多項式表現を用いた6リンク・マニピュレータの 逆問題計算法

佐々木 忍*

Inverse Kinematics Algorithm for a Six-Link Manipulator Using a Polynomial Expression

Shinobu SASAKI*

This report is concerned with the forward and inverse kinematics problem relevant to a six-link robot manipulator. In order to derive the kinematic relationships between links, the vector rotation operator was applied instead of the conventional homogeneous transformation.

The exact algorithm for solving the inverse problem was obtained by transforming kinematics equations into a polynomial. As shown in test calculations, the accuracies of numerical solutions obtained by means of the present approach are found to be quite high. The algorithm proposed permits to find out all feasible solutions for the given inverse problem.

Key Words: manipulator kinematics, inverse problem, Bairstow's method, six-link manipulator, vector formulation

1. はじめに

人間が行う手作業を代行する目的で開発されたマニピュレータは、複数個のリンクを連結し、一定の拘束条件のもとに運動を行う一種の空間リンク機構である。

リンク機構そのものの研究は、空間四節リンク機構の変位解析など古くから機構学が対象としてきた分野である。しかし、他端に手を取り付けたいわゆる直列開ループ連鎖機構としての特徴をもつ多関節形マニピュレータに対しては、その制御に重点が置かれている。

それを効果的に達成するうえでの基礎となる運動学

や動力学の解析は、Denavit-Hartenberg¹⁾以後発展してきたと思われる。

さて、マニピュレータの運動学は、二つの側面を提起する。ひとつは、リンク間の各関節を任意に動かした際、手先の位置・姿勢を作業空間内で決定するもので、リンクに設定した座標系の変換により実現される。いまひとつは、与えられた手先の位置・姿勢に対応する各関節変数の変位がいかにあるべきかを決定する逆問題である。前者(順問題)に比べて、関節解を解析的に求めることは一般に難しく、自由度が一つ増えるごとにその計算は飛躍的に複雑化する。そのうえ、マニピュレータの構造(関節の配置具合、機械的オフセットなど)も問題解決の難易を決定する鍵となる。

今日、この逆問題に対しては解法上の定石というものはなく、個々の事例に即して適宜幾何学的概念や直感を取り入れることが解決手段として有効な場合がある^{2),3)}。しかし、大部分は解析的求解が期待できないため、与えられた関節変数の近傍で線形化を行い、逆ヤコビ行列から各関節の変位を繰返し法で計算することが一般的とされている。この数値解法では、解の決定が初期値に依存しており、線形近似が十分に成り立つ範囲内で先端の軌道変位を与えることが必要である。また、逆ヤコビアンを求める際、行列式に特異点が発生すると解の決定が不可能となり、マニピュレータの制御に影響を及ぼす。最近では、この問題に特異値分解理論を適用してヤコビ行列の特性から評価する斬新な研究も始まり、さらに、冗長性をもった機構に一般化逆行列の理論を適用して、障害物回避の研究に役立てる機運も見られる⁴⁾。

本報では、Fig. 2で示す6関節形マニピュレータに

* 日本原子力研究所東海研究所 茨城県那珂郡東海村 白方白根 2-4

* Tokai Research Establishment, Japan Atomic Energy Research Institute, Naka-gun, Ibaraki (Received May 1, 1986)

(Revised December 4, 1986)

対して運動学方程式を導き、その逆問題を解く方法を提案する。マニピュレータの固定端から手先までの位置・姿勢は非線形連立方程式により表現され、超越関数を含む関係式を一挙に処理することは困難であるため、ここではこの関係式を整理して単一変数の代数方程式に統合化した。導かれた多項式を精確に解くことにより関節変数の実行可能解をすべて求めることができ、マニピュレータの腕姿勢の研究に多くの示唆が得られる。これは、線形化手法にない利点といえる。

以下、手先の運動学とその逆問題の解法手順を述べ、あわせて計算例を示す。

2. ロボット・マニピュレータの運動学方程式の決定

マニピュレータの各リンクに直交座標系を設け、回転（または並進）方向を定めると、手先の位置・姿勢は 4×4 同次変換行列（ A 行列）を順次掛け合せて求めることができる。この方法は、Denavit-Hartenberg により提案されたもので、ロボットの機構解析によく利用されているが^{1), 5)}、各リンクの座標系は一義的に決められるわけではなく解析者が適当に定める必要がある。そのうえ、座標系が各リンクの回転（移動）によって動くために、対象物の位置方向を見定めるうえで困難を伴う。各リンクの動きとともに座標系が動くというと考えたよりも、座標系を固定した上で各リンクの動きを観察するほうが理解しやすい。

ここでは、一つの固定直交座標系 $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ に対して、初期状態における各関節の回転（または並進）方向がこの座標軸のいずれかの方向と一致することを前提とする。各リンクの位置を Σ_0 における空間ベクトルで表現し、回転に伴う位置・姿勢の変化は、座標変換行列に相当する回転演算子で取り扱える^{6), 7)}。すなわち、座標系を固定し、リンクにそって定義した各ベクトルを回転させることで、関節間の関係式を導き出すことができる。

今、剛体リンクの位置ベクトル $\vec{V}$ をある軸（ベクトル $\vec{r}$ ）のまわりに反時計（正）方向へ角度 θ だけ回転して得られたベクトルを形式的につぎのように表現する。

$$\vec{V}' = \text{Rot}(\vec{r}, \theta) \vec{V}$$

ここで、 $\vec{V}, \vec{V}'$ は 3 次元列ベクトル、 $\text{Rot}(\vec{r}, \theta)$ は 3×3 行列からなる回転演算子である。

仮定により、多関節形マニピュレータの回転軸ベクトルは、 Σ_0 の座標軸にそった単位ベクトル $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ を取ることができる。その場合の回転に伴う演算子は、つぎのいずれかである。

Fig. 1 Kinematic relation of 2 link system

$$\text{Rot}(\vec{i}, \theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$\text{Rot}(\vec{j}, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$\text{Rot}(\vec{k}, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

さて、この回転ベクトルを適用して簡単な 2 リンク機構に対する運動学方程式を誘導してみる (Fig. 1 参照)。回転軸は、 $\vec{k}$ および $\vec{i}$ 軸である。先端部に近い関節から台座のほうへ、順次変位を与えてベクトル合成する。

まず、端点 B に近い関節を θ_2 旋回すると、ベクトル $\vec{AB}$ はつぎの線形変換により $\vec{AB}_1$ に変わる。

$$\vec{AB}_1 = \text{Rot}(\vec{i}, \theta_2) \vec{AB}$$

続いて、ベクトル $\vec{OA} + \vec{AB}_1 (= \vec{OB}_1)$ の $\vec{k}$ 軸に関する回転 (θ_1) は、

$$\begin{aligned} \vec{OB}_2 &= \text{Rot}(\vec{k}, \theta_1) \vec{OB}_1 \\ &= \vec{OA} + \text{Rot}(\vec{k}, \theta_1) \text{Rot}(\vec{i}, \theta_2) \vec{AB} \end{aligned}$$

と記述される。これより、 Σ_0 に関する先端部の空間的位置 $(x, y, z)^T$ は、次式で定まる (T は転置記号)。

$$(x, y, z)^T = (a_2 s_1 s_2, -a_2 c_1 s_2, a_1 + a_2 c_2)^T$$

また、先端の姿勢は、回転演算子の積 $\text{Rot}(\vec{k}, \theta_1) \text{Rot}(\vec{i}, \theta_2)$ で与えられる。

上に示した考え方を、6 リンクのマニピュレータ (Fig. 2) に拡張して運動学方程式を導き出すと、手先の位置ベクトル $\vec{OP} = (P_x, P_y, P_z)^T$ はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OA} + \text{Rot}(\vec{k}, \theta_1) \text{Rot}(\vec{i}, \theta_2) \vec{AB} \\ &\quad + \text{Rot}(\vec{k}, \theta_1) \text{Rot}(\vec{i}, \theta_2 + \theta_3) \vec{BC} \\ &\quad + \text{Rot}(\vec{k}, \theta_1) \text{Rot}(\vec{i}, \theta_2 + \theta_3) \vec{CD} \\ &\quad + \text{Rot}(\vec{k}, \theta_1) \text{Rot}(\vec{i}, \theta_2 + \theta_3) \vec{DE} \\ &\quad + \text{Rot}(\vec{k}, \theta_1) \text{Rot}(\vec{i}, \theta_2 + \theta_3) \\ &\quad \text{Rot}(\vec{k}, \theta_4) \text{Rot}(\vec{i}, \theta_5) \text{Rot}(\vec{j}, \theta_6) \vec{EF} \quad (1) \end{aligned}$$

また、手先の方角は、

$$\text{Rot}(\vec{k}, \theta_1) \text{Rot}(\vec{i}, \theta_2 + \theta_3) \text{Rot}(\vec{k}, \theta_4)$$

Fig. 2 Schematic of a manipulator studied

$\text{Rot}(\vec{i}, \theta_5) \text{Rot}(\vec{j}, \theta_6)$

で与えられる。

この 3×3 行列成分を

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

と記述する。

3. 非線形代数方程式と関節角の決定

運動学方程式(1), (2)において, 位置および方位 (すなわち, P_x, P_y, P_z と方向余弦) を指定した後の関係式を代数的処理で一変数の多項式に変換し, その根から関節角を決定する一連の手順について述べる。最初に両式の成分を書き出すと,

$$n_x = c_6(c_1c_4 - s_1s_4c_{23}) - s_6(c_1s_4s_5 + s_1s_5c_4c_{23} + s_1s_{23}c_5) \quad (3)$$

$$n_y = c_6(s_1c_4 + c_1c_{23}s_4) - s_6(s_1s_4s_5 - c_1c_4c_{23}s_5 - c_1c_5s_{23}) \quad (4)$$

$$n_z = s_4s_{23}c_6 + s_6(c_4s_5s_{23} - c_5c_{23}) \quad (5)$$

$$o_x = -c_1c_5s_4 - s_1c_4c_5c_{23} + s_1s_5s_{23} \quad (6)$$

$$o_y = -s_1s_4c_5 + c_1c_4c_5c_{23} - c_1s_5s_{23} \quad (7)$$

$$o_z = c_4c_5s_{23} + s_5c_{23} \quad (8)$$

$$a_x = c_6(c_1s_4s_5 + s_1s_5c_4c_{23} + s_1s_{23}c_5) + s_6(c_1c_4 - s_1s_4c_{23}) \quad (9)$$

$$a_y = c_6(s_1s_4s_5 - c_1c_4c_{23}s_5 - c_1c_5s_{23}) + s_6(s_1c_4 + s_4c_1c_{23}) \quad (10)$$

$$a_z = c_6(-c_4s_5s_{23} + c_5c_{23}) + s_6(s_4s_{23}) \quad (11)$$

$$P_x = a_6c_6(c_1s_4s_5 + s_1s_5c_4c_{23} + s_1s_{23}c_5)$$

$$+ a_6s_6(c_1c_4 - s_1s_4c_{23}) + a_6(s_1s_{23}c_5 + c_1s_4s_5 + s_1s_5c_4c_{23}) + (a_3 + a_4)s_1s_{23} + a_2s_1s_2 \quad (12)$$

$$P_y = a_6c_6(s_1s_4s_5 - c_1c_4c_{23}s_5 - c_1c_5s_{23}) + a_6s_6(s_1c_4 + c_1c_{23}s_4) + a_6(-c_1c_5s_{23} + s_1s_4s_5 - c_1c_4c_{23}s_5) - (a_3 + a_4)c_1s_{23} - a_2c_1s_2 \quad (13)$$

$$P_z = a_6c_6(c_5c_{23} - c_4s_5s_{23}) + a_6(s_4s_{23})s_6 + a_6(c_5c_{23} - c_4s_5s_{23}) + (a_3 + a_4)c_{23} + a_2c_2 + a_1 \quad (14)$$

ただし, $s_i = \sin \theta_i$, $c_i = \cos \theta_i$,

$$s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j), \quad c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$$

さて, 手先に最も近い軸の三角関数 c_6, s_6 について整理した(3)~(11)式の内, ベクトル $o = (o_x, o_y, o_z)^T$ は他の直交ベクトルの積で表現されることから, (6)~(8)を除いた式に含まれる係数を変数 θ_6 で表現する。

$$A \triangleq c_1s_4s_5 + s_1s_5c_4c_{23} + s_1s_{23}c_5 = a_xc_6 - n_xs_6 \quad (15)$$

$$B \triangleq c_1c_4 - s_1s_4c_{23} = n_xc_6 + a_xs_6 \quad (16)$$

$$C \triangleq s_1s_4s_5 - c_1c_4c_{23}s_5 - c_1c_5s_{23} = a_yc_6 - n_ys_6 \quad (17)$$

$$D \triangleq s_1c_4 + c_1c_{23}s_4 = n_yc_6 + a_ys_6 \quad (18)$$

$$E \triangleq c_5c_{23} - c_4s_5s_{23} = a_zc_6 - n_zs_6 \quad (19)$$

$$F \triangleq s_4s_{23} = n_zc_6 + a_zs_6 \quad (20)$$

$$a_3 + a_4 = a_{34} \quad (21)$$

このとき, マニピュレータの位置座標 P_x, P_y, P_z は, 上の A, B, C などを用いてつぎのように簡略化される。

$$P_x = a_6c_6A + a_6s_6B + a_5A + a_{34}s_1s_{23} + a_2s_1s_2 \quad (22)$$

$$P_y = a_6c_6C + a_6s_6D + a_5C - a_{34}c_1s_{23} - a_2c_1s_2 \quad (23)$$

$$P_z = a_6c_6E + a_6s_6F + a_5E + a_{34}c_{23} + a_2c_2 + a_1 \quad (24)$$

ところで, (22)~(24) 式を θ_{23}, θ_2 でまとめたものは,

$$\left. \begin{aligned} \eta - a_{34}s_{23} &= a_2s_2 \\ \phi + a_{34}c_{23} &= -a_2c_2 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

と書け, さらに, この 2 式から θ_2 を消去すると,

$$\phi^2 + \eta^2 - a^2 = -2a_{34}(\phi c_{23} - \eta s_{23}) \quad (26)$$

となる。ただし,

$$\left. \begin{aligned} a &= a_2^2 - a_{34}^2, \\ \eta &= a_5c_6\{a_7c_1 - a_xs_1 + (s_1n_x - n_yc_1)\tan\theta_6\} \\ &\quad + P_xs_1 - P_yc_1 - a_6(a_xs_1 - a_yc_1), \\ \phi &= a_5c_6(a_z - n_z\tan\theta_6) - ZZ, \\ ZZ &= P_z - a_6a_z - a_1 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここで, 未知変数 $\eta, \phi, \tan \theta_{23}$ などを $t = \tan \theta_6/2$ の有理関数で表現した後, (26)式に代入して最終的につぎのような代数方程式を得る (付録参照)。

$$f(t) = \sum_{i=0}^{24} R_i t^i = 0 \quad (28)$$

以上, (1), (2) から出発した運動学の基本的な関係式は, $\tan(\theta_6/2)=t$ を介して, t を独立変数とする(28)式で置き換えられた。しかし, これまでの式の展開は, 置き換えと両辺2乗操作を行っているため, 結果的に24次の多項式となった。したがって, 必然的に不要根が方程式の中に含まれることになり, 求めたい根の吟味が必要不可欠である。

まず, 求根法としては, 高次多項式 $f(t)$ をつぎつぎと2次式で割りすべての根を求める Bairstow 法を利用した。その場合, 多項式の各係数については, その絶対値が大きく変動することから, 計算上のあふれを回避するために係数の桁数を平均化するスケールン操作が必要である。この処理の後, 各段階で2次方程式を桁落ちをしないよう十分精度よく解くことで, 誤差の蓄積を低くおさえることができる。この操作により逐次共役複素根を求める。

つぎに, これらの根の中から実軸上に分布するものをつきとめ, さらに, θ_6 に関する制約条件と照らし合せて, 実現可能解を探索する。通常の場合多項式の根はほとんど複素根(非常に小さいが虚数部分の値が出てくる)となるが, 実軸上に十分近い複素根は, 数値計算誤差内での実数根と見なして処理する。 t の値が決定すると, 各関節の回転角はつぎのように定式化できる。

(i) θ_6 の計算

代数方程式の実根から, 容易に

$$\theta_6 = 2 \tan^{-1} t \quad (29)$$

と決定される。

(ii) θ_1 の計算

(35)式の t の値を使って,

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{X_n + 2a_5 n_x t + X_p t^2}{Y_n - 2a_5 n_y t + Y_p t^2} \right) \quad (30)$$

と直ちに計算される。

(iii) θ_{23} の計算

(26)式から,

$$\begin{aligned} \theta_{23} = \tan^{-1} \left(\frac{\pm(U^2 - a)/(2a_{34}U)}{\sqrt{1 - \{(U^2 - a)/(2a_{34}U)\}^2}} \right) \\ + \tan^{-1} \left(\frac{\varphi}{\eta} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

を得る(ただし, $U = \sqrt{\varphi^2 + \eta^2}$)。

(iv) θ_4 の計算

(16), (18)式に立ち戻って,

$$c_4 = Bc_1 + Ds_1$$

$$s_4 = (-Bs_1 + Dc_1)/c_{23} \quad (c_{23} \neq 0)$$

$$= F/s_{23} \quad (c_{23} = 0)$$

が導かれる。 B, D, F は, θ_6 で定まるから,

$$\theta_4 = \tan^{-1} \left(\frac{s_4}{c_4} \right) \quad (32)$$

となる。

(v) θ_5 の計算

(15), (17)式より,

$$Ac_1 + Cs_1 = s_4 s_5$$

$$As_1 - Cc_1 = c_5 s_{23} + s_5 c_4 c_{23}$$

$$s_5 = (Ac_1 + Cs_1)/s_4 \quad (s_4 \neq 0)$$

を得る。 $s_4 = 0$ ならば, 上の2番目の式と(19)式から,

$$s_5 = \{c_{23}(As_1 - Cc_1) - Es_{23}\}/c_4$$

を得る。

一方, $c_5 = (As_1 - Cc_1)s_{23} + Es_{23}$ より

$$\theta_5 = \tan^{-1} \left(\frac{s_5}{c_5} \right) \quad (33)$$

が決まる。

(vi) θ_2 の計算

(25)式の2式から, θ_2 が決定する。

(vii) θ_3 の計算

$$\theta_3 = \theta_{23} - \theta_2 \quad (34)$$

以上で関節座標を(i)~(vii)の順序で決定したが, 許容範囲内に存在する基本解と, 可能ならばその周期解から, 関節解に対するすべての組合せを考える。残る問題は, そうした解の信頼性である。求めた関節解を正変換して, マニピュレータ手先位置・姿勢の再現性を調べる。つまり逆問題を解く上で与えたすべての方向余弦と位置データ計12個について, 入力データとその計算値相互間で比較を行い, 指定した ε に対して

$$|\text{入力データ} - \text{計算値}| < \varepsilon (\varepsilon \approx 10^{-6} \sim 10^{-8})$$

がすべて満足されれば目標値に十分近い解と見なす。

4. 数値計算例

前章の手法を適用した計算の一例として, マニピュレータを作業空間内A点からB点まで水平方向20cm, 手先の方位を一定にした状態で移動させた場合について述べる(Fig. 3 参照)。

この目標軌道 $\overline{AB}$ の近似として, 両端のデータを基

Fig. 3 Schematic of manipulator motion

Fig. 4 Example of solutions for articulated variables

に直線内挿で区間内の位置方向を定め、対応する関節変位を計算する。得られた各関節の回転角をプロットしたものが、Fig. 4である。計算値は、マニピュレータのホーム・ポジション ($\theta_i=0$) からの変位として描かれている。この例では、6種類の解が抽出されたが、区間 $\overline{AB}$ 全域に適合する完全な解曲線として2種類 G_1, G_6 があげられる。他の $G_2 \sim G_5$ は、局所的に存在した部分解といえる。これらは、 θ_1 の基本解(G_1)に対する周期解として出現した。 θ_1 の図で、 G_3, G_4 は、連続した一つの解曲線のように見えるが、 θ_4 のグラフを調べると第4関節の制約条件(回転角の上限と下限)に引っ掛かり、区間 $\overline{AB}$ の一部で解を与えていない。数学的には G_3 と G_4 を一つのつながった解として採用できるが、ロボットの姿勢実現の立場からは許容されない。

一方、別の実根から出てきた G_6 に対して、各関節解は、一意的に決定された。計算はすべて倍精度で処理し、位置・姿勢の計算値と目標値が、有効数字7桁以上の十分高い精度で一致していることを確認した。

ここで、本逆問題解法の計算誤差を吟味するためつぎのような手順で誤差の評価を行った。はじめに、6個の関節角を任意に選び、運動学方程式に代入してマ

ニピュレータ手先位置・姿勢を計算する。得られた位置・姿勢を用いて、各関節角を求め、最初のデータと比較して計算誤差の大きさを知る。Table 1は、この解析結果の一例であるが、他の調べた例においてもほぼ同程度の計算誤差であった。その結果から、本法による計算精度は十分高いことがいえる。

5. おわりに

マニピュレータの作業空間から関節座標空間への写像問題に対して、運動学の関係式を単一の代数方程式に置き換え、その実根から各関節変数を計算するアルゴリズムを述べた。通常よく利用される線形化手法に比べ、本法は制約条件内のあらゆる可能な解を十分高い精度で算出しうることを計算例で示した。

最後に、日頃からご指導いただく日本原子力研究所 篠原慶邦原子炉制御研究室長に心から謝意を表します。

参考文献

- 1) J. Denavit and R.S. Hartenberg: A Kinematic Notation for Low-Pair Mechanisms Based on Matrices, J. Appl. Mechanics, **22**, 215/221 (1955)
- 2) 岡本憲治: 多関節マニピュレータの制御入力決定アルゴリズム, 電総研集報, **35-3**, 213/221 (1971)
- 3) C. S. G. Lee: A Geometric Approach in Solving the Inverse Kinematics of PUMA Robots, 13th ISIR, 16-1/16-18, Chicago (1983)
- 4) 内山 勝: ロボットアームの機構とその解析, 計測と制御, **25-1**, 7/14 (1986)
- 5) R. C. Paul: Robot Manipulators-Mathematics, Programming and Control, MIT Press (1981)
- 6) H. Goldstein: 古典力学 (野間, ほか訳), 吉岡書店, (1960)
- 7) 高瀬国克: マニピュレータの基礎理論—機構学と運動学へのベクトル的アプローチ—, 日本ロボット学会誌, **1-2** および **1-3**, 51/58, 217/223 (1983)

《付 録》

運動学方程式から多項式を導き出す過程の概要を記述する。

まず、(22), (23)式の P_x, P_y から $\tan \theta_1$ を θ_6 で陽に表現すると、

$$\tan \theta_1 = \frac{s_1}{c_1} = \frac{P_x - a_6 a_x - a_5 A}{a_6 a_y + a_5 C - P_y} = \frac{X_n + 2a_5 n_x t + X_p t^2}{Y_n - 2a_5 n_y t + Y_p t^2} \quad (\text{A.1})$$

となる。ただし、 $\tan (\theta_6/2) = t$,

$$\left. \begin{aligned} X_p &= (a_5 - a_6) a_x + P_x, & X_n &= -(a_5 + a_6) a_x + P_x \\ Y_p &= -(a_5 - a_6) a_y - P_y, & Y_n &= (a_5 + a_6) a_y - P_y \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

Table 1 Comparison between given values and inverse solutions

Values	Given values	Inverse solutions
Joint angles		
θ_1 (deg)	10.000000000000000	10.0000000000000389
θ_2 (deg)	0.000000000000000	-0.0000000000001270
θ_3 (deg)	80.000000000000000	80.0000000000000924
θ_4 (deg)	20.000000000000000	19.999999999999005
θ_5 (deg)	-70.000000000000000	-70.0000000000002203
θ_6 (deg)	-10.000000000000000	-10.0000000000000477

つぎに, η, ϕ などを t の有理関数として整理する.

$$\eta = \frac{c_1}{(1+t^2)(Y_n - 2a_5 n_y t + Y_p t^2)} \sum_{i=0}^4 v_i t^i \quad (\text{A.3})$$

$$\phi = \frac{1}{(1+t^2)} \sum_{i=0}^2 d_i t^i \quad (\text{A.4})$$

ただし,

$$d_0 = a_5(a_z - ZZ), \quad d_1 = -2a_5 n_z, \quad d_2 = -a_5 a_z - ZZ$$

係数 v_i については, 紙面の都合で省略する.

これらの式を(26)の左辺に代入・整理したものが, (A.5)式である.

$$\phi^2 + \eta^2 - a = \frac{1}{(1+t^2)^2} \sum_{i=0}^4 f_i t^i \quad (\text{A.5})$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^8 J_i t^i &= \left(\sum_{i=0}^4 v_i t^i \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^2 d_i t^i \right)^2 \left(\sum_{i=0}^4 f_i t^i \right) \\ &\quad - a(1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 f_i t^i, \\ \sum_{i=0}^4 f_i t^i &= (X_n + 2a_5 n_x t + X_p t^2)^2 \\ &\quad + (Y_n - 2a_5 n_y t + Y_p t^2)^2 \end{aligned} \right\}$$

一方, (26)式の右辺については, $\tan \theta_{23} = k$ と置いて両辺を2乗しておく. k の記述は, (16), (18), (20)式より $s_4 c_{23}$ と $s_4 s_{23}$ を利用してつぎのように決まる.

$$\begin{aligned} k &= \frac{(a_z s_6 + n_z c_6)}{(-a_x s_1 + a_y c_1) s_6 + (n_y c_1 - n_x s_1) c_6} \\ &= \frac{(n_z + 2a_z t - n_z t^2)(Y_n - 2a_5 n_y t + Y_p t^2)}{c_1 \left(\sum_{i=0}^4 l_i t^i \right)} \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

ここで, $l_0 = n_y Y_n - n_x X_n$, $l_1 = -2a_5(n_x^2 + n_y^2) + 2(a_y Y_n - a_x X_n)$, $l_2 = n_y Y_p - n_x X_p + n_x X_n - n_y Y_n - 4a_5(a_x n_x + a_y n_y)$, $l_3 = 2a_5(n_x^2 + n_y^2) + 2(a_y Y_p - a_x X_p)$, $l_4 = n_x X_p - n_y Y_p$

これより c_{23}^2 , $\phi - k\eta$ は, つぎのように表現できる.

$$c_{23}^2 = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta_{23}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\left(\sum_{i=0}^4 l_i t^i \right)^2}{\left(\sum_{i=0}^4 l_i t^i \right)^2 + (n_z + 2a_z t - n_z t^2)^2 \left(\sum_{i=0}^4 f_i t^i \right)} \\ &\triangleq \frac{\sum_{i=0}^8 l_{2i} t^i}{\sum_{i=0}^8 L_i t^i} \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

$$\phi - k\eta = \frac{\sum_{i=0}^6 u_i t^i}{(1+t^2) \left(\sum_{i=0}^4 l_i t^i \right)} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } \sum_{i=0}^6 u_i t^i &= \left(\sum_{i=0}^2 d_i t^i \right) \left(\sum_{i=0}^4 l_i t^i \right) - \left(\sum_{i=0}^4 v_i t^i \right) (n_z + \\ &\quad 2a_z t - n_z t^2) \end{aligned}$$

したがって, (A.8)式から(26)式の右辺を2乗したものは,

$$\begin{aligned} &4a_{34}^2 \left(\sum_{i=0}^8 l_{2i} t^i \right) \cdot \frac{\left(\sum_{i=0}^6 u_i t^i \right)^2}{\sum_{i=0}^8 L_i t^i (1+t^2)^2 \left(\sum_{i=0}^4 l_i t^i \right)} \\ &\triangleq \frac{\left(\sum_{i=0}^{12} m_i t^i \right)}{\left(\sum_{i=0}^8 L_i t^i \right) (1+t^2)^2} \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

となり, (A.5)式に基づいてつぎのようにも表現される.

$$\frac{\left(\sum_{i=0}^8 J_i t^i \right)^2}{(1+t^2)^4 \left(\sum_{i=0}^4 f_i t^i \right)^2} \triangleq \frac{\left[\left(\sum_{i=0}^{16} N_i t^i \right) \right]}{\left(\sum_{i=0}^{12} w_i t^i \right) (1+t^2)^2} \quad (\text{A.10})$$

最後に, (A.9), (A.10)両式の分母を払って,

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=0}^{12} m_i t^i \right) \left(\sum_{i=0}^{12} w_i t^i \right) \triangleq \sum_{i=0}^{24} P_i t^i \\ &\left(\sum_{i=0}^8 L_i t^i \right) \left(\sum_{i=0}^{16} N_i t^i \right) \triangleq \sum_{i=0}^{24} Q_i t^i \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

と定義すると, ここに最終的な式が導き出せる.

$$\sum_{i=0}^{24} (P_i - Q_i) t^i = f(t) = 0 \quad (\text{A.12})$$