状態変数フィードバックにより配置可能なグラミアンの
必要十分条件とそのクラス†

小原 敦美*・北 森 俊 行*

The Necessary and Sufficient Condition for Gramian Assignment through
State Variable Feedback and the Class of Assignable Gramian

Atsumi OHARA* and Toshiyuki KITAMORI*

1. 緒 言

線型システムでは、グラミアンを用いて可制御空間、可観測空間の構造を定量的に扱うことができる¹⁾。この性質を利用すると、これまで極配置だけでは明確でなかった非干渉性、過渡応答性といった制御特性が定量化できる可能性がある。本論文は、グラミアン配置という制御系設計の考え方を提案し、指定したグラミアン配置可能である条件と配置可能なグラミアンのクラスを明らかにする。最後にこの考え方を外乱抑制問題に応用した数値例を紹介する。

2. 可制御性グラミアンの配置可能条件

つぎのような線形多変数系を考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1b)$$

ただし、 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^p$ とする。

A が安定ならば、可制御性グラミアン G_c はつぎの (2) で定義され、(3) のリアプノフ方程式を満たす。

$$G_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (2)$$

$$A G_c + G_c A^T = -B B^T \quad (3)$$

(2) の可制御性グラミアン G_c が正定であることと (A, B) が可制御対であることは等価であるが、さらに、可制御性グラミアンを特異値分解すると可制御性の強さがわかる。すなわち、(2) が

$$G_c = V \Sigma_c^2 V^T$$

$$V = [v_1 v_2 \cdots v_n] \in R^{n \times n}: \text{直交行列} \quad (4)$$

$$\Sigma_c = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in R^{n \times n}: \sigma_i > 0 \quad (5)$$

のように特異値分解されたなら、 v_i を主軸の方向とし、その長さが $2\sigma_i$ の楕円体は、系 (1) の状態空間内であるエネルギー以下の入力によって原点から到達できる領域と一致し、 σ_i の大きい方向ほど可制御性が強いことになる。これは、可制御性グラミアンを用いてエネルギーの観点から可制御空間の構造を扱えるというだけでなくそれに関連したさまざまな制御特性も定量化できる可能性を示している。つぎに (1) の (A, B) が可制御な制御対象に対して、状態フィードバックを用い閉ループ系

$$\dot{x}(t) = (A - BF)x(t) + Bv(t) \quad (6a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (6b)$$

の可制御性グラミアンを配置し、望ましい制御特性を達成することを考える。いかなるグラミアン G_c を指定すべきかは研究の余地があるが、4章で外乱抑制に対する具体例を示す。閉ループ系の安定性はリアプノフ方程式に関するつぎの補題によって保証される。

[補題 1]³⁾

(A, B) が可制御であるとき、 $G_c > 0$ が

$$(A - BF)G_c + G_c(A - BF)^T = -B B^T \quad (7)$$

を満たすならば、 $A - BF$ は安定である。■

(7) で与えられる G_c は閉ループ系の可制御性グラミアンとなるから、問題は以下ようになる。

[問題]

可制御な系 (A, B) に対して、指定された正定行列 G_c を (7) のリアプノフ方程式の解とするフィードバックゲイン F を求めよ。■

つぎの補題を用いて (7) の可解条件を導くことで定理 1、系 1 が得られる。

[補題 2]³⁾

$A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times q}$, $C \in R^{m \times q}$ とする。 $A X B = C$ となる解 $X \in R^{n \times p}$ が存在する必要十分条件は

$$A A^* C B^* B = C \quad (8)$$

† 第 15 回制御理論シンポジウムで発表 (昭 61・6)

* 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

* Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received November 25, 1986)

(Revised February 10, 1987)

Key Words: Gramian, linear system, state variable feedback, control system design

が成立することであり、この解は次式で表わされる。

$$X = A^+CB^+ + (Z - A^+AZBB^+) \quad (9)$$

$\forall Z \in \mathbf{R}^{n \times p}$, ただし, $^+$ は擬逆行列を表わす。■

《定理1》

系(1)の (A, B) が可制御なとき、指定された正定行列 G_c が状態フィードバックによって閉ループ系の可制御性グラミアンとして配置可能である必要十分条件は、つぎの等式が成立することである。

$$\text{rank}[R_N : csQ] = \text{rank } R_N \quad (10)$$

ただし、

$$B_K \triangleq I - BB^+ \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad (11)$$

$E_N \in \mathbf{R}^{n^2 \times (n^2 - n)/2} : n \times n$ 行列を列展開してベクトル空間 $\mathbf{R}^{n^2}$ を考えたとき、その中で $n \times n$ 歪み対称行列全体が作る $(n^2 - n)/2$ 次元部分空間の基底行列(注1) (12)

としたとき、

$$R_N \triangleq (G_c^{-1} \otimes B_K) E_N \in \mathbf{R}^{n^2 \times (n^2 - n)/2} \quad (13)$$

$$Q \triangleq B_K A \quad (14)$$

$\otimes$ はクロネッカ積を表わす

また、そのときのフィードバックゲイン F は、

$$F = B^+ \left\{ A + \left(N - \frac{BB^T}{2} \right) G_c^{-1} \right\} + (I - B^+B)Z \quad (15)$$

$\forall Z \in \mathbf{R}^{m \times m}$

$N \in \{N | n \times n \text{ 歪み対称行列}, csN = E_N x, \\ , x = R_N^+ csQ + (I - R_N^+ R_N)y, \forall y \in \mathbf{R}^{(n^2 - n)/2}\}$

(証明) (7)式の解 F が存在する必要十分条件は、ある歪み対称行列 N に対して

$$(A - BF)G_c = \frac{-BB^T}{2} + N, \text{ for } \exists N \quad (16)$$

が可解であることである。 G_c が正定だから(16)は、

$$BF = A + \left(\frac{BB^T}{2} - N \right) G_c^{-1}, \text{ for } \exists N \quad (17)$$

と等価である。(17)が可解である必要十分条件は F に関して補題2を適用すると

$$\begin{aligned} & BB^+ \left\{ A + \left(\frac{BB^T}{2} - N \right) G_c^{-1} \right\} \\ &= A + \left(\frac{BB^T}{2} - N \right) G_c^{-1}, \text{ for } \exists N \end{aligned} \quad (18)$$

が成立することであり、これを整理して次式となる。

$$(I - BB^+)A = (I - BB^+)NG_c^{-1}, \text{ for } \exists N \quad (19)$$

(注1) たとえば、 3×3 歪み対称行列 $N = \begin{bmatrix} 0 & -x_1 - x_2 \\ x_1 & 0 & -x_3 \\ x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}$

の場合、 $csN = [0 \ x_1 x_2 - x_1 \ 0 \ x_3 - x_2 - x_3 \ 0]^T = E_N x$

$$E_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, x = [x_1, x_2, x_3]^T$$

つぎに(19)を満たす歪み対称行列 N の存在する必要十分条件を求める。(11), (14)を用いて(19)を列展開すると

$$csQ = (G_c^{-1} \otimes B_K) csN, \text{ for } \exists N \quad (20)$$

$csN \in \mathbf{R}^{n^2}$ 全体は、 $\mathbf{R}^{n^2}$ の中で部分空間となるので(12)のようにその基底行列を E_N とすると csN は

$$csN = E_N x, x \in \mathbf{R}^{(n^2 - n)/2} \quad (21)$$

となり、(20)に代入すると(13)より

$$csQ = (G_c^{-1} \otimes B_K) E_N x = R_N x, \text{ for } \exists x \quad (22)$$

となる。(22)を満たす x が存在する必要十分条件は、

$$\text{rank}[R_N : csQ] = \text{rank } R_N \quad (23)$$

であり³⁾, x の一般解はつぎのように表わされる。

$$x = R_N^+ csQ + (I - R_N^+ R_N)y, \forall y \in \mathbf{R}^{(n^2 - n)/2} \quad (24)$$

結局、(23)の成立が(19)を満たす歪み対称行列 N の存在する必要十分条件であり、それは(16)が F に関して可解である必要十分条件でもあるから定理の前半(10)は証明された。

配置可能であるとき、(7)の解であるフィードバックゲイン F が(15)のようになるのは(17)と補題2の(9)より明らか。(証明終)

〈系1〉

$\text{rank } B = n$, すなわち n 入力の n 次元系で入力行列 B が逆行列をもつならば、任意の可制御性グラミアン G_c は配置可能である。

(証明) (17)より明らか。(証明終)

3. 配置可能なグラミアンのクラス

前章で得られた結果では、配置可能かどうかの判定はできるが、配置可能なグラミアンを探し出すのは容易でない。また、任意にグラミアンを与えていたのではgenericに配置できないということもわかる。そこでこの章では、状態フィードバックで配置可能なグラミアンのクラスに対して極と固有ベクトル配置の自由度を用いたパラメトリゼーションを与える⁷⁾。

系(1)の極とは等しくない閉ループ極 λ_i (注2) $i=1 \sim n$ を選ぶ。記法を簡単にするため λ_i は実数とする。このとき、閉ループ極 λ_i に対応する閉ループ固有ベクトル u_i は、つぎのように書ける。

$$u_i = (A - \lambda_i I)^{-1} B k_i, k_i \in \mathbf{R}^m \quad i=1 \sim n \quad (25)$$

k_i は固有ベクトル配置の自由度である。つぎに

$$T \triangleq [u_1 u_2 \cdots u_n] \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad (26)$$

$$K \triangleq [k_1 k_2 \cdots k_n] \in \mathbf{R}^{m \times n} \quad (27)$$

とすると極を λ_i に配置するフィードバックゲインは、

$$F = K T^{-1} \quad (28)$$

(注2) 単根で、 $\text{Re } \lambda_i < 0$ とする。

とパラメトライズされ⁴⁾、閉ループ系は、

$$A-BF=TAT^{-1}, \quad A=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (29)$$

と対角化される。(29)式から閉ループ系のグラミアン G_{CF} はつぎようになる。

$$\begin{aligned} G_{CF} &= \int_0^\infty e^{(A-BF)t} BB^T e^{(A-BF)^T t} dt \\ &= T \int_0^\infty e^{\Lambda t} T^{-1} BB^T T^{-T} e^{\Lambda^T t} dt T^T = T \Phi T^T \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{ただし, } \Phi \triangleq \int_0^\infty e^{\Lambda t} T^{-1} BB^T T^{-T} e^{\Lambda^T t} dt \in \mathbf{R}^{n \times n},$$

$$T^{-T} \triangleq (T^{-1})^T$$

A が対角行列であることと $\text{Re } \lambda_i < 0$ であることを利用すると Φ の各要素はつぎようになる。

$$\Phi_{ij} = -H_{ij}/(\lambda_i + \lambda_j) \quad (31)$$

ただし、

$$H \triangleq T^{-1} BB^T T^{-T} \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad (32)$$

T は、(25)、(26) のように極 λ_i と固有ベクトル配置の自由度 k_i を用いて表わされているので、(30)~(32) によって閉ループの可制御性グラミアン G_{CF} が λ_i と k_i によってパラメトライズされたことになる。

4. 数 値 例

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$w(t)$: 未知外乱

なる系に対し、状態フィードバックをかけて外乱を抑制することを考える。一般に外乱非干渉化可能な条件は非常に厳しく、この系も不可能な例であるが、

$$(A-BF)G_{CW} + G_{CW}(A-BF)^T = -DD^T$$

の解である外乱の可制御性グラミアン G_{CW} を用いる

Fig. 1 Responses of each state variable

と $\|CG_{CW}C^T\|$ なる評価によって外乱の出力への影響を定量化できる。したがって、この評価を小さくするような正定行列 G_{CW} を配置すればよい。ただし、安定性のため $(A-BF, D)$ が可制御である必要がある。

Fig. 1 は、

$$G_{CW} = \begin{bmatrix} 2^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{このとき, } CG_{CW}C^T = 2^{-6})$$

に配置した例で $x_1(=y)$ の振幅が他の状態変数に比べて抑えられている。外乱抑制問題は、極配置より部分空間の構造が重要であり、almost invariance を用いた方法⁹⁾ との関係は今後の課題である。

5. 結 言

グラミアン配置という制御系設計の考え方を提案し、状態フィードバックによって配置可能な条件と配置可能なグラミアンのクラスを極と固有ベクトル配置の自由度を用いて明らかにした。最近、状態の分散の観点から本稿と等価な問題が扱われ⁵⁾、その結果をもとに標準形での配置可能グラミアンが研究されている⁶⁾ ことを付記しておく。グラミアンは状態変数の座標系のとり方に依存するので、状態変数の物理的意味、スケールを考慮して決定するか、数値例の $\|CG_{CW}C^T\|$ のような入出力関係に基づいた評価関数を3章の結果を用いて最適化するのが妥当である⁷⁾。最後に、本研究に対して有益な助言をいただいた東京大学計数工学科新誠一助手に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) B. C. Moore: Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-26-1**, 17/32 (1981)
- 2) 小原, 北森: グラミアン配置に基づく制御系設計法, 第15回制御理論シンポジウム資料, 59/62 (1986)
- 3) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)
- 4) 正田, 小山, 三浦: 極配置問題におけるフィードバックゲインの自由度と低ゲインの導出, 計測自動制御学会論文集, **11-5**, 556/560 (1975)
- 5) A. F. Hotz and R. E. Skelton: A Covariance Control Theory, Proc. 24th Conf. Decision and Control, 552/557 (1985)
- 6) 安田, 今井, 平井: 状態フィードバックによる線型システムのグラミアン指定, 第9回 DST シンポジウム資料, 13/16 (1986)
- 7) 小原, 北森: グラミアン最適化に基づく低感度状態フィードバックの設計法, 第25回 SICE 学術講演会予稿集, 677/178 (1986)
- 8) J. C. Willems: Almost Invariant Subspaces: An Approach to High Gain Feedback Design-Part 1, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-26-1**, 235/252 (1981)