空気圧容器内壁面材の熱的特性が圧力応答に及ぼす影響†

—容器内空気と壁面材との熱の授受に関する理論的考察—

香川利春*・清水優史*・森田矢次郎*

Heat Conduction Effects of the Chamber Wall on the Air Pressure Dynamics

Toshiharu KAGAWA*, Masashi SHIMIZU* and Yajiro MORITA*

1. ま え が き

空気圧抵抗容量系の動特性においては容器内空気と容器壁との熱伝達が圧力応答に対し問題となるが¹⁾、容器壁面材の伝熱特性が低い場合には熱伝達だけでなく熱伝導の影響が出ると考えられる。つまり圧力応答を求める際に容器壁面材の温度を一定と仮定できない場合も生じる。そこで本報告は壁面材の伝熱特性の影響を調べるために容器内空気温度の初期値を与え、熱伝達率を一定とし、空気のもつ熱が熱伝達および熱伝導によっていかに壁面材に散逸するかについて考察を行ったものである。

2. 壁面材の熱的性質の影響

使用する主な記号

B_1 : ビオー数 ($=h \cdot L_w/K$), C : 壁面材比熱 [$J/(kg \cdot K)$], C_v : 空気定積比熱 [$J/(kg \cdot K)$], h : 熱伝達率 [$W/(m^2 \cdot K)$], K : 壁面材熱伝導率 [$W/(m \cdot K)$], $M = \rho_a \cdot L_a$ [kg/m^2], p : ラプラス演算子 [$1/s$], S : 伝熱面積 [m^2], θ_1 : 容器内空気平均温度 [K], $\theta_2(x, t)$: 容器温度 [K], θ_a : 大気温度 [K], ρ : 壁面材密度 [kg/m^3], ρ_a : 容器内空気密度 [kg/m^3], α : 壁面材温度伝導率 [m^2/s], λ_a : 空気熱伝導率 [$W/(m \cdot K)$]

Fig. 1 に示すような1次元モデルを考える。容器内空気の平均温度を $\theta_1(t)$ 、壁面との熱伝達率を h とする。壁の温度は $\theta_2(x, t)$ とし、表面からの距離 x に対しての温度分布の時間変化を考慮する。 $\theta_2(x, t)$ の初期値を一定、 $\theta_1(t)$ の初期値を θ_2 とは異なった値と仮定し、そこに生じる熱移動を考える。伝熱面積当り

Fig. 1 Air to wall heat transfer in a air chamber

の空気質量を M 、空気の定積比熱を C_v とすれば $\theta_1(t)$ は、

$$MC_v \frac{d\theta_1(t)}{dt} + h(\theta_1(t) - \theta_2(0, t)) = 0 \quad (1)$$

となる。熱伝達率 h は対流²⁾ などによって影響を受けると考えられるが、ここでは解析の第一歩として一定と仮定する。壁面材の表面での温度勾配は、

$$-K \frac{\partial \theta_2(0, t)}{\partial x} = h(\theta_1(t) - \theta_2(0, t)) \quad (2)$$

となる。ただし K は壁面材の熱伝導率である。壁面内部ではフーリエの熱伝導方程式が成立する。

$$\frac{\partial \theta_2(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta_2(x, t)}{\partial x^2} \quad (3)$$

ただし α は壁面材の温度伝導率 ($=K/(\rho \cdot C)$) である。この温度伝導率が十分大きい場合は容器壁の温度は変化しない。一方温度伝導率が小さい場合は壁材の熱抵抗が壁面での熱伝達の抵抗より大きくなる場合も考えられる。そこで本報告では容器内空気の熱が熱伝達と熱伝導によっていかに散逸するかを考える。

熱容量が面積当りの容器内空気の熱容量と等しい壁面材の厚さを L_w とする。

$$L_w = \frac{MC_v}{\rho C} \quad (4)$$

(4)式に示される代表長さを用いてビオー数を定義する。

† 第24回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭61・7)

* 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

(Received December 9, 1986)

(Revised March 14, 1987)

Key Words: heat transfer, pneumatic chamber, pressure response

$$B_i = \frac{hL_w}{K} \quad (5)$$

(5)式のビオ一数は空気の熱伝達による抵抗と壁面の伝熱抵抗の比であり、ビオ一数が大きいほど壁面材の熱伝導が熱抵抗として効果をもつといえる。壁面材の熱伝導率が無限大である場合は空気温度は1次遅れ系で壁温に整定する。

$$\theta_1(t) - \theta_2(0, 0) = \{\theta_1(0) - \theta_2(0, 0)\} e^{-ht/MC_v} \quad (6)$$

この整定時間 MC_v/h を用いて時間を無次元化する。

$$t' = \frac{ht}{MC_v} \quad (7)$$

容器壁表面からの距離 x は L_w を用いて無次元化する。

$$x' = \frac{x}{L_w} \quad (8)$$

(7), (8)式を用いて(1), (2)および(3)式を書き直す。

$$\frac{d\theta_1(t')}{dt} + \theta_1(t') - \theta_2(0, t') = 0 \quad (9)$$

$$-\frac{\partial \theta_2(0, t')}{B_i \partial x'} - \theta_1(t') + \theta_2(0, t') = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta_2(x', t')}{\partial t'} = \frac{\partial^2 \theta_2(x', t')}{B_i \partial x'^2} \quad (11)$$

初期条件を $\theta_1(0) = \theta_{10}$, $\theta_2(x', 0) = 0$ として(9), (10)式をラプラス変換する。ただし p はラプラス演算子を示す。

$$P\bar{\theta}_1(p) + \bar{\theta}_1(p) - \bar{\theta}_2(0, p) = \theta_{10} \quad (12)$$

$$-\frac{1}{B_i} \frac{d\bar{\theta}_2(0, p)}{dx'} - \bar{\theta}_1(p) + \bar{\theta}_2(0, p) = 0 \quad (13)$$

(12)および(13)式の $\bar{\theta}$ は θ のラプラス変換形を示す。

(11)式をラプラス変換すれば、

$$P\bar{\theta}_2(x', p) = \frac{1}{B_i} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_2(x', p)}{\partial x'^2} \quad (14)$$

となる。ここで $q^2 = PB_i$ とすれば、

$$\bar{\theta}_2 = Ae^{-qx'} + Be^{qx'} \quad (15)$$

の形になる。 $x' \rightarrow \infty$ で発散しない解を求めれば、

$$\bar{\theta}_1 = \frac{q + B_i}{q(q^2 + B_i q + B_i)} \theta_{10} \quad (16)$$

$$\bar{\theta}_2 = \frac{B_i^2 e^{-qx'}}{q(q^2 + B_i q + B_i)} \theta_{10} \quad (17)$$

となる。つぎに(16), (17)式を逆変換する。ただし空気圧容器では $0 < B_i < 1$ と考えられる。したがって、

$$q^2 + B_i q + B_i = (q + a)(q + b) \quad (18)$$

の2根は虚根となる。 θ_1, θ_2 を θ_{10} で $\theta'_1 = \theta_1/\theta_{10}$, $\theta'_2 = \theta_2/\theta_{10}$ と無次元化すれば θ'_1 および θ'_2 は、

Fig. 2 Average air temperature changes

Fig. 3 Wall temperature changes

$$\theta'_1 = -\frac{B_i - a}{a - b} e^{a^2 t'/B_i} \operatorname{erfc}\left\{a \sqrt{\frac{t'}{B_i}}\right\} + \frac{B_i - b}{a - b} e^{b^2 t'/B_i} \operatorname{erfc}\left\{b \sqrt{\frac{t'}{B_i}}\right\} \quad (19)$$

$$\theta'_2 = \frac{B_i}{b - a} \left[e^{a x' + (a^2 t'/B_i)} \operatorname{erfc}\left\{\frac{x'}{2\sqrt{\frac{t'}{B_i}}} + a \sqrt{\frac{t'}{B_i}}\right\} - e^{b x' + (b^2 t'/B_i)} \operatorname{erfc}\left\{\frac{x'}{2\sqrt{\frac{t'}{B_i}}} + b \sqrt{\frac{t'}{B_i}}\right\} \right] \quad (20)$$

Fig. 2 に B_i をパラメータとした $\theta'_1(t')$ の応答を示す。容器壁の性質としては B_i は(5)式で表わされるため、壁面材の熱伝導率と密度と比熱の積が大きいほど、容器内空気の熱を吸収しやすいといえる。 $B_i = 0$ は容器内空気の温度変化は熱伝達によってのみ決まる場合で、無次元化した温度の変化は $e^{-(ht/MC_v)}$ となる。通常、金属の容器ではほぼ $B_i = 0$ としてさしつかえない。Fig. 3 に一例として $B_i = 0.2$ の場合における容器壁面内の温度分布の時間変化を示す。この場合では壁表面の温度は空気初期温度の約11%まで上昇している。

3. まとめ

容器内空気の状態変化は容器壁からの熱移動によ

て支配されるが、容器壁面材の熱的性質がこの熱移動にどのような影響を及ぼすかについて簡単なモデルを提案しつぎの知見を得た。

1) 熱伝達率が一定の場合、容器壁面材の熱伝導率と密度と比熱の積が大きいほど容器内空気の熱を吸収しやすく、熱伝導の影響は出にくい。

2) 時間、距離について無次元化を行いビオー数をパラメータとした場合の空気温度の時間変化を明らか

にした。

参 考 文 献

- 1) 香川利治：空気力抵抗容量系の動特性における熱伝達の考察，油圧と空気圧，12-3, 209/212 (1981)
- 2) 清水，ほか：水平円筒圧力容器内空気の非定常自然対流，流れの可視化，5-18, 171/174 (1985)
- 3) H. S. Carslaw and J. C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids, Oxford at the Clarendon Press (1959)