (x_1^* y_1 + (x_1^* y_1)^*) \quad (25)$$

上式の左辺第1項は実数であり第2項および右辺は虚数である. 他方直交定理(11)式より

$$x_1^* y = \delta_{p-1-i, j} \quad (26)$$

ここで $i=1, j=0$ であるが $p=2$ であれば上式は0とならず $p>2$ であれば0となる. $p>2$ の場合, 以下高次の一般化固有ベクトルについて同じプロセスを繰返すと $p-1-i=j, i=j+1$ となる手前まで上記の $x_{j+1}^* y_j$ の項は0となる. このとき(25)式により

$$y_{j+1}^* H^T H y_{j+1} + x_{j+1}^* G G^T x_{j+1} = 0 \quad (27)$$

これより

$$H y_{j+1} = 0 \quad (28)$$

また(15)式より

$$(F - \lambda I) y_{j+1} = y_j \quad 0 \leq j \leq \frac{p}{2} - 1 \quad (29)$$

したがって p が偶数であれば最初の λ を入れて $p/2$ 個の λ が F の観測不能な固有値となる. p が奇数であれば $x_{j+1}^* y_j$ の項は常に0となるので結局 p 個の λ がすべて F の観測不能な固有値となる.

λ が制御不能場合もまったく同様の証明を行うことができ, F の制御不能な固有値の数は p が偶数であれば $p/2$ 個, p が奇数であれば p 個となる. したがって, A が $2q$ 個の虚軸上の固有値をもち, その半分 $\lambda_i = j\alpha_i, \alpha_i > 0$ についてそれぞれ p_i 次の Jordan ブロックであるとする

$$q = \sum_i p_i \quad (30)$$

で, p_i が奇数であるか偶数であるかによって変わるが少なくとも $q/2$ 個は, また $-j\alpha_i$ も入れれば少なくとも q 個は補題5の必要条件を満足するので補題5-1を得る.

この間の事情はつぎの補題でさらに明らかとなる.

〔補題6-1〕 F の虚軸上の固有値 λ が p 次の Jordan ブロックで観測不能かつ制御可能とき, A は虚軸上に λ の $2p$ 次の Jordan ブロックの固有値をもつ. そのとき対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} y_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_i \\ u_i \end{pmatrix}$$

$$i=0, \dots, p-1 \quad i=p, \dots, 2p-1 \quad u_i \neq 0 \quad (31)$$

の形をもつ。ここで y_i は F の λ に対する固有ベクトルである。

また $\lambda^* = -\lambda$ も A の虚軸上の固有値でやはり $2p$ 次の Jordan ブロックとなり、対応する固有ベクトルは上記のベクトルの共役ベクトルである。

(証明) $\operatorname{Re} \lambda(F) = 0$ が F の観測不能な固有値であるから補題 5 より λ は A の虚軸上の固有値である。このとき補題 3 より対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} y_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad y_i \neq 0, \quad i=0, \dots, p-1$$

である。また $-\lambda$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{y}_i \neq 0 \quad i=0, \dots, p-1$$

である。直交定理 (11) 式において $p_i = p$, $\tilde{y}_i = y_k$, $k = p-1-i$, $y_i = y_i$, $i=l$, $x_k = x_i = 0$ とすれば、同式の左辺は 0 となるが右辺は $\delta_{i,i} = 1$ となり矛盾する。したがって $-\lambda$ の Jordan ブロックの中に (これを以下共役ブロックという) もう一連のベクトル列 $\begin{pmatrix} \tilde{v}_i \\ \tilde{u}_i \end{pmatrix}$ $i=p, \dots, 2p-1$ がなければならない。このとき (11) 式において

$$\begin{aligned} y_k &= \tilde{v}_i & x_k &= \tilde{u}_i & k &= 2p-1-i \\ y_i &= y_i & x_i &= 0 & l &= i \end{aligned}$$

とすれば同式は

$$u_{2p-1-i}^* y_i = \delta_{i,i} = 1$$

となり $y_i \neq 0$ であるから $\tilde{u}_{2p-1-i} \neq 0$ $i=p+1, \dots, 2p-1$ である限り上式は成立する。

また $-\lambda$ についても同様の証明が可能であり結局 λ および $-\lambda$ のそれぞれ $2p$ 次の Jordan ブロックをもち対応するベクトルは補題 6-1 に示す形をとる。

[補題 6-2] F の虚軸上の固有値 λ が p 次の Jordan ブロックで制御不能かつ観測可能なとき、 A は虚軸上に $-\lambda$ の $2p$ 次の Jordan ブロックをもつ。そのとき対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^i x_i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} z_i \\ w_i \end{pmatrix}$$

$$i=0, \dots, p-1 \quad i=p, \dots, 2p-1 \quad z_i \neq 0 \quad (32)$$

の形をもつ。 x_i は F^T の λ に対応する固有ベクトルである。また λ も A の虚軸上の固有値で $2p$ 次の Jordan ブロックとなり対応する固有ベクトルは上記のベクトルの共役ベクトルである。

この場合は補題 6-1 の場合とまったく同様に証明できる。

[補題 6-3] F の虚軸上の固有値 λ が p 次の Jordan ブロックで観測不能かつ制御不能のとき、 A は虚軸上に λ の 2 個の p 次の Jordan ブロックの固

有値をもつ。そのとき対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} y_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^i \tilde{x}_i \end{pmatrix} \quad i=0, \dots, p-1 \quad (33)$$

の形をもつ。 y_i , x_i はそれぞれ F および F^T の λ に対応する固有ベクトルである。また $-\lambda$ も A の虚軸上の固有値で 2 個の p 次の Jordan ブロックとなり、対応する固有ベクトルは上記のベクトルの共役ベクトルである。

(証明) λ は F の観測不能かつ制御不能な固有値であるから補題 3, 4 によって上記の形の A の固有ベクトル列をもつ。このとき直交定理 (11) 式において

$$\begin{aligned} y_k &= 0 & x_k &= (-1)^i \tilde{x}_i & k &= p-1-i \\ y_i &= y_i & x_i &= 0 & l &= i \end{aligned}$$

とすれば同式は

$$(-1)^i x_{p-1-i}^* y_i = \delta_{i,i} = 1$$

となり $y_i \neq 0$ $\tilde{x}_{p-1-i} \neq 0$ であるから同式は満足される。

また $-\lambda = \lambda^*$ についても同様の議論が可能である。

(Q. E. D.)

補題 6-1~3 において $\lambda=0$ のときは λ の部分のみ有効で $-\lambda$ の部分はなくなると考えればよい。

つぎに本論文の出発点である Kucera の定理を以下系 1~3 に記す。まずカルマンフィルタの閉ループ系を次式で定める。これは制御系 (レギュレータ) における閉ループ系に対応するものでカルマン・フィルタの式から明らかのように $\hat{x}$ を x の推定値 x^* とすればカルマン・ゲイン $K=PH^T$ でありこのゲインによるフィードバックが行われている。

$$\dot{\hat{x}} = C\hat{x} \quad (34)$$

$$C = F - PH^T H \quad (35)$$

[系 1] (2) 式がその閉ループ系が漸近安定であるような実対称半正定解をもつための必要十分条件は A が虚軸上に固有値をもたずかつマトリクス対 (H, F) が可検出であることである。

[系 2] マトリクス対 (H, F) 可検出でありかつ A が虚軸上の固有値をもたないとする。このとき (2) 式が唯一の実対称半正定解をもつための必要十分条件はマトリクス対 (F, G) が可安定であることである。

[系 3] (2) 式が唯一の実対称半正定解をもちかつその閉ループ系が漸近安定であるための必要十分条件は、マトリクス対 (H, F) が可検出で (F, G) が可安定であることである。

系 1, 2 にみるように Kucera の証明では A が虚軸上の固有値をもたないことが半正定実対称解を求めるための重要な前提条件になっている。結果的には系 3 では可検出性、可安定性から補題 5 によって A は

虚軸上の固有値をもたないので結論に影響はない。

しかし実際には F の虚軸上の固有値が可検出であるが可制御ではない、あるいは最適制御問題では可安定であるが可観測ではないといった場合も十分起こりうるわけで、この問題に Kucera の解は対処していない。これをこのような場合に拡張することが本論文の主題である。

3. 主要結果

【定義 3】 F の $\operatorname{Re} \lambda > 0$ なる固有値がすべて可観測であるとき、マトリクス対 $[H, F]$ は準可検出であるという。

【定義 4】 F の $\operatorname{Re} \lambda > 0$ なる固有値がすべて可制御であるとき、マトリクス対 $[F, G]$ は準可安定であるという。

定義 1, 2 にみるように従来の可検出性, 可安定性の定義は上記で $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ と等号を含んでいる点異なる。

系 1 にみるように可検出でないならば半正定解は存在しないが、 A が虚軸上の固有値をもつ場合は事情が異なり、観測不能かつ制御不能であれば半正定解の存在しうることが証明できる。しかし実際の問題ではこうした場合の解析はあまり意味がなく、また証明を複雑にするので以下の導入ではこれを除くことにする。

【C・I】 F の虚軸上の固有値は同時に観測不能かつ制御不能とならない。

以下の定理 1~3 ではすべてこの条件 C・I を仮定する。

【補題 7】 C・I が成立するとする。このときマトリクス対 (H, F) が可検出であるとする。いま A は虚軸上に固有値をもち、その数を $2q$ 個 ($q \leq n$) とすれば F は虚軸上に制御不能な固有値を q 個もつ。またそのとき A の対応する固有ベクトルはつぎの形をとる。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^i x_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^i \bar{x}_i \end{pmatrix} \quad i=0, \dots, q/2-1 \quad (36)$$

(証明) (H, F) が可検出であれば A の虚軸上の固有値はすべて観測可能であるから、補題 5-1 より少なくとも半分は制御不能となる。しかし C・I の条件および補題 6-2 より A の虚軸上の固有値はすべて偶数次の Jordan ブロックとなり、半分が制御不能となつて、対応する固有ベクトルは上記のように上半分が 0 の形をとる。

【補題 8】 実対称半正定解 P の構成法

マトリクス対 (H, F) が検出可能であるとする。 $\operatorname{Re} \lambda_i(A)=0$ なる λ_i が $2q$ 個あるとき、制御不能な q 個と他の $\operatorname{Re} \lambda_i(A)>0$, $i=q+1, \dots, n$ に対応する A の固有ベクトルを用いて (6) 式によって構成された P は

i) 実対称, ii) 半正定, iii) $\operatorname{Re} \lambda(C) \leq 0$

となる。

(証明) i) 実対称性 (H, F) が可検出であるから補題 7 によって $\operatorname{Re} \lambda_i(A)=0$ の $2q$ 個の固有値の内 q 個は制御不能であり対応する固有ベクトルは上半分が 0 である。

$$y_i=0 \quad \hat{y}_i=0 \quad i=1, \dots, q/2$$

ただし $\lambda_i=0$ が含まれる場合は $y_i=0$ のみであり q は奇数となりうるが、そのときは上式の $y_i=0$ のみを用いこれらを除けば残りは偶数である。いま

$$\Omega = X^* Y = [\omega_{k,l}] \quad 1 \leq k, l \leq n \quad (37)$$

この q 個の制御不能な固有値の間では $y_k=y_l=0$ で

$$\omega_{k,l} - \omega_{l,k}^* = x_k^* y_l - y_k^* x_l = 0 \quad 1 \leq k, l \leq q \quad (38)$$

また他の固有値との間、あるいは他の固有値相互間では $\lambda_k + \lambda_l^* \neq 0$ であるから Kucera²⁾ の Lemma 3 あるいは本文の直交定理によって上式はやはり 0 となる。そこで $\bar{\Omega}$ ひいては P はエルミートである。

つぎに $\bar{\Omega}$ を次式で定義すれば

$$\bar{\Omega} = [X^T \cdot Y] = [\bar{\omega}_{k,l}] \quad 1 \leq k, l \leq n \quad (38.1)$$

q 個の制御不能な固有値の間では $y_k=y_l=0$ であるから

$$\bar{\omega}_{k,l} - \bar{\omega}_{l,k} = x_k^T y_l - y_k^T x_l = 0 \quad 1 \leq k, l \leq q \quad (38.2)$$

となる。また他の固有値との間、または他の固有値相互間では $\lambda_k + \lambda_l \neq 0$ であるから直交定理によって上式はやはり 0 となる。そこで $\bar{\Omega}$ ひいては P は対称行列である。そこで P はエルミートかつ対称行列であるから P の実対称性は証明される。

ii) 半正定性 いま (5) 式において

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

A_1 は $\operatorname{Re} \lambda_i=0$ $i=1, \dots, q$ なる Jordan ブロックで、 A_2 は $\operatorname{Re} \lambda_i>0$ $i=q+1, \dots, n$ なる Jordan ブロックであるとする。また対応する A の固有ベクトルは

$$Y = [Y_1, Y_2], \quad X = [X_1, X_2] \quad (40)$$

$$\text{ここで } U(t) = \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} e^{-A_1 t} \quad (41)$$

とすれば

$$\frac{dU(t)}{dt} = -A U(t) \quad (42)$$

となる。ここで $(2n \times 2n)$ 行列 $\bar{V}$ をつぎのごとくすれば

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\Omega = X^* Y = U^*(0) \bar{V} U(0)$$

$$= - \int_0^\infty \frac{d}{dt} [U^*(t) \bar{V} U(t)] dt + U^*(t) \bar{V} U(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \quad (44)$$

ここで(42)式を用いれば

$$-\frac{d}{dt}(U^*(t)\bar{V}U(t))=U^*(t)MU(t) \quad (45)$$

$$M=A^T\bar{V}+\bar{V}A=\begin{bmatrix} H^TH & 0 \\ 0 & GG^T \end{bmatrix} \geq 0 \quad (46)$$

となるから(44)式の Ω の右辺の第1項は半正定である。また第2項については

$$\begin{aligned} U^*(t)\bar{V}U(t) &= e^{-\Lambda_1^*t} X^* Y e^{-\Lambda_1 t} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-\Lambda_1^*t} X_1^* Y_1 e^{-\Lambda_1 t} & e^{-\Lambda_1^*t} X_1^* Y_2 e^{-\Lambda_2 t} \\ e^{-\Lambda_2^*t} X_2^* Y_1 e^{-\Lambda_1 t} & e^{-\Lambda_2^*t} X_2^* Y_2 e^{-\Lambda_2 t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

ここで $t \rightarrow \infty$ とすると $\text{Re } \Lambda_1 = 0, \text{Re } \Lambda_2 > 0$ であるから

$$U^*(t)\bar{V}U(t) \rightarrow \begin{bmatrix} e^{-\Lambda_1^*t} X_1^* Y_1 e^{-\Lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad t \rightarrow \infty \quad (48)$$

他方 Λ_1 を構成する固有値はすべて F の制御不能な固有値であるから $Y_1 = 0$ であり、したがって Ω の右辺の第2項は0となる。そこで Ω の半正定性ひいては P の半正定性が証明された。

iii) $\text{Re } \lambda(C) \leq 0$ この半正定解 P を構成するには $\text{Re } \lambda_i(A) \geq 0 \quad i=1, \dots, n$ なる固有値が用いられている。(4), (5)式の Λ_i がこれらよりなる Jordan ブロックとすれば同式より

$$H^T H Y - F^T X = X \Lambda_i \quad (49)$$

これより

$$C = F - P H^T H = -X^{-T} \Lambda_i^T X^T \quad (50)$$

となるから $\text{Re } \lambda(C) \leq 0$ である。

この解の特徴は Kucera²⁾ の場合と比較して、実対称、半正定となることに変わりはないが、閉ループ系に関し、Kucera の場合は(系3)漸近安定となるのに反し、上式のように等号を含むので漸近安定ではない。ただし正根がないので発散はしないということである。

《定理1》(2)式においてその閉ループ系が $\text{Re } \lambda(C) \leq 0$ となるような実対称半正定解をもつための必要十分条件はマトリクス対 (H, F) が可検出であることである。

(証明) (必要条件) i) $\text{Re } \lambda(A) \neq 0$ のとき

このとき P を構成する A の固有ベクトルに対応する固有値は $\text{Re } \lambda(A) > 0$ となるので、補題8(iii)の証明より明らかなように $\text{Re } \lambda(C) < 0$ となる。いま (H, F) が可検出でないとするとき定義1より $\text{Re } \lambda(F) \geq 0$ について

$$Fy = \lambda y \quad Hy = 0 \quad (51)$$

となる $y \neq 0$ および λ が少なくとも1個は存在する。

$$Cy = (F - P H^T H)y = \lambda y \quad (52)$$

となるから $\text{Re } \lambda(C) \geq 0$ となり矛盾する。

ii) $\text{Re } \lambda(A) = 0$ なる λ のあるとき、

$\text{Re } \lambda(C) \leq 0$ となる P を構成するためには $\text{Re } \lambda(A) = 0$ となる固有値の半分が使われなければならない(補題8参照)。しかし (H, F) が可検出でないとするときこれらは補題5より観測不能な $\text{Re } \lambda(F) = 0$ に等しく、またこれは $C \cdot I$ から同時に制御不能ではありえない。いまこの $\text{Re } \lambda(F) = 0$ が p 次の Jordan ブロックであるとするとき補題6-1から対応する A の固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} y_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad i=0, \dots, p-1 \quad \begin{pmatrix} v_i \\ u_i \end{pmatrix} \quad i=p, \dots, 2p-1$$

である。このうち、前者は下半分が0であるため P の構成には使えないので後者が使われることになる。しかしこれは補題6-1より $2p$ 次の Jordan ブロックに属するため、たとえば、

$$A \begin{pmatrix} v_p \cdots v_{2p-1} \\ u_p \cdots u_{2p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{p-1} & v_p \cdots v_{2p-1} \\ 0 & u_p \cdots u_{2p-1} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda 1 & \\ & \ddots & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_p \begin{pmatrix} v_p \\ u_p \end{pmatrix} \quad p+1 \quad (53)$$

の形となって p 次の Jordan ブロックを用いて固有値分解をすることができない。したがって文献2)から明らかなようにリカッチ方程式(2)を満足しない。また他の A の虚軸上の固有値についても同様である。したがって (H, F) 可検出でないとするとき(2)式の半正定解 P は存在しないので矛盾となる。

(十分条件) いま (H, F) 可検出であって $P \geq 0$ 存在しないとするとき、これは(6)式において $|X| = 0$ となる場合である。このとき

$$Xb = 0 \quad (54)$$

となる $b \neq 0$ がある。 P のエルミート性から

$$X^* Y = Y^* X \quad (55)$$

であり、これより

$$X^* Y b = Y^* X b = 0 \quad (56)$$

また(3)~(5)式から

$$F Y + G G^T X = Y \Lambda_i \quad (57)$$

$$H^T H Y - F^T X = X \Lambda_i \quad (58)$$

であるから(58)式を用いて、

$$b^* Y^* H^T H Y b - b^* Y^* F^T X b = b^* Y^* X \Lambda_i b \quad (59)$$

そこで(54)~(56)式より

$$b^* Y^* H^T H Y b = 0 \quad (60)$$

したがって、

$$H Y b = 0 \quad (61)$$

さらに(54), (58)式と上式により

$$H^T H Y b - F^T X b = X \Lambda_i b = 0 \quad (62)$$

したがって $\Lambda_i b \in n(X): X$ の零空間

そこで

$$A_I \dot{b} = \mu \dot{b} \quad b \in n(X) \quad (63)$$

となる $\dot{b} \neq 0$ が少なくとも一つは存在する。またこのとき μ は A_I の固有値 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ のいずれか一つと一致する²⁾。したがって

$$\operatorname{Re} \mu \geq 0 \quad (64)$$

これを用いて (57) 式より

$$FY\dot{b} + GG^T X\dot{b} = Y A_I \dot{b} \quad (65)$$

(61), (63), (65) 式より

$$FY\dot{b} = \mu Y\dot{b} \quad \operatorname{Re} \mu \geq 0 \quad (66)$$

$$HY\dot{b} = 0 \quad (67)$$

この両式から (H, F) は検出不能となり可検出性の仮定と矛盾する。したがって $|X| \neq 0$ となり, (6) 式の P は補題8により $\operatorname{Re} \lambda(C) \leq 0$ なる実対称半正定解である。

また $\operatorname{Re} \lambda(A) = 0$ なる λ があるときは, 補題8にみるように F の制御不能な虚軸上の固有値が $P \geq 0$ の構成に用いられるので $\operatorname{Re} \lambda(C) \leq 0$ となる。

《定理2》マトリクス対 (H, F) が可検出であるとする。そのとき (2) 式が唯一の実対称半正定解 P をもつための必要十分条件は, マトリクス対 (F, G) が準可安定であることである。

(証明) (必要条件) 準可安定でないとすると定義4より少なくとも1個の $\operatorname{Re} \lambda(F) > 0$ なる λ が制御不能である。このとき文献2), 6)の手法によって矛盾となることが証明できる。

(十分条件) i) $\operatorname{Re} \lambda(A) \neq 0$ のとき

(F, G) が準可安定であるとき, (2) 式に $\bar{P} \neq P$ なるもう一つの $\bar{P} \geq 0$ なる解が存在したとする。 $\operatorname{Re} \lambda(A) > 0$ なる n 個の固有値はすべて P の構成に用いられているので, $\bar{P}$ には, $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$ に対応する A の固有ベクトルが用いられることとなる。そこで, 次式より

$$A \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$\eta(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \delta(t) \end{pmatrix} \quad (69)$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \lambda_1 \eta(t) = A\eta(t) \quad (70)$$

となる。いま,

$$W(t) = \frac{d}{dt} (\delta^*(t) \gamma(t)) \quad (71)$$

とすると, $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ であり, また $\bar{P} \geq 0$ であるから,

$$\int_0^\infty W(t) dt = -\delta^*(0) \gamma(0) = -x_1^* y_1 \leq 0 \quad (72)$$

となる。他方 (43) 式の $\bar{V}$ を用いれば,

$$\eta^*(t) \bar{V} \eta(t) = \delta^*(t) \gamma(t) \quad (73)$$

上式を (71) 式に代入し, (70) 式を用いれば,

$$\begin{aligned} W(t) &= \eta^*(t) (A^T \bar{V} + \bar{V} A) \eta(t) \\ &= \eta^*(t) M \eta(t) \geq 0 \end{aligned} \quad (74)$$

ここで M は (46) 式で与えられ $M \geq 0$ である。したがって

$$\int_0^\infty W(t) dt \geq 0 \quad (75)$$

(72) 式と (75) 式より,

$$W(t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (76)$$

ここで,

$$M = N^T N \quad N = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & G^T \end{bmatrix} \quad (77)$$

としてこれを (74) 式に代入し, (76) 式を用いれば,

$$\eta^*(t) N^T N \eta(t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (78)$$

したがって,

$$N \eta(t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (79)$$

さらに $t=0$ とすれば, (69) 式より

$$N \eta(0) = \begin{pmatrix} H y_1 \\ G^T x_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (80)$$

上式と (68) 式より

$$F y_1 = \lambda_1 y_1 \quad H y_1 = 0 \quad (81)$$

および,

$$F^T x_1 = -\lambda_1 x_1 \quad G^T x_1 = 0 \quad (82)$$

を得る。(81) 式において $y_1 \neq 0$ とすると, 定義1より λ_1 は F の観測不能な固有値となり, 対応する A の固有ベクトルは補題3より $\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるので, $\bar{P}$ の構成要素とはなりえない。また (82) 式において $x_1 \neq 0$ とすると定義2より $-\lambda_1$ は F の制御不能な固有値となる。

$\operatorname{Re}(-\lambda_1) > 0$ であるから, それが制御不能となれば (F, G) は準可安定でなくなり矛盾となる。

ii) $\operatorname{Re} \lambda(A) = 0$ なる λ があるとき

1) $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ に対応する A の固有ベクトルが $\bar{P}$ の構成に用いられていれば i) と同じで矛盾となる。

2) $\operatorname{Re} \lambda(A) = 0$ に対応する A の固有値が $\bar{P}$ の構成に用いられているとする。 (H, F) 可検出であるから C-I および補題7より, F は虚軸上に制御不能な固有値をもつ。今, それらが λ および $-\lambda$ のそれぞれ p 次の Jordan ブロックであるとする, 補題6-2から A は虚軸上に λ および $-\lambda$ のそれぞれ $2p$ 次の Jordan ブロックをもち, それらに対応する A の固有ベクトルはそれぞれ,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^i x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^i \bar{x}_i \end{pmatrix} \quad i=0, \dots, p-1, \\ &\begin{pmatrix} v_i \\ u_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{u}_i \end{pmatrix} \quad i=p, \dots, 2p-1 \end{aligned} \quad (83)$$

の形をとる。他方補題8より前者はすべて $P \geq 0$ の構成に用いられているから, $\bar{P}$ の構成には

a) 前者に加えて後者を部分的あるいは全部用いる。このとき(2)式のリカッチ方程式を満足する Jordan ブロックの構成は可能となる。しかし(38)式より、

$$\omega_{k,l} - \omega_{l,k}^* = x_k^* y_l - y_k^* x_l, \quad 0 \leq k, l \leq 2p-1 \quad (84)$$

において、直交定理(11)式を用い

$$y_k = \tilde{v}_i, \quad x_k = \tilde{u}_i, \quad k=2p-1-i$$

$$y_i = 0, \quad x_i = (-1)^i x_i, \quad l=i$$

とすれば、

$$\begin{aligned} \omega_{k,l} - \omega_{l,k}^* &= (-1)^{i-1} v_i^* x_i \\ &= \delta_{i,i} \neq 0 \end{aligned} \quad (85)$$

となり(37)式の $\Omega = X^* Y$ のエルミート性は失われ、したがって $\bar{P}$ はエルミート行列ではない。

また同様に対称性についても同様の証明が可能で、 $\bar{P}$ は対称行列ではなく結局 $\bar{P}$ は実対称ではなくなる。

b) $\bar{P}$ の構成に(83)式の前者の代わりに後者のみを用いる。このときは定理1の必要条件の証明にみるように、 p 次の Jordan ブロックを用いて固有値分解をすることができず、(2)式のリカッチ方程式を満足しない。

また A が別の固有値の Jordan ブロックをもつ場合にも以上と同様の議論が成り立つ。 Q. E. D.

以上の定理1, 2を用いて本論文の最終結論である定理3を導く。

《定理3》 (2)式が唯一の実対称半正解 P をもち、かつ閉ループ系において $\operatorname{Re} \lambda(C) \leq 0$ であるための必要十分条件は、マトリクス対 (H, F) が可検出であり、 (F, G) が準可安定であることである。

(証明) (必要条件) 定理1より、半正定解が存在し $\operatorname{Re} \lambda(C) \leq 0$ なることから (H, F) の可検出性が導かれる。つぎに定理2より可検出でありかつ唯一の半正定解が存在することから (F, G) の準可安定性が求められる。

(十分条件) 定理1より可検出であれば条件 C・I のもとでは実対称な半正定解が存在し $\operatorname{Re} \lambda(C) \leq 0$ となる。つぎに定理2より可検出でありかつ準可安定であればこのような半正定解は唯一であることが証明される。

4. おわりに

以上本論文ではまず従来 Kucera の論文などで扱われていなかったハミルトン行列 A が虚軸上に固有値をもつ場合の解析を行った。そしてそれがどのような条件のもとで起るかを定義1, 2で可検出性、可安定性を F が p 次の Jordan ブロックの固有値をもつ場合に拡張し、その定義を利用し解析して補題3~5

を導いた。その解析を利用してさらにその場合の A の固有ベクトルの形式を補題6, 7で規定した。

さらに定義3, 4で準可検出性、準可安定性の概念を導入し、補題3~8を利用して (H, F) が可検出であり (F, G) が準可安定であれば(2)式は唯一の半正定解をもちさらにそれが必要十分条件であることを示した。

この導出において $\operatorname{Re} \lambda(A) \neq 0$ のときは、定理1の十分条件の証明は Kucera²⁾ の証明とほぼ同様であるが、Kucera の場合は最適制御問題を取り扱っているのに対して、本論文では最適推定問題を扱っていることもあって、その証明を明示した。

こうして Kucera の結果を、 A が虚軸上の固有値をもつ場合に拡張したが、実際上システムの可検出性、可安定性が共に成立する場合はむしろ少なく、たとえば古典的な最小2乗法は(2)式において $F=0$, $G=0$ の場合に相当し、 A は虚軸上に固有値をもち可検出ではあるが、可安定ではない。

また、 F が振動的で虚軸上に固有値をもち、それが制御不能である場合、つまり正弦波信号を観測する場合は通信の問題はいうまでもなく身近によく遭遇するテーマであり、本論文の解析はこうした問題にそのまま適用可能で、実際上重要な意義をもつと考えられる。

本論文の手法はもちろん最適制御問題にも双対性を利用して適用することが可能である。

最後に、富士通(株)国際情報社会科学研究所、狩野氏の有益な助言に感謝の意を表する。

参考文献

- 1) W. M. Wonham: On a Matrix Riccati Equation of Stochastic Control, SIAM Journal on Control, 6-4, 681/698 (1968)
- 2) V. Kucera: A Contribution to Matrix Quadratic Equations, IEEE Trans. Automatic Control, AC-17-3, 334/347 (1972)
- 3) V. Kucera: On Nonnegative Definite Solutions to Matrix Quadratic Equations, Automatica, 8, 413/423 (1972)
- 4) 狩野, 西村: リカッチ代数方程式の一般解の存在条件と二, 三の考察, 第10回制御理論シンポジウム資料, 43/46 (1981)
- 5) T. Nishimura and H. Kano: Periodic Oscillations of Matrix Riccati Equations in Time-Invariant Systems, IEEE Trans. Automatic Control, AC-25-4, 749/755 (1980)
- 6) 西村, 狩野: 定系数マトリクス, リカッチ方程式における周期解の存在条件, 計測自動制御学会論文集, 16-6, 783/790 (1980)
- 7) 西村, 狩野: 虚軸上の根を含む場合のリカッチ方程式の解の存在条件, 第15回制御理論シンポジウム資料, 267/272 (1986)