状態にむだ時間を含むシステムにおける折り返し法[†]

——状態フィードバック則の一構成法——

示 村 悦二郎*・内 田 健 康*・久 保 智 裕*

Turn Over Method for Systems with Delays in States

—A Method to Construct State Feedback Law—

Etsujiro SHIMEMURA*, Kenko UCHIDA* and Tomohiro KUBO*

A design method to construct a linear state feedback law for systems with delays in states is proposed; the feedback gain is given from the maximum solution to a Riccati equation for systems with delays. The proposed method has the following features: (i) Poles of the resulting closed loop system are a priori calculated from the open loop poles and the "turn over" line which is a scalar design parameter, so that we can choose the parameter to locate poles on desired points which guarantee desired degree of exponential stability. (ii) The closed loop system is a linear quadratic regulator for a certain criterion, so that it satisfies the circle condition and thus has a good robustness property.

Key Words: system with time delay, linear quadratic regulator, pole allocation, state feedback, control system design

1. はじめに

現代制御理論にもとづくレギュレータの構成法の代表的なものとしては最適レギュレータを用いる方法と極配置による方法の二つが知られている。最適レギュレータを用いる方法は、得られた閉ループ系が円条件を満足し大きな安定余有をもつという性質をもっているので大変魅力的であるが、その設計パラメータである重み行列を決定するための指針が必ずしも明確ではないという問題がある。他方、極配置による方法は、設計パラメータにあたる閉ループ系の極の位置と応答

特性との関係が比較的はっきりしているという長所をもっているが、最適レギュレータのもつ好ましい性質は保証されない。そこでもしも、閉ループ系の極を望ましい位置に配置し、しかも得られた閉ループ系が最適レギュレータとなるようなフィードバック則を構成する方法があれば、それは両者の長所を合せもった優れた設計法になると考えられる。このような考え方にもとづく設計法は主として有限次元系を対象として研究されてきたが^{1)~3)}、最近むだ時間を含む系に対する最適レギュレータも有限次元系の場合と同様の好ましい性質をもつことが明らかとなり^{4)~6)}、むだ時間を含む系に対しても極を指定した領域内に配置する最適レギュレータの構成法^{7),8)}や、指定した極のみを移動する最適レギュレータの構成法^{5),8)}が考えられてきている。

本稿では、有限次元系に対するこのような設計法の一つとして知られている折り返し法^{1),3)}を、状態にむだ時間を含む系に対する設計法として展開する。得られた構成法は、有限次元系の場合と同様にスカラー設計パラメータである折り返し線の位置と制御対象のもつ極の位置とからただちに閉ループ系の極の位置を知ることができるという特長をもっている。

折り返し法の理論を展開する上では、リカッチ方程式の最大解の性質がきわめて重要な役割をはたす。この性質は有限次元の場合には B. P. Molinari により詳しく検討されているが^{9),10)}、むだ時間を含む系に対するリカッチ方程式についてはその最大解を扱った研究は見あたらない。そこで本稿ではまずむだ時間を含む系に対するリカッチ方程式の最大解を定義し、それが有限次元リカッチ方程式の最大解を用いて構成できること、およびそれを用いて得られた閉ループ系の極が複素閉左半平面内に配置されることを示す。つ

[†] 第 15 回制御理論シンポジウムで発表 (昭 61・6)

* 早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1

* School of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo

(Received October 9, 1986)

(Revised January 20, 1987)

Fig. 1 Turn over method

ぎにそれらの結果を受けてフィードバック則の構成法を示し、最後に数値例を示す。

2. 問題の記述

つぎのような状態にむだ時間を含む制御対象を考える。

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \int_{-h}^0 D(\beta) x(t+\beta) d\beta + Bu(t) \quad (1a)$$

$$x(\tau) = x_0(\tau), \quad \tau \in [-h, 0] \quad (1b)$$

ここで $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $A_0 \in R^{n \times n}$, $A_1 \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ であり, $D(\beta)$ は区間 $[-h, 0]$ 上で定義された連続な $R^{n \times n}$ 値関数, むだ時間 h は正の実数であるとする。また, $x_0(\tau)$ は連続な初期関数である。本稿では, 複素平面上に虚軸と平行な折り返し線 $\text{Re}(s) = -k$ を定め, 系(1)のもつ極のうち

a) 折り返し線より左側にあるものはそのままの位置に

b) 折り返し線より右側にあるものは折り返し線を対称軸として左側に折り返した位置に

配置し(Fig. 1), しかも閉ループ系が最適レギュレータとなるような状態フィードバック則を求める問題を考える。ただし折り返し線の位置を定める設計パラメータ k は, 以下の条件を満たすように選ぶものとする。

(条件 1) 系(1)の特性方程式

$$\det [A(s)] = 0 \quad (2)$$

$$A(s) \triangleq sI - A_0 - e^{-sh} A_1 - \int_{-h}^0 e^{s\beta} D(\beta) d\beta$$

の根のうち $\text{Re}(s) \geq -k$ を満足するものすべてに対し $\text{rank}[A(s), B] = n$ がなりたつ。■

(条件 2) 系(1)の特性方程式(2)のすべての根に対し, $\text{Re}(s) \neq -k$ がなりたつ。■

3. 数学的準備

本章では, 以下の議論で必要となる作用素のスペク

トル分解について簡単に紹介し, また本稿で用いる記法上の注意について述べる。

3.1 スペクトル分解¹¹⁾

微分方程式

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \int_{-h}^0 D(\beta) x(t+\beta) d\beta + Bu(t) \quad (3)$$

の $u(t) = 0$ とおいた場合の解 $x(t)$ より関数

$$x_i(\tau) = x(t+\tau), \quad \tau \in [-h, 0] \quad (4)$$

を定義し, 生成作用素 $T(t)$ を

$$x_i(\tau) = T(t)x_0(\tau), \quad \tau \in [-h, 0] \quad (5)$$

のように定める。 $T(t)$ は強連続な半群で, この無限小生成作用素 $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A}\xi(\tau) = \begin{cases} A_0 \xi(0) + A_1 \xi(-h) + \int_{-h}^0 D(\theta) \xi(\theta) d\theta & (\tau = 0) \\ \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} & (-h \leq \tau < 0) \end{cases} \quad (6)$$

で与えられる。ただし $\mathcal{A}$ の定義域 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ は区間 $[-h, 0]$ 上の連続な C^n 値関数の空間上で稠密である。 $\mathcal{A}$ の固有値は特性方程式(2)の根であり, 一般に無限集合となるが, そのうち複素閉右半平面内にあるものの集合 $\sigma^+(\mathcal{A})$ は有限集合となる。もし s_i が(2)式の d_i 重根であれば s_i に対応する $\mathcal{A}$ の一般化固有空間 P_i は d_i 次元となる。この空間の基底を $\phi_1^i, \phi_2^i, \dots, \phi_{d_i}^i$ とし, これより $\Phi_i \triangleq [\phi_1^i, \phi_2^i, \dots, \phi_{d_i}^i]$ を定義する。

つぎに, 区間 $[0, h]$ 上で定義された $\eta(\gamma)$ と区間 $[-h, 0]$ 上で定義された $\xi(\tau)$ に対し, 記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いて演算

$$\langle \eta, \xi \rangle \triangleq \eta(0)\xi(0) + \int_{-h}^0 \eta(\tau+h)A_1 \xi(\tau) d\tau - \int_{-h}^0 \int_0^h \eta(\tau-\gamma)D(\gamma)\xi(\tau) d\tau d\gamma \quad (7)$$

を定義する。このとき, $\langle \eta, \mathcal{A}\xi \rangle = \langle \mathcal{A}^+ \eta, \xi \rangle$ を満たす $\mathcal{A}$ の形式的随伴作用素 $\mathcal{A}^+$ は

$$\mathcal{A}^+ \eta(\gamma) = \begin{cases} \eta(0)A_0 + \eta(h)A_1 + \int_{-h}^0 \eta(-\theta)D(\theta) d\theta & (\gamma = 0) \\ -\frac{d\eta(\gamma)}{d\gamma} & (0 < \gamma \leq h) \end{cases} \quad (8)$$

で与えられる。 $\mathcal{A}^+$ は $\mathcal{A}$ と同じ固有値 s_i をもち, これに対応する $\mathcal{A}^+$ の一般化固有空間の基底 $\phi_1^i, \phi_2^i, \dots, \phi_{d_i}^i$ は,

$$\langle \phi_i^j, \phi_i^p \rangle = \begin{cases} 0 & (j \neq p) \\ 1 & (j = p) \end{cases} \quad (9)$$

を満たすように選ぶことができる。そこでこれより

$\Psi_i \triangleq [\psi_1^i, \psi_2^i, \dots, \psi_{d_i}^i]'$ を定義する。ただし記号 ' は共役転置を表わしている。

いま $\mathcal{A}$ の固有値の有限部分集合 $\Lambda = \{s_1, s_2, \dots, s_g\}$ を考え、 $s_i \in \Lambda$ に対する

Φ_i から $C^{n \times c}$ 値関数 $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_g]$

Ψ_i から $C^{c \times n}$ 値関数 $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_g]'$

を定義する。ただし、 $c = d_1 + d_2 + \dots + d_g$ である。このとき、

$$\mathcal{A}\Phi = \Phi A, \mathcal{A}'\Psi = A\Psi \quad (10)$$

を満足する定数行列 $A \in C^{n \times n}$ が存在し、 A の固有値は Λ の要素に等しい。また $\langle \Psi, \Phi \rangle$ は単位行列となる。

つぎに、空間 P を $P = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_g$ と定義し、空間 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ における P の直交補空間を Q で表わすと、(4)式の x_i は $x_i = x_i^P + x_i^Q$ 、 $x_i^P \in P$ 、 $x_i^Q \in Q$ のように分解できる。 x_i^P は c 次元ベクトル

$$\xi(t) \triangleq \langle \Psi, x_i \rangle \quad (11)$$

を用いて $x_i^P = \Phi \xi(t)$ のようにかける。また、 $\xi(t)$ はつぎの微分方程式を満たす。

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + \Psi(0)Bu(t) \quad (12)$$

そしていま、系(3)に対して適当な定数行列 $K \in C^{m \times c}$ を用いた状態フィードバック

$$u(t) = K \langle \Psi, x_i \rangle \quad (13)$$

をほどこすと、系(3)のもつ極のうち Λ に含まれたものは c 次元系(12)に対して状態フィードバック

$$u(t) = K\xi(t) \quad (14)$$

をほどこして得られた形の閉ループ系

$$\dot{\xi}(t) = (A + \Psi(0)BK)\xi(t) \quad (15)$$

の極と同じ位置に配置され、 Λ に含まれなかったものは動かない¹²⁾。したがって、 $\sigma^*(\mathcal{A}) \subseteq \Lambda$ であるとき、(14)が系(12)を漸近安定化するように K を選べば、(13)は系(3)を漸近安定化する。

3.2 記法上の注意

定数行列 $S_0 \in R^{n \times n}$ と連続な行列値関数 $S_1(\beta) \in R^{n \times n}$ $\beta \in [-h, 0]$ および $S_2(\alpha, \beta) \in R^{n \times n}$ $\alpha, \beta \in [-h, 0]$ の組を記号 $\{S_0, S_1, S_2\}$ で表わすものとする。もし、 $S_0 = S_0'$ かつ $S_2(\alpha, \beta) = S_2'(\beta, \alpha)$ ならば、 $\{S_0, S_1, S_2\}$ は対称であるということにする。さらに、 $\{S_0, S_1, S_2\}$ が対称であるとき、区間 $[-h, 0]$ 上で定義された任意の連続な R^n 値関数 $\xi(t)$ に対し、つぎのような一般化された2次形式

$$\begin{aligned} & \xi' \{S_0, S_1, S_2\} \xi \\ & \triangleq \xi'(0)S_0\xi(0) + 2\xi'(0) \int_{-h}^0 S_1(\beta)\xi(\beta)d\beta \\ & + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \xi'(\alpha)S_2(\alpha, \beta)\xi(\beta)d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (16)$$

の値が非負のとき、 $\{S_0, S_1, S_2\}$ は非負定であるといい、 $\{S_0, S_1, S_2\} \geq 0$ で表わすことにする。

4. リカッチ方程式の最大解

本章では、むだ時間を含む系に対するリカッチ方程式の最大解の構成法と、それを用いたフィードバック則によって得られる閉ループ系の極の位置について述べる。

4.1 むだ時間を含む系に対するリカッチ方程式

微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t-h) \\ &+ \int_{-h}^0 D(\beta)x(t+\beta)d\beta + Bu(t) \end{aligned} \quad (17)$$

で表わされる安定化可能な系に対して、評価関数

$$\theta = \int_0^\infty q(x_i, u(t))dt \quad (18)$$

$$q(x_i, u(t)) \triangleq x_i' \{Q_0, Q_1, Q_2\} x_i + u'(t)Ru(t)$$

を最小にする最適レギュレータ問題を考える。ここで $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ は非負定であり、 $R \in R^{m \times m}$ は正定であるとする。いま、つぎのような連立偏微分方程式

$$\begin{aligned} P_0A_0 + A_0'P_0 + P_1(0) + P_1'(0) + Q_0 \\ - P_0BR^{-1}B'P_0 = 0 \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\beta}P_1(\beta) + A_0'P_1(\beta) + P_0D(\beta) \\ + P_2(0, \beta) - P_0BR^{-1}B'P_1(\beta) \\ + Q_1(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (19b)$$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\right)P_2(\alpha, \beta) + D'(\alpha)P_1(\beta) \\ + Q_2(\alpha, \beta) + P_1'(\alpha)D(\beta) \\ - P_1'(\alpha)BR^{-1}B'P_1(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (19c)$$

$$P_1(-h) = P_0A_1, \quad P_2(-h, \beta) = A_1'P_1(\beta) \quad (19d)$$

の非負定対称解 $\{P_0, P_1, P_2\}$ が存在し、これを用いて得られる

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}B' \\ &\cdot \left\{ P_0x(t) + \int_{-h}^0 P_1(\beta)x(t+\beta)d\beta \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

が系(17)を安定化するならば、(20)は安定化制御のクラスの中で θ を最小にする制御である^{5), 8)}。

方程式(19)の非負定対称解は一般に一意ではない。以下ではこれらのうちの最大解に注目し、あるクラスの $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ に対して具体的にその構成法を示す。

4.2 最大解の定義

いま、初期関数 $x_a = x(a+\tau)$ 、 $\tau \in [-h, 0]$ に対する微分方程式(17)の解 x が $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{-h \leq \tau \leq 0} \|x_i(\tau)\| = 0$ を満足するような2乗可積分な制御入力 $u(t)$ $t \in [a, \infty)$ の集合を $U(x_a)$ とする。ここで $\|\cdot\|$ はベクトル

のユークリッドノルムを表わす。系(17)が安定化可能であれば $U(x_a)$ は空集合ではない。いま、(17)の解 x と u から得られる $q(x, u(t))$ を用いて、関数 v をつぎのように定義する。

$$v_+(x_a) \triangleq \inf_{u \in U(x_a)} \int_a^\infty q(x, u(t)) dt \quad (21)$$

$\{Q_0, Q_1, Q_2\} \geq 0$, $R > 0$ より、任意の x, u に対して $q(x, u(t)) \geq 0$ であるから上式右辺の $\inf$ は必ず存在する。このとき、つぎの補題がなりたつ。

[補題 1] つぎのような消散不等式を考える。

$$v(x_a) \leq \int_a^b q(x, u(t)) dt + v(x_b) \quad (a \leq b) \quad (22a)$$

$$v(0) = 0 \quad (22b)$$

このとき(21)で定義される v_+ は(22)の解であり、任意の解 v に対して

$$v(x_a) \leq v_+(x_a) \quad (23)$$

の関係にある。

(証明) 任意の $u \in U(x_a)$ を 2 分し、区間 $[a, b]$ に対するものを u_1 、区間 $[b, \infty)$ に対するものを u_2 とかくことにすると、(21)より

$$v_+(x_a) \leq \int_a^b q(x, u_1(t)) dt + \int_b^\infty q(x, u_2(t)) dt \quad (24)$$

がなりたつから $u_2 \in U(x_b)$ について右辺の下限をとれば(22a)がなりたつ。また $x_a = 0$, $u(t) = 0$ を考えれば(22b)もなりたっている。

つぎに、(22a)の右辺において $b \rightarrow \infty$ の極限をとる $u \in U(x_a)$ について $\inf$ をとれば任意の $v(x_a)$ に対し(23)の関係が得られる。■

また、リカッチ方程式(19)の解と消散不等式(22)の解との関係についてつぎの補題がなりたつ。

[補題 2] リカッチ方程式(19)の任意の非負定対称解 $\{P_0, P_1, P_2\}$ に対して、

$$v(x_a) = x_a' \{P_0, P_1, P_2\} x_a \quad (25)$$

は消散不等式(22)の解である。

(証明) v を(25)のようにおき、(17)、(19)を代入して整理すると

$$\begin{aligned} & \int_a^b q(x, u(t)) dt + v(x_b) - v(x_a) \\ &= \int_a^b \left\| R^{1/2} \left[u(t) + R^{-1} B' \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \cdot \left\{ P_0 x(t) + \int_{-h}^0 P_1(\beta) x(t+\beta) d\beta \right\} \right] \right\|^2 dt \geq 0 \end{aligned}$$

となり、(22a)を満たしている。また(22b)も満たされる。■

そこでもしも、

$$v_+(x_a) = x_a' \{P_{0+}, P_{1+}, P_{2+}\} x_a \quad (26)$$

を満たすリカッチ方程式の解 $\{P_{0+}, P_{1+}, P_{2+}\}$ が存在すれば、(25)と(26)を(23)に代入して得られる

$$x_a' \{P_{0+} - P_0, P_{1+} - P_1, P_{2+} - P_2\} x_a \geq 0 \quad (27)$$

の関係が任意の x_a についてなりたつので、この $\{P_{0+}, P_{1+}, P_{2+}\}$ をリカッチ方程式の最大解と定義する。

4.3 最大解の構成法

本節では、特定の $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ に対してリカッチ方程式(19)の最大解 $\{P_{0+}, P_{1+}, P_{2+}\}$ がある有限次元リカッチ方程式の最大解から構成できることを証明する。そのためにまず、つぎの補題を示しておく。

[補題 3] $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ が、3.1 節で $\sigma^*(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ を満たす $\mathcal{A}$ に対して定義された Ψ と適当な非負定対称行列 $Q \in R^{c \times c}$ を用いて

$$Q_0 = \Psi'(0) Q \Psi(0) \quad (28a)$$

$$Q_1(\beta) = \Psi'(0) Q \tilde{\Psi}(\beta) \quad (28b)$$

$$Q_2(\alpha, \beta) = \tilde{\Psi}'(\alpha) Q \tilde{\Psi}(\beta) \quad (28c)$$

$$\tilde{\Psi}(\beta) \triangleq \Psi(\beta + h) A_1 + \int_{-h}^{\beta} \Psi(\beta - \gamma) D(\gamma) d\gamma$$

のように選ばれているとする。このとき、リカッチ方程式(19)の非負定対称解 $\{P_0, P_1, P_2\}$ は c 次元系

$$\dot{\xi}(t) = A \xi(t) + \Psi(0) B u(t) \quad (29)$$

に対するリカッチ方程式

$$PA + A'P - P\Psi(0)BR^{-1}B'\Psi'(0)P + Q = 0 \quad (30)$$

の非負定対称解 P を用いてつぎのように構成することができ。

$$P_0 = \Psi'(0) P \Psi(0) \quad (31a)$$

$$P_1(\beta) = \Psi'(0) P \tilde{\Psi}(\beta) \quad (31b)$$

$$P_2(\alpha, \beta) = \tilde{\Psi}'(\alpha) P \tilde{\Psi}(\beta) \quad (31c)$$

(証明) (8)式と(10)式より得られる

$$A\Psi(\gamma) =$$

$$\begin{cases} \Psi(0)A_0 + \Psi(h)A_1 + \int_{-h}^0 \Psi(-\theta)D(\theta)d\theta & (\gamma=0) \\ -\frac{d\Psi(\gamma)}{d\gamma} & (-h \leq \gamma < 0) \end{cases} \quad (32)$$

の関係に注意して(28)、(31)を直接(19)に代入することにより確かめられる。■

そこで、この結果を用いて最大解の構成に関するつぎの定理を導くことができる。

《定理 1》(28)のように重み行列 $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ を選んだ場合、むだ時間を含む系に対するリカッチ方程式(19)の最大解は、有限次元リカッチ方程式(30)の最大解 P を用いて(31)のように構成される。

(証明) P が有限次元リカッチ方程式(30)の最大解であると仮定すると、つぎの関係がなりたつ¹⁰⁾。

$$\xi'(a) P \xi(a) = \inf_{u \in V(\xi(a))} \int_a^\infty \rho(\xi(t), u(t)) dt \quad (33)$$

$$\rho(\zeta(t), u(t)) \triangleq \zeta'(t)Q\zeta(t) + u'(t)Ru(t)$$

ここで $V(\zeta(a))$ は初期値 $\zeta(a)$ に対する微分方程式 (29) の解 $\zeta(t)$ が $\lim_{t \rightarrow +\infty} \zeta(t) = 0$ を満足するような 2 乗可積分な制御入力 $u(t)$ の集合である。よく知られているように、 $u \in V(\zeta(a))$ のなかで (33) 式の右辺の積分値を最小にする制御 $u_+(t)$ は状態フィードバック

$$u_+(t) = -R^{-1}B'\Psi'(0)P\zeta(t) \quad (34)$$

で与えられるから、このときの解軌道 $\zeta(t)$ を $\zeta_+(t)$ で表わすと、

$$\inf_{u \in V(\zeta(a))} \int_a^\infty \rho(\zeta(t), u(t)) dt = \int_a^\infty \rho(\zeta_+(t), u_+(t)) dt \quad (35)$$

とかける。さて、もしも $u \in U(x_a)$ ならば $u \in V(\zeta(a))$ であるから、

$$\begin{aligned} & \inf_{u \in V(\zeta(a))} \int_a^\infty \rho(\zeta(t), u(t)) dt \\ & \leq \inf_{u \in U(x_a)} \int_a^\infty \rho(\zeta(t), u(t)) dt \end{aligned} \quad (36)$$

がなりたつ。いっぽう、状態フィードバック $u_+(t)$ が系 (29) を漸近安定化するならば、3.1 節で述べたように $u_+(t)$ は系 (17) も漸近安定化するから、 $u_+ \in U(x_a)$ なので、

$$\begin{aligned} & \inf_{u \in U(x_a)} \int_a^\infty \rho(\zeta(t), u(t)) dt \\ & \leq \int_a^\infty \rho(\zeta_+(t), u_+(t)) dt \\ & = \inf_{u \in V(\zeta(a))} \int_a^\infty \rho(\zeta(t), u(t)) dt \end{aligned} \quad (37)$$

となり、(36)、(37) より、

$$\begin{aligned} & \inf_{u \in U(x_a)} \int_a^\infty \rho(\zeta(t), u(t)) dt \\ & = \inf_{u \in V(\zeta(a))} \int_a^\infty \rho(\zeta(t), u(t)) dt \end{aligned} \quad (38)$$

が得られる。ところで、(11) と (31) より、

$$\zeta'(a)P\zeta(a) = x'_a \{P_0, P_1, P_2\} x_a \quad (39)$$

であり、また (11) と (28) より

$$\rho(\zeta(t), u(t)) = q(x_t, u(t)) \quad (40)$$

であるから、(33)、(38)、(39)、(40) より

$$x'_a \{P_0, P_1, P_2\} x_a = \inf_{u \in U(x_a)} \int_a^\infty q(x_t, u(t)) dt \quad (41)$$

となり、これは $\{P_0, P_1, P_2\}$ が (19) の最大解であることを示している。 ■

4.4 最大解と閉ループ系の極

つぎに、最大解を用いて構成した閉ループ系の極が配置される領域について考察する。その準備として、つぎの補題を示しておく。

〔補題 4〕 むだ時間を含む系に対するリカッチ方程

式 (19) が解 $\{P_{0*}, P_{1*}, P_{2*}\}$ をもつものとする。このとき、 $\{P_0, P_1, P_2\}$ が (19) の解であるための必要十分条件は

$$\{X_0, X_1, X_2\} = \{P_0 - P_{0*}, P_1 - P_{1*}, P_2 - P_{2*}\} \quad (42)$$

がリカッチ方程式

$$\begin{aligned} & X_0 A_{0c} + A'_{0c} X_0 + X_1(0) + X'_1(0) \\ & - X_0 B R^{-1} B' X_0 = 0 \end{aligned} \quad (43 a)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{d}{dB} X_1(\beta) + A'_{0c} X_1(\beta) + X_0 D_c(\beta) \\ & + X_2(0, \beta) - X_0 B R^{-1} B' X_1(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (43 b)$$

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \right) X_2(\alpha, \beta) + D'_c(\alpha) X_1(\beta) \\ & + X'_1(\alpha) D_c(\beta) \\ & - X'_1(\alpha) B R^{-1} B' X_1(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (43 c)$$

$$X_1(-h) = X_0 A_1, \quad X_2(-h, \beta) = A'_1 X_1(\beta) \quad (43 d)$$

を満たすことである。ただし、

$$\begin{aligned} & A_{0c} \triangleq A_0 - B R^{-1} B' P_{0*} \\ & D_c(\beta) \triangleq D(\beta) - B R^{-1} B' P_{1*}(\beta) \end{aligned}$$

である。

(証明) (42) と A_{0c} 、 $D_c(\beta)$ の定義式を (43) に代入し、 $\{P_{0*}, P_{1*}, P_{2*}\}$ に対し (19) の関係を用いれば、 $\{P_0, P_1, P_2\}$ に関する (19) 式が得られる。 ■

これを用いると、最大解と閉ループ系の極との間につぎのような関係がなりたつことがわかる。

《定理 2》 リカッチ方程式 (19) の最大解を用いて系 (17) に対しフィードバック則 (20) を構成すると、これから得られる閉ループ系

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{0m} x(t) + A_1 x(t-h) \\ &+ \int_{-h}^0 D_m(\tau) x(t+\tau) d\tau \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & A_{0m} \triangleq A_0 - B R^{-1} B' P_{0+} \\ & D_m(\beta) \triangleq D(\beta) - B R^{-1} B' P_{1+}(\beta) \end{aligned}$$

の極は複素閉左半平面内に配置される。

(証明) 系 (44) が複素開右半平面内に極をもつと仮定し、(43) が非負定対称な解 $\{X_0, X_1, X_2\}$ をもつことを示し、したがって $\{P_{0+}, P_{1+}, P_{2+}\}$ の最大性に反することを示す。

系 (44) に対し第 3 章で述べたスペクトル分解を適用する。仮定より系 (44) は複素開右半平面内に少なくとも 1 個以上の極をもつので、これを集合 Λ の要素とする。系 (17) が安定化可能であるから系 (44) も安定化可能であり、有限次元システム $(A, \Psi(0)B)$ は可制御となる¹²⁾。 Λ の固有値は Λ の要素に等しいから、 $(-A)$ の固有値は複素開左半平面内にある。したがって有限次元リアプノフ方程式

$$Y(-A') + (-A)Y + \Psi(0)BR^{-1}B'\Psi'(0) = 0 \quad (45)$$

は正定解 Y をもつ¹⁰⁾. そこで

$$X_0 = \Psi'(0)Y^{-1}\Psi(0) \quad (46a)$$

$$X_1(\beta) = \Psi'(0)Y^{-1}\tilde{\Psi}(\beta) \quad (46b)$$

$$X_2(\alpha, \beta) = \tilde{\Psi}'(\alpha)Y^{-1}\tilde{\Psi}(\beta) \quad (46c)$$

のように $\{X_0, X_1, X_2\}$ を構成すると, これは(43)を満足し, しかも非負定対称となっている. ■

5. 折り返し法

本章では, 以上で述べてきたリカッチ方程式の最大解の性質を応用した, 折り返し法について述べる.

5.1 極の折り返し

定理2の特別な場合としてつぎの定理がなりたつ.

《定理3》 リカッチ方程式(19)において $\{Q_0, Q_1, Q_2\} = \{0, 0, 0\}$ とおいた場合の最大解を用いて系(17)に対しフィードバック則(20)を構成する. するとこれから得られる閉ループ系(44)の極は系(17)のもつ極のうち, 複素閉左半平面内にあるものはそのままの位置に, 複素開右半平面内にあるものは虚軸を対称軸として左側に折り返した位置に配置される.

(証明) 文献4)の手法を少し一般化することにより, 閉ループ系(44)の極はハミルトニアン

$$H(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s) & -BR^{-1}B' \\ 0 & -\Gamma'(-s) \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\Gamma(s) \triangleq A_0 + e^{-sh}A_1 + \int_{-h}^0 e^{s\tau}D(\tau)d\tau$$

の固有値, すなわち

$$\begin{aligned} \det[sI_{2n} - H(s)] \\ = \det[sI_n - \Gamma(s)] \cdot \det[sI_n + \Gamma'(-s)] = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

の根となることが証明できる. ここで I_{2n}, I_n はそれぞれ $2n$ 次元, n 次元の単位行列である. (48)は $H(s)$ の固有値が系(17)の極と, 虚軸に関して系(17)の極に線対称な位置の値とを合せたものになっていることを示している. とところが定理2で示したように閉ループ系(44)は複素開右半平面内に極をもちえないから, 標記の命題がなりたつ. ■

5.2 フィードバック則の構成

制御対象(1)に対し, つぎの補助的な系を考える.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}_0\tilde{x}(t) + \tilde{A}_1\tilde{x}(t-h) \\ &+ \int_{-h}^0 \tilde{D}(\tau)\tilde{x}(t+\tau)d\tau + B\tilde{u}(t) \end{aligned} \quad (49)$$

$$\tilde{A}_0 \triangleq A_0 + kI, \quad \tilde{A}_1 \triangleq e^{kh}A_1, \quad \tilde{D}(\tau) \triangleq e^{-k\tau}D(\tau)$$

系(1)の極を s とすると, $s+k$ は系(49)の極である. また条件1のもとで系(49)は安定化可能である⁷⁾.

そこでこの系(49)に対して(19)と同様のリカッチ方

程式をたて, $\{Q_0, Q_1, Q_2\} = \{0, 0, 0\}$ とした場合の最大解 $\{\tilde{P}_{0+}, \tilde{P}_{1+}, \tilde{P}_{2+}\}$ を求める. つぎに制御対象(1)に対してフィードバック則

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}B' \\ &\cdot \left\{ \tilde{P}_{0+}x(t) + \int_{-h}^0 \tilde{P}_{1+}(\beta)e^{k\beta}x(t+\beta)d\beta \right\} \end{aligned} \quad (50)$$

を構成すると, 閉ループ系

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_{0+}x(t) + A_1x(t-h) \\ &+ \int_{-h}^0 D_+(\tau)x(t+\tau)d\tau \end{aligned} \quad (51)$$

$$A_{0+} \triangleq A_0 - BR^{-1}B'\tilde{P}_{0+}$$

$$D_+(\beta) \triangleq D(\beta) - BR^{-1}B'\tilde{P}_{1+}(\beta)e^{k\beta}$$

を得る. このとき本稿の主要な結果であるつぎの定理がなりたつ.

《定理4》 閉ループ系(51)の極は, 系(1)の開ループ極のうち

a) 折り返し線より左側にあるもの s_1 はそのままの位置に

b) 折り返し線より右側にあるもの s_2 は折り返し線を対称軸として左側に折り返した位置に

配置される.

(証明) $\{\tilde{P}_{0+}, \tilde{P}_{1+}, \tilde{P}_{2+}\}$ を用いてフィードバック則

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= -R^{-1}B' \\ &\cdot \left\{ \tilde{P}_{0+}\tilde{x}(t) + \int_{-h}^0 \tilde{P}_{1+}(\beta)\tilde{x}(t+\beta)d\beta \right\} \end{aligned} \quad (52)$$

を構成し, これを系(49)に適用して得られた閉ループ系を系 Σ とする. 系 Σ の極を s とすると $s-k$ は系(51)の極となる⁷⁾. この結果に注意すると, a), b) はそれぞれつぎのように証明できる.

a) 系(1)が開ループ極 $s_1(\operatorname{Re}[s_1] < -k)$ をもつとき, $s_1+k(\operatorname{Re}[s_1+k] < 0)$ は系(49)の開ループ極となるから, 定理3より閉ループ系 Σ は極 s_1+k をもつ. したがって, 上述の結果より最終的に得られる閉ループ系(51)は極 s_1 をもつ.

b) 系(1)が開ループ極 $s_2(\operatorname{Re}[s_2] > -k)$ をもつとき, $s_2+k(\operatorname{Re}[s_2+k] > 0)$ は系(49)の開ループ極となるから, 定理3より閉ループ系 Σ は極 $-s_2-k$ をもつ. したがって, 上述の結果より閉ループ系(51)は極 $-s_2-2k$ をもつ. ■

以上より, 状態フィードバック則の構成アルゴリズムはつぎようになる.

- 1) 閉ループ系の極が望ましい位置に配置されるように折り返し線の位置を定める. ただし条件1,
- 2) を満たすように定める.

- 2) 系(49)を構成する。
- 3) 系(49)に対するリカッチ方程式をたてて $\{Q_0, Q_1, Q_2\} = \{0, 0, 0\}$ とおき、最大解を求める。
- 4) その最大解を用いて制御則(50)を構成する。

折り返し線的位置を変えながら閉ループ系(51)が望ましい応答特性を示すまで 2)~4) を繰返す。

このようにして構成された閉ループ系(51)は $k \geq 0$ ならば制御対象(1)に対して

$$Q_0 = 2k\tilde{P}_{0+} \quad (53a)$$

$$Q_1(\beta) = 2ke^{\beta}\tilde{P}_{1+}(\beta) \quad (53b)$$

$$Q_2(\alpha, \beta) = 2ke^{k(\alpha+\beta)}\tilde{P}_{2+}(\alpha, \beta) \quad (53c)$$

とした場合の最適レギュレータとなっている^{7), 8)}。

なお前述のアルゴリズムにおいて最大解を求めるには直接リカッチ方程式(19)を解いてもよいが、定理1で示したように有限次元リカッチ方程式(30)の最大解を用いて構成することもできる。また条件2は、この最大解求解のための条件である²⁾。

6. 例 題

つぎの系に対し、 $k=0.1$ 、 $R=1$ として閉ループ系を構成した。開ループ系と閉ループ系の極の位置を Fig. 2 に、初期関数 $\xi(\tau)=[0.1 \ 0]'$ $\tau \in [-h, 0]$ に対する閉ループ系の自由応答を Fig. 3 に示す。

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t) \quad (54)$$

Fig. 2 Open loop poles and closed loop poles

Fig. 3 Time response of the states

7. おわりに

本稿では、むだ時間を含む系に対するリカッチ方程式における最大解を定義し、その構成法と性質を導き、これを用いて折り返し法による状態フィードバック則の構成法について述べた。文献7)で報告した方法では閉ループ系の極の位置をあらかじめ知ることはできなかったが、本方法では設計パラメータを決定する段階で閉ループ系の極の位置を正確に知ることができるとの特長をもっている。また本方法は設計パラメータが比較的少ないという特徴をもつので、むだ時間を含む系のような極が無限個存在するシステムに対する簡便な設計法として有効であると考えられる。

参 考 文 献

- 1) 示村, 川崎: 最適レギュレータ問題と極配置, 計測と制御, 22-3, 282/290 (1983)
- 2) 川崎, 示村: 指定領域に極を配置する状態フィードバック則の設計法, 計測自動制御学会論文集, 15-4, 451/457 (1979)
- 3) 川崎, 示村: 指定領域内に特性根を配置する線形レギュレータ問題の重み係数決定法, 計測自動制御学会論文集, 17-3, 335/342 (1981)
- 4) K. Uchida and E. Shimemura: Closed-Loop Properties of the Infinite-Time Linear-Quadratic Optimal Regulator for Systems with Delays, International Journal of Control, 43-3, 773/779 (1986)
- 5) 内田, 示村: 一般化された2次形式コストに基づくむだ時間を含む系の最適レギュレータ, 第15回制御理論シンポジウム資料, 75/78 (1986)
- 6) 内田, 示村, 阿部: むだ時間を含む系の LQ 問題における円条件と安定余有, 第15回制御理論シンポジウム資料 67/70 (1986)
- 7) 示村, 内田, 久保: 状態にむだ時間を含むシステムの極を指定した半平面内に配置する最適レギュレータの一構成法, 計測自動制御学会論文集, 23-2, 136/141 (1987)
- 8) K. Uchida, E. Shimemura, T. Kubo and N. Abe: The Linear Quadratic Optimal Control Approach to Feedback Control Design for Systems with Delay, Report of Science and Engineering Research Laboratory, Waseda University, 86-10 (1986)
- 9) B. P. Molinari: The Time-Invariant Linear-Quadratic Optimal Control Problem, Automatica, 13-4, 347/357 (1977)
- 10) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)
- 11) J. Hale: Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag (1977)
- 12) L. Pandolfi: On Feedback Stabilization of Functional Differential Equations, Bollettino della Unione Matematica Italiana Ser. 4, 11, Suppl. Fasc., 3, 626/635 (1975)