比例制御入力を受ける離散型捕食-被食者系のカオスの挙動[†]

砂原善文*・安田寿彦**・森田洋二***・久田浩司****

Chaotic Behavior in a Class of Discrete Predator-Prey Systems with Constant Rate Control

Yoshifumi SUNAHARA*, Toshihiko YASUDA**, Yoji MORITA*** and Hiroshi HISADA****

By motivating the fact that discrete predator-prey systems often exhibit chaotic behavior, in this paper, control problems of a class of discrete predator-prey systems are studied.

By examining the stability of an equilibrium associated with the predator-prey system, it is first shown that the harvesting or supplying of predators, whose amount is proportional to the number of predator, is effective for preventing oscillations of populations. It is also shown that if the growth rate of predators is too large and the population of predators at the equilibrium is too large, then populations oscillate and these oscillations are stabilized by the harvesting of predators. On the other hand, if the growth rate of predators is too small, the supplying of predators is effective. The optimal harvesting policy yielding the maximum average harvest of predators is also derived.

Furthermore, by introducing the concept of the invariant domain, the constant rate harvesting investigated here is compared with the constant harvesting, and the former is shown to have an advantage from viewpoints of the conservation of ecosystems.

The validity of theoretical results presented

here is demonstrated by numerical experiments with various values of parameters.

Key Words: predator-prey system, chaos, constant rate control, control of population, conservation of ecosystems

1. 緒 言

カオス現象を示すつぎのような数学モデルで記述される離散型捕食-被食者系について考察する^{1),2)}.

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n - y_n) \quad (1.1a)$$

$$y_{n+1} = By_n \left(1 + \frac{x_n}{C}\right). \quad (1.1b)$$

上式で x_n および y_n は第 n 世代の被食者 (prey: 捕食者によって食べられる個体, 以下 P_x と略す) および捕食者 (predator: 被食者を食べる個体, 以下 P_y と略す) の個体数 (密度) を表わし, パラメータ A および B はそれぞれ P_x および P_y の増殖率を表わす正の定数であり, P_x の個体数が 0 の場合, P_y は必ず死滅するという仮定から, $B < 1$ である. パラメータ $C > 0$ は P_y の P_x に対する依存度を表わし, C が小さいほど P_y の増減が P_x の個体数に大きく依存する. P_y - P_x 系 (1.1) が, カオスなどの振動現象を示すとき, P_y および P_x の個体数を平衡状態へ収束させることは, 生態系保護の見地から必要事項である.

前報²⁾においては, 第 n 世代の P_y の捕獲あるいは供給量 H_n が $H_n \equiv H = \text{const.}$ と表わされる場合について考察し, 各世代に一定量の P_y を捕獲あるいは供給するときに, P_y , P_x の個体数が平衡状態へ収束するための条件を示した. しかし P_y の個体数が少ない場合に絶えず一定量を捕獲し続けると, P_y が死滅してしまう危険性が生じるため, このような一定値制御を加えることは好ましくない場合も多い. そこで本研究では, 捕獲あるいは供給量 H_n が,

$$H_n = Ey_n \quad (1.2)$$

† 第18回確率システムシンポジウムで発表 (昭61・10)

* 京都工芸繊維大学工学部 京都市左京区松ヶ崎

** 滋賀県立短期大学 彦根市八坂町 1900

*** 横河電機 (株) 東京都新宿区西新宿 1-25-1

**** 立石電機 (株) 京都市右京区花園

* Faculty of Engineering and Design, Kyoto Institute of Technology, Kyoto

** Siga Prefectural Junior College, Hikone

*** Yokogawa Electric Corp., Shinjuku-ku, Tokyo

**** Omron Tateisi Electronics Corp., Kyoto

(Received February 4, 1987)

(Revised April 16, 1987)

と記述される場合について考察する. このような比例制御は, 捕獲によって個体数を死滅させる危険性が少なく, P_y の個体数が少ない状態から制御を加え, P_y - P_x 系 (1.1) を平衡状態へ収束させることが可能である ((1.2) 式によって記述される制御の実例については文献 3) 参照). パラメータ E は, ある年度の捕獲量は, その年度の P_y の個体数を越えることができないので, $E > -1$ を満たす.

制御項 (1.2) をもつ P_y - P_x 系が, つぎのように記述されることはすでに示した²⁾:

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n - y_n) \\ y_{n+1} = B(1 + E)y_n\left(1 + \frac{x_n}{C}\right) \end{cases} \quad (1.3a)$$

$$(1.3b)$$

(1.3) 式によって定められる P_x および P_y の個体数の時間的変動は, P_y の捕獲 ($E < 0$) 量あるいは供給 ($E > 0$) 量を決定する比例定数 E に依存する. 本研究では, P_y の捕獲あるいは供給が P_y および P_x の個体数変動に与える影響について考察し, 主としてつぎのような点を解明する.

- (1) ゆきすぎた捕獲および供給による P_x あるいは P_y の死滅すなわち生態系の破壊をまねかないために, 捕獲 $E < 0$ あるいは供給 $E > 0$ に対して付加される制限.
- (2) P_y - P_x 系の個体数が振動しているとき, 個体数を平衡状態に収束させる制御則 E .
- (3) 平均捕獲量を最大にする制御則 $E < 0$.

さらに前報 2) のように, 各世代の P_y の捕獲あるいは供給量が一定値である場合と, P_y の個体数に比例する場合とを比較検討する.

2. 不動点

P_y - P_x 系 (1.3) の解挙動の定性的性質を調べるため, P_y - P_x 系 (1.3) の不動点について考察する. 非線形写像 $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} Ax(1 - x - y) \\ B(1 + E)y\left(1 + \frac{x}{C}\right) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

によって定義するとき, P_y - P_x 系 (1.3) はつぎのように記述される:

$$(x_{n+1}, y_{n+1})' = F(x_n, y_n).$$

ただし “'” はベクトルの転置を表わす. 点 $(x_f, y_f)' \in \mathbf{R}^2$ が

$$(x_f, y_f)' = F(x_f, y_f) \quad (2.2)$$

を満たすとき, 点 (x_f, y_f) を系 (1.3) の不動点と呼ぶ.

(1.3) 式より, x および y 軸が被食者および捕食者の個体数を表わす 2 次元平面の 2 直線

Fig. 1 Predator and prey isoclines and fixed points

$$l_1: x=0, \quad l_2: y=1-(1/A)-x$$

上に解 (x_n, y_n) が値をとるとき, $x_n = x_{n+1}$ となるので, この二つの直線は被食者等傾線 (prey isocline) と呼ばれる⁴⁾. 同様に 2 直線

$$l_3: y=0, \quad l_4: x=C\left[\frac{1}{B(1+E)}-1\right]$$

は捕食者等傾線 (predator isocline) と呼ばれる⁴⁾. 被食者および捕食者等傾線の交点が不動点となる (注 1). P_y - P_x 系 (1.3) の不動点は

- (i) 直線 l_1 と l_3 の交点: $z_1 = (0, 0)$
- (ii) 直線 l_2 と l_3 の交点: $z_2 = (1 - (1/A), 0)$
- (iii) 直線 l_2 と l_4 の交点:

$$z_3 = \left(C\left\{ \frac{1}{B(1+E)} - 1 \right\}, 1 - \frac{1}{A} - C\left\{ \frac{1}{B(1+E)} - 1 \right\} \right)$$

の 3 点である (Fig. 1 参照). 不動点 z_1 および z_2 によって示される P_y - P_x 系 (1.3) の平衡状態においては, P_y あるいは P_y, P_x の両者が死滅している. したがって, 生態系保護を目的とする本考察においては, 不動点 z_3 に関する考察が重要な役割を果たす.

2.1 不動点の存在条件

系 (1.3) の不動点が物理的意味をもつためには, その x および y 座標が非負でなければならない.

[補題 1] 不動点 $z_1 \sim z_3$ は, つぎの条件のもとで (x, y) 平面の第 1 象限 $Q_1 \triangleq \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}$ 内に存在する.

(E-1) z_1 : 常に第 1 象限 Q_1 内に存在する.

(E-2) z_2 : $A \geq 1$.

(E-3) z_3 : $A \geq 1$, $(2.3a)$

$$\frac{AC}{B(AC + A - 1)} - 1 \leq E \leq \frac{1}{B} - 1 \quad (2.3b)$$

《定理 1》 つぎの条件のいずれかが成立するとき,

(注 1) $B(1+E)=1$ のとき l_1 と l_4 が一致し, 不動点集合 $\{x=0\}$ が存在するが, この不動点集合上の不動点は, 漸近安定ではない.

Fig. 2 Phase space and fixed point

P_y あるいは P_x は死滅する.

$$(H-1) \quad A < 1,$$

$$(H-2) \quad A \geq 1, \quad E > 1/B - 1,$$

$$(H-3) \quad A \geq 1, \quad E < \frac{AC}{B(AC+A-1)} - 1.$$

(証明) 条件(H-1)が成立するとき, 系(1.3)の解 x_n が0に収束することは明らかである. Fig. 2 は条件(H-2)および(H-3)が成立する場合の系の解挙動を示す. Fig. 2の矢印は, ある世代 n に解 (x_n, y_n) がその領域に含まれた場合に, つぎの $(n+1)$ 世代の P_y および P_x の個体数が n 世代の個体数より増加するか減少するかを示している. たとえば Fig. 2(b)の領域 D_4 に描かれた右下向の矢印は, つぎの世代には P_y の個体数は減少し, P_x の個体数は増加することを示している. Fig. 2(a)より, (H-2)が成立する場合, 初期値が D_1 に含まれる系(1.3)の解は, 世代が進行したとき領域 D_2 に含まれる. さらに世代が進行したとき, 解は y 軸を横切って $(x-y)$ 平面の第1象限からはずれる. すなわち, 条件(H-2)が成立するとき P_x が死滅する. 同様に, 条件(H-3)が成立するとき, P_x あるいは P_y が死滅することが示される. (証明終)

定理1より, 平衡状態(不動点) z_3 が存在しないとき, P_y あるいは P_x が死滅する. したがって, 補題1の条件(2.3b)によって与えられる上限および下限を越える制御則 E に従って P_y を捕獲あるいは供給するとき, P_y あるいは P_x は死滅する. これらの上限および下限は, P_x および P_y の増殖率 A, B , および P_y の P_x に対する依存度 C によって決定される.

2.2 安定性

個体数を平衡状態に収束させる制御則 E を導出するため, 不動点の安定性について考察する.

不動点が安定かつ初期値が不動点のある近傍に含まれる解が $n \rightarrow \infty$ において必ず不動点に収束するならば, 不動点は漸近安定であるという. 不動点 z_f における写像 F のヤコビアン固有値を $\lambda_{\pm}(z_f)$ とすると

き, $|\lambda_{\pm}(z_f)| < 1$ ならば, 不動点 z_f は漸近安定である.

《定理2》 各不動点は, つぎの条件が満たされている場合, 漸近安定である.

$$(S-1) \quad z_1: A < 1, E < (1/B) - 1$$

$$(S-2) \quad z_2: 1 < A < 3, E < \frac{AC}{B(AC+A-1)} - 1$$

$$(S-3) \quad z_3: (i) \quad 1 < A \leq 3 \text{ の場合}$$

$$\frac{AC}{B(AC+A-1)} - 1$$

$$< E < \min \left\{ \frac{1}{B} - 1, \frac{2AC}{B(AC+A-1)} - 1 \right\} \quad (2.4a)$$

$$(ii) \quad 3 < A \text{ の場合}$$

$$\frac{1}{2B(AC+A-1)} \{4AC+A+3 - \sqrt{(4AC+A+3)^2 - 12AC(AC+A-1)}\} - 1 < E < \min \left\{ \frac{1}{B} - 1, \frac{2AC}{B(AC+A-1)} - 1 \right\} \quad (2.4b)$$

定理2の(2.4)式を満たす制御則 E のもとで, P_y および P_x の個体数は平衡状態 z_3 に収束する. 定理2の証明に必要な補題を示す.

【補題2】 不動点 z_3 の (x, y) 座標を (p, q) とすると,

$$p > 0, \quad (2.5a)$$

$$\max \left\{ 0, \frac{2C}{B(1+E)} \left(1 - \frac{2}{Ap} \right) \right\} < q < \frac{C}{B(1+E)} \quad (2.5b)$$

が満たされるならば, 不動点 z_3 は漸近安定である.

(補題2の証明) p および q は

$$p = C \left\{ \frac{1}{B(1+E)} - 1 \right\} \quad (2.6a)$$

$$q = 1 - (1/A) - p \quad (2.6b)$$

を満たす. (2.6a)式より

$$B(1+E) \{1 + (p/C)\} = 1, \quad (2.7a)$$

(2.6b)式より

$$A(1 - 2p - q) = 1 - Ap \quad (2.7b)$$

を得る. 写像 F のヤコビアンを考え, 点 (x, y) における固有値を求めると

$$\lambda_{\pm}(x, y) = \frac{1}{2} \left[A(1 - 2x - y) + B(1+E) \left(1 + \frac{x}{C} \right) \pm \left\{ \{A(1 - 2x - y) - B(1+E)(1 + (x/C))\}^2 - 4AB(1+E)xy/C \}^{1/2} \right\} \right] \quad (2.8)$$

を得る. 上式に不動点 z_3 の座標 (p, q) を代入し, (2.7)式を用いれば

$$\lambda_{\pm}(z_3) = \frac{1}{2} \left\{ (2 - Ap) \pm \sqrt{(Ap)^2 - \frac{4AB(1+E)}{C}pq} \right\} \quad (2.9)$$

を得る。(2.9)式より、 $\lambda_{\pm}(z_3)$ が実数かつ $|\lambda_{\pm}(z_3)| < 1$ が成立するのは

$$\max \left\{ 0, \frac{2C}{B(1+E)} \left(1 - \frac{2}{Ap} \right) \right\} < q \leq \frac{AC}{4B(1+E)p} \quad (2.10)$$

が満たされる場合である。さらに、 $\lambda_{\pm}(z_3)$ が虚数かつ $|\lambda_{\pm}(z_3)| < 1$ が成立するのは

$$p > 0, \frac{AC}{4B(1+E)}p < q < \frac{C}{B(1+E)} \quad (2.11)$$

である。(2.10)および(2.11)式より条件(2.5)を得る。(補題2の証明終)

(定理2の証明) 点 (x, y) における写像 F のヤコビアン固有値(2.8)式に不動点 z_1 および z_2 の座標を代入し、 $|\lambda_{\pm}(z_1)| < 1$ および $|\lambda_{\pm}(z_2)| < 1$ が成立する条件を求めることにより、(S-1)および(S-2)が得られる。(S-3)は補題2を用いて得られる。補題2の(2.5a)式に z_3 の x 座標を代入すれば、

$$E < (1/B) - 1 \quad (2.12)$$

を得る。条件(2.5b)式の後半部分 $q < C/\{B(1+E)\}$ に z_3 の y 座標を代入すれば、

$$E < \frac{2AC}{B(AC+A-1)} - 1 \quad (2.13)$$

を得る。(2.12)および(2.13)式より条件(S-3)の E の上限を得る。また

$$\max \left\{ 0, \frac{2C}{B(1+E)} \left(1 - \frac{2}{Ap} \right) \right\} = \begin{cases} 0 & \text{for } 1 < A \leq 3 \\ \frac{2C}{B(1+E)} \left(1 - \frac{2}{Ap} \right) & \text{for } 3 < A \end{cases}$$

に注意すれば、条件(2.5b)式の下限は

$$0 < q \quad \text{for } 1 < A \leq 3 \quad (2.14a)$$

$$\frac{2C}{B(1+E)} \left(1 - \frac{2}{Ap} \right) < q \quad \text{for } 3 < A \quad (2.14b)$$

となる。(2.14)式に z_3 の x および y 座標を代入して、条件(S-3)の下限を得る。(証明終)

平衡状態 z_3 が漸近安定であるための条件を示す補題2より、平衡状態 z_3 が Fig. 3 の斜線部に含まれるとき、個体数は平衡状態 z_3 に収束するが、 z_3 が被食者等傾線 l_2 上の区間 I_1 および I_2 に含まれるとき、 z_3 は不安定となり個体数が振動するという結論を得る。区間 I_1 上の平衡状態 z_3 においては、 P_y の個体数が多すぎ P_x の個体数が少なすぎるため、平衡状態

Fig. 3 Stable region of z_3 in the x - y plane

が不安定となる。区間 I_2 上の平衡状態においては、 P_y の個体数が少なすぎ P_x の個体数が多すぎる。そこで定理2の(2.4)式を満たす制御を加えることにより、平衡状態における個体数が適切な値になり、平衡状態が漸近安定となる。

補題1および定理2を用いて、不動点の存在と安定性について P_x の増殖率 A と制御則 E に注目してまとめたものが Fig. 4 である。

- R_0 : z_1 exists and is unstable
- R_1 : z_2 exists and is stable
- R_2 : z_1 and z_2 exist and are unstable
- R_3 : z_1 , z_2 and z_3 exist and are unstable
- R_4 : z_1 , z_2 and z_3 exist, z_1 and z_2 are unstable and z_3 is stable
- R_5 : z_1 and z_2 exist, z_1 is unstable and z_2 is stable

$$m_1: E = \frac{2AC}{B(AC+A-1)} - 1$$

$$m_2: E = \frac{AC}{B(AC+A-1)} - 1$$

$$m_3: E = \frac{1}{2B(AC+A-1)} (4AC+A+3 - \sqrt{(4AC+A+3)^2 - 12AC(AC+A-1)}) - 1$$

Fig. 4 A - E parameter space for existence and stability of fixed points where $B=0.3$ and $C=0.1$

2.3 安定化可能性

本節では、どのような場合に P_y を捕獲あるいは供給すれば、 P_y - P_x 系の個体数の振動を防ぐことができるかについて考察する。

P_y - P_x 系(1.3)の解がたとえばカオスのような振動現象などを示す場合に、適切な制御 ($E \neq 0$) を加えることによって、その解を漸近的に平衡状態に収束させて個体数の振動を防ぐことができるとき、その P_y - P_x 系は安定化可能であると定義する。同様に、不安定な不動点が適切な制御によって漸近安定な不動点になるとき、その不動点は安定化可能であると定義する。 P_y - P_x 系の安定化には、不動点 z_3 の安定化が必要である。

《定理3》 (i) 系(1.3)の不動点 z_3 は、条件

$$1 < A \quad \text{for } C \geq 1 \quad (2.15a)$$

$$1 < A < 9/(1-C) \quad \text{for } C < 1 \quad (2.15b)$$

および

$$B \geq \frac{2AC}{(1+E)(AC+A-1)} \quad (2.16)$$

が成立するとき、パラメータ E を減少させることによって安定化可能である。(ii) 条件(2.15)および

$$B \leq \frac{1}{2(1+E)(AC+A-1)} \{4AC+A+3 - \sqrt{(4AC+A+3)^2 - 12AC(AC+A-1)}\} \quad (2.17)$$

が成立するとき、パラメータ E を増加させることによって安定化可能である。

《系》 (i) 制御を受けない系(1.1)の不動点 z_3 は、条件(2.15)および

$$B \geq \frac{2AC}{AC+A-1} \quad (2.18)$$

が成立するとき、 P_y の捕獲によって安定化可能である。(ii) 条件(2.15)および

$$B \leq \frac{1}{2(AC+A-1)} \{4AC+A+3 - \sqrt{(4AC+A+3)^2 - 12AC(AC+A-1)}\} \quad (2.19)$$

が成立するとき、 P_y の供給によって安定化可能である。

(定理3および系の証明) 補題2より、不動点 z_3 が Fig. 3 の区間 I_1 あるいは I_2 に含まれるとき、不動点 z_3 を適切な制御によって安定化する必要がある。パラメータ E が減少したとき、捕食者等傾線 l_4 が x 軸正方向に平行移動し、不動点 z_3 の x 座標が増加することに注意すれば、不動点 z_3 が区間 I_1 に含まれている場合、 E を減少させ適切な E の値を選択することによって、 P_y - P_x 系の不動点 z_3 を Fig. 3 の斜線部に入れることができる。したがって、不動点 z_3 が区間 I_1 に含まれているならば、 E を減少させることによって、また区間 I_2 に含まれているならば、 E を

増加させることによって不動点 z_3 は安定化可能である。条件(2.16)は不動点 z_3 が I_1 に含まれる条件、条件(2.17)は I_2 に含まれる条件を示している。さらに条件(2.15)は、定理2の(2.4)式を満たす E が存在する条件であるので、条件(2.15)が成立するとき z_3 は適当な E によって常に安定化可能である。定理3の系は、条件(2.16)および(2.17)において $E=0$ とすることによって導出される。(証明終)

定理3より、条件(2.15)が成立するとき、不安定な不動点 z_3 は常に安定化可能である。また定理3の系の(2.18)式は、 P_y の増殖率 B が大きく平衡状態における P_y の個体数が多すぎる場合には、 P_y および P_x の個体数の振動を防ぐために、 P_y の捕獲が有効であることを示す。また(2.19)式は、 P_y の増殖率が小さい場合には、 P_y の供給が有効であることを示す。

3. 捕獲の最適化

P_y の捕獲 ($E < 0$) を行う場合を考え、個体数が平衡状態に収束しかつ平均捕獲量

$$H_a \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (-H_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (-E)y_i$$

を最大にする制御則 E について考察する。このような問題は、資源の保護および有効利用という見地から重要な問題となる。 P_y の個体数の漸近的挙動が振動している場合、平均捕獲量 H_a を解析的に求めることができないため、捕獲の最適化について考察できない。しかしながら、 P_y および P_x の個体数が平衡状態 $z_3 = (p, q)$ に漸近的に収束する場合には、平均捕獲量は

$$\begin{aligned} H_a &= -Eq \\ &= -E \left[1 - \frac{1}{A} - C \left\{ \frac{1}{B(1+E)} - 1 \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

によって与えられる。条件 $dH_a/dE=0$ より

$$E = E_{opt} = \sqrt{\frac{AC}{B(AC+A-1)}} - 1 \quad (3.2)$$

のとき、平均捕獲量 H_a は最大値

$$H_{a \max} = \left(\sqrt{\frac{AC+A-1}{A}} - \sqrt{\frac{C}{B}} \right)^2 \quad (3.3)$$

となる。

4. 不変領域

$(x-y)$ 平面の領域 $\mathcal{D}$ が $F(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ を満たすとき、 $\mathcal{D}$ を写像 F の不変領域と呼ぶ。初期値が不変領域に含まれる場合、系(1.3)の解が常に不変領域に含まれることは、不変領域の定義より明らかである。 $(x-y)$ 平面の第1象限に含まれる不変領域が存在すれば、初期値が不変領域に含まれる P_y - P_x 系(1.3)の P_y および

P_x の個体数は常に正となる.

《定理 4》 領域

$$\mathcal{D}_+ = \{(x, y) : x > 0, y > 0, \\ 1 - x - y > 0\}$$

は, つぎの条件が満たされるとき, 非線形写像 F の不変領域となる.

(i) $0 < C \leq 1$ の場合

$$0 < A < 4,$$

$$-1 < E < \frac{4C}{B(1+C)^2} - 1 \quad (4.1)$$

(ii) $1 < C$ の場合

$$0 < A < 4, \quad -1 < E < (1/B) - 1 \quad (4.2)$$

定理 4 の証明法は, 文献 1) および 2) と同様であるので省略する.

定理 4 より, $A < 4$ ならば, (4.1) 式が成立しない場合を除き, P_y をすべて捕獲 ($E = -1$) しないかぎり $\mathcal{D}_+$ が不変領域となる. また, 第 1 象限に含まれる不変領域で, $\mathcal{D}_+$ より大きい不変領域は存在しない. したがって P_y の捕獲量が P_y の個体数に比例している場合, 捕獲によって P_y - P_x 系が破壊される危険性が少ないことを, 定理 4 は示している.

5. 数値実験

4 章までの解析結果の有効性を, デジタルコンピュータを用いた数値実験によって検証する.

制御を受けない P_y - P_x 系 (1.1) の P_x の増殖率 A , および P_y の P_x に対する依存度 C がそれぞれ $A = 3.9$ および $C = 0.1$ であるとき, 定理 3 の系より, P_y の増殖率 B の値によってつぎの三つの場合が存在する:

- (i) $1 > B \geq 0.2370 \dots$ ならば, 不動点 z_3 は不安定であるが, P_y の捕獲によって安定化可能である.
- (ii) $0.2370 \dots > B > 0.1466 \dots$ ならば, 不動点 z_3 は漸近安定である.
- (iii) $0.1466 \dots \geq B > 0$ ならば, 不動点 z_3 は不安定であるが, P_y の供給によって安定化可能である.

Fig. 5 は, P_y - P_x 系 (1.1) のパラメータを $A = 3.9$, $B = 0.3$ および $C = 0.1$ と設定し, デジタルコンピュータによって求めた P_y - P_x 系の解過程を示す. Fig. 5(a) は初期値が $(x_0, y_0) = (0.2, 0.5)$ である場合の第 50 世代までの P_y および P_x の個体数を示す. Fig. 5(b) は初期値を (1.1) 式を用いて 500 回写像した後に, さらに 20,000 世代分の解 (x_n, y_n) を求め, $(x-y)$ 平面に描いたものである. Fig. 5 は, 制御を受けない P_y - P_x 系の個体数変動がカオス的となることを示している. 定理 2 より, 制御則 E が $-0.5111 \dots$

Fig. 5 Typical behavior of uncontrolled predator-prey system where $A = 3.9$, $B = 0.3$ and $C = 0.1$

Fig. 6 Typical behavior of controlled predator-prey system where $A = 3.9$, $B = 0.3$, $C = 0.1$ and $E = -0.4$

$< E < -0.2097 \dots$ を満たすとき, 不動点 z_3 は漸近安定である. Fig. 6 は $E = -0.4$ の設定で P_y が捕獲される P_y - P_x 系 (1.3) の解を表わす. Fig. 6 より, P_y が $E = -0.4$ の設定で捕獲されるとき, P_y - P_x 系 (1.3) の解が不動点 $z_3 = (0.4555 \dots, 0.2880 \dots)$ に漸近的に収束することが確認された. 以上の数値実験結果は, 定理 2 および 3 の有効性を示している.

Fig. 7 は, デジタルコンピュータによって計算した P_y - P_x 系 (1.3) の解過程を用いて, 平均捕獲量と解の極限集合の y 軸への写影を制御則 E との関係としてまとめた. Fig. 7(b) においては, 初期値 $(x_0, y_0) = (0.2, 0.5)$ を (1.3) 式を用いて 500 回写像した後さらに 2,000 個の解を求め, その y 座標のみを縦軸に描いた. Fig. 7(b) のみでは, 極限軌道がリミットサイクルであるかカオス的挙動であるか判別できないので, Fig. 7(c) に Lyapunov 指数 λ の値を示した. Lyapunov 指数 λ は, 次式を用いた数値計算によって近似的に求めた⁵⁾:

$$\lambda_N = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log \|DF(x_i, y_i) \cdot e_i\|,$$

$$e_{i+1} = \frac{DF(x_i, y_i) \cdot e_i}{\|DF(x_i, y_i) \cdot e_i\|}$$

ただし, DF は写像 F のヤコビアンであり, e_0 は $\|e_0\| = 1$ を満たす任意の 2 次元ベクトルであり, λ_N は e_0 の選択に無関係に一定値に収束する. $\lambda < 0$ なら

(a) The average harvest vs. E (b) The limit set vs. E (c) Lyapunov exponent vs. E **Fig. 7** Optimal harvesting policy where $A=3.9$, $B=0.3$ and $C=0.1$

ば P_y - P_x 系の解は平衡解あるいは周期解に収束し、 $A=0$ ならば解はリミットサイクルに収束し、 $A>0$ ならば解はカオス的となる。Fig. 7(a)は、平均捕獲量 H_a が $E=-0.3714\dots$ のとき最大値 $H_a=0.1163\dots$ となることを示している。この結果は(3.2)および(3.3)式の妥当性を示している。Fig. 7(b)および(c)より、制御パラメータ E が $0>E>-0.110\dots$ のとき、解過程はカオス→周期解→カオス→…という分岐現象を示し、 $E<-0.110\dots$ のときリミットサイクルが出現し、 $E<-0.209\dots$ のとき不動点 z_3 に収束し、 $E<-0.511\dots$ のとき不動点 z_3 が再び不安定となり、 x 軸近傍においてカオスの挙動を示すことがわかる。

6. 比例制御と一定値制御の比較

各世代における P_y の捕獲量あるいは供給量が、 P_y の個体数に比例する場合（比例制御）と一定値である場合（一定値制御）を比較する。

P_y および P_x の個体数の振動を防ぐために、 P_y の捕獲あるいは供給のどちらを選択するかについて、以下のような相違がある。

（比例制御） P_y の増殖率が大きい場合は P_y の捕

(a) Constant rate control (b) Constant control

Fig. 8 Stable range of z_3 on prey isocline

獲、 P_y の増殖率が小さい場合には P_y の供給によって個体数の振動を防ぐことができる。

（一定値制御）どのような場合でも P_y の供給によって個体数の振動を防ぐことができ、ある条件のもとで P_y の捕獲によって個体数の振動を防ぐことができる。ただし、捕獲あるいは供給によってもたらされた平衡状態のどちらのほうが望ましいかは、パラメータ A , B および C の値によって異なる²⁾。

パラメータ A , B および C が、 $A=3.9$, $B=0.3$ および $C=0.1$ であるとき、制御を受けない P_y - P_x 系が示すカオスの挙動の安定化について比較する。比例制御では、 P_y の捕獲によってのみ安定化可能であり、制御パラメータ E が $-0.5111\dots < E < -0.2097\dots$ のとき不動点 z_3 は漸近安定になる。一定値制御では、 P_y の捕獲および供給のいずれによっても安定化可能で、各世代の捕獲量 H が $-0.1953\dots < H < -0.1524\dots$ のとき、および供給量 H が $0.3026\dots < H < 0.5205\dots$ のとき不動点 z_3 は漸近安定になる。制御則 E が $-0.5111\dots < E < -0.2097\dots$ のとき z_3 は Fig. 8(a) の開区間 I_E に含まれ、 H が $0.3026\dots < H < 0.5205\dots$ のとき Fig. 8(b) の開区間 I_{H1} , $-0.1953\dots < H < -0.1524\dots$ のとき I_{H2} に含まれる。Fig. 8(b)より、 P_y の一定量の供給がもたらす安定な不動点 z_3 においては、 P_x の個体数が非常に小さく、 P_y - P_x 系の望ましい平衡状態とはいえない。したがって、この具体例では一定値制御においても P_y の捕獲による安定化が望ましい。

つぎに、ゆきすぎた捕獲による P_y - P_x 系の破壊の危険性を、不変領域に関する考察によって比較する。

（比例制御）不変領域は、ほとんどすべての $E < 0$ に対して $\mathcal{D}_+$ である。

（一定値制御）不変領域は捕獲量 $H < 0$ によって異なり、理論的考察によって不変領域を決定できない。

Fig. 9 Invariant domain with constant rate and constant harvesting

具体例によって検討する. $A=3.9$, $B=0.3$ および $C=0.1$ のとき, $E=-0.3$ とした比例制御を受ける P_y-P_x 系の不動点 $z_3=(0.3761\cdots, 0.3673\cdots)$ は漸近安定であり, 初期値が D_+ に含まれる解過程は z_3 に収束する. 一定値制御において $H=-0.1575\cdots$ としたとき, 不動点 z_3 の座標は比例制御 $E=-0.3$ の場合と等しく, 漸近安定である. しかしながら, 初期値が不変領域 D_H (Fig. 9 参照) に含まれないとき, 解は $(x-y)$ 平面の第 1 象限から飛び出す. D_H は数値計算によって求めなければならない. 以上の考察より, 比例制御においては, 現在状態にかかわらず捕獲を行うことができるが, 一定値制御を行う場合は, 現在状態を考慮する必要がある, 比例制御のほうが一定値制御より生態系破壊の危険性が少ない.

7. 結 言

本論文では, 捕食者の個体数に比例した捕獲あるい

は供給を制御入力として受ける離散型捕食-被食者系の平衡状態の安定性について考察し, 捕食者の捕獲あるいは供給が個体数の振動を防ぎ, 安定な平衡状態に導くために有効であることを示した. 捕食者の増殖率が大きい場合には捕食者の捕獲が, 捕食者の増殖率が小さい場合には捕食者の供給が有効な手段であることが解析的に示され, 制御を受けないときに振動している個体数を安定な平衡状態に導く制御則を導出した. また, 平均捕獲量を最大にする方策, および平衡状態の存在と捕食者あるいは被食者の死滅との関係を明らかにした. さらに, 捕獲量が捕食者の個体数に比例する場合は, ゆきすぎた捕獲によって生態系を破壊してしまう危険性が, 捕獲量が一定値である場合より少なく, 環境保全の見地より, 比例制御のほうが一定値制御よりすぐれていることを示した.

参 考 文 献

- 1) 早間 慧: ある餌食-捕食者系の離散モデルのダイナミクスとカオス, 生物物理, **20-3**, 175/183 (1980)
- 2) 砂原, ほか: 一定値制御入力を受ける離散型捕食-被食者系のカオスの挙動, 計測自動制御学会論文集, **23-6**, 611/618 (1987)
- 3) C. W. Clark: Mathematical Bioeconomics, Wiley (1976)
- 4) F. Brauer and A. C. Soudack: Optimal Harvesting in Predator-Prey Systems, Int. J. of Control, **41-1**, 111/128 (1985)
- 5) G. Benettin, L. Galgani and J. Strelcyn: Kolmogorov Entropy and Numerical Experiments, Physical Review A, **14-6**, 2338/2345 (1976)