ロボットマニピュレータの非線形適応制御[†]

宮 里 義 彦*・大 島 康次郎**

Nonlinear Adaptive Control for Robotic Manipulators

Yoshihiko MIYASATO* and Yasujiro OSHIMA**

In controlling robotic manipulators, dynamic characteristics, such as inertia-moments, centrifugal and Coriolis forces, and gravitational loadings, are to be considered. But those effects are highly nonlinear, and that makes it difficult to achieve the quality dynamic performance by conventional linear control techniques.

To overcome those difficulties, many approaches have been examined based on model-reference adaptive control schemes. But most of them are only applications of the usual method to the linearized approximations of nonlinear manipulator models, and then are not useful in controlling over a wide range of motions.

In this paper, we propose a new control scheme, in which the quality dynamic performance is achieved without exact knowledge of nonlinear elements and accelerations. It is considered to be a kind of adaptive sliding mode control that adjusts the control gains adaptively. Finally some simulation results show the effectiveness of this method.

Key Words: adaptive control, robotic manipulator, sliding mode control, model reference

1. 緒 言

ロボットマニピュレータに代表される非線形機械システムを高速、高精度で制御するためには、高速運転時に現れる遠心力、コリオリ力の影響、慣性モーメントの変動による影響、負荷変動による影響などを速や

かに補償する必要がある。しかしこれらの影響は数学モデルをたてた場合、多変数系の非線形干渉項として現れるためその補償は容易ではない。

これに対し、近年モデル規範形適応制御系の手法をロボットマニピュレータに適用し、上記の問題に対処しようとする研究が多くなされている。ところが文献1), 2)に代表されるものは基本的に対象の線形近似モデル(ときに線形1入出力モデル)に対し従来の手法を適用するものであって高速運転時の動的制御には不向きである。一方、ロボットマニピュレータの非線形構造は容易に知ることができる性質を利用して既知の非線形関数を内部に組み込んで非線形モデル規範形適応制御系を構成するものもある³⁾。しかるにこの手法は既知の非線形構造を利用するために対象の加速度情報を必要とする点や、非線形関数の分だけ調整すべきパラメータの数がふえることから、必ずしも高速運転時の制御には向かないと思われる。同手法で速度情報までで制御系を構成しようすると慣性行列の逆行列を求めなければならないが、その逆行列の非線形構造は容易に求められない。

本稿はこれらに対し回転型のロボットマニピュレータを制御対象として不連続型の制御方式により対象の非線形構造を完全に知ることなく、速度項までの情報により適応制御系を構成するものである。従来の不連続型の制御方式(VSS, 受動的適応制御, Unit Vector Methodなど)^{4)~7)}では対象の未知性の影響が入力の切り換えゲインの大きさに含まれ、このゲインを十分大きくとることにより問題に対処してきた。しかしこの未知性の中には非線形項(たとえば遠心力、コリオリ力による状態の2次項など)が含まれることがあり定数とは見なせない場合があったり、また対象やアクチュエータの負担を減らすためにゲインをあまり大きくとれない場合がある。本稿はこの切り換えゲインを内部の非線形要素も含めて適応的に自動調整する、適応型の不連続制御について述べる。

† 第9回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表(昭61・12)

* 統計数理研究所 東京都港区南麻布 4-6-7

** 千葉工業大学 習志野市津田沼 2-17-1

* The Institute of Statistical Mathematics, Minato-ku, Tokyo

** Chiba Institute of Technology, Narashino (Received April 11, 1987)

(Revised October 15, 1987)

2. 問題設定

本稿では以下の式で表わされる未知の n 自由度の回転型マニピュレータを考える⁸⁾.

$$J(\theta)\ddot{\theta} + X(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) = u \quad (2.1)$$

ただし $J(\theta) \in R^{n \times n}$; 慣性行列, $X(\theta, \dot{\theta}) \in R^n$; 遠心力, コリオリ力, 摩擦力項, $G(\theta) \in R^n$; 重力項, $\theta \in R^n$; 関節角, $u \in R^n$; 制御トルクである. 上式を状態変数表示する^{6), 7)}.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ h_1 \end{bmatrix} \\ = Ax + Bu + h \quad (2.2)$$

ここに $A_1 \in R^{n \times n}$, $A_2 \in R^{n \times n}$, $h_1 \in R^n$ は $J(\theta)$, $X(\theta, \dot{\theta})$, $G(\theta)$ より決まる非線形関数であり, また $B_1 = J(\theta)^{-1}$, $x = [\theta^T, \dot{\theta}^T]^T$ である. 特に h_1 の中には後述の (4.3) 式を満たす範囲で外乱が含まれてもよい (たとえば一様有界な外乱など).

これに対し規範モデルはつぎの既知の n 入力 $2n$ 次元線形系を考える.

$$\dot{x}_M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{M1} & A_{M2} \end{bmatrix} x_M + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{M1} \end{bmatrix} r \\ = A_M x_M + B_M r \quad (2.3)$$

ただし $A_{Mi} \in R^{n \times n}$ ($i=1, 2$), $B_{M1} \in R^{n \times n}$ は定数行列で $A_M \in R^{2n \times 2n}$ は安定行列, r は一様有界とする. 以上の設定のもとで制御誤差

$$e = x_M - x \quad (2.4)$$

が 0 に収束するように制御トルク u を決定する. ただし x , x_M はともに測定可能とする.

(注意) (2.1) 中の $J(\theta)$, $X(\theta, \dot{\theta})$, $G(\theta)$ は物理的考察より比較的容易に非線形構造がわかり, 既知の非線形関数と未知の線形パラメータを分離することができる³⁾. 一方, 速度情報までで制御系を構成するためには (2.2) に基づかなければならないが, A_1 , A_2 , B_1 , h_1 には $J(\theta)^{-1}$ の要素が含まれる. この要素の非線形構造を知るのは困難であり, 既知の非線形関数と未知の線形パラメータに分離することができない. なお (2.2) 式の具体的な導出方法については文献 6), 7) および付録などを参照のこと.

3. Exact Model Matching のための条件

状態変数 x と参照入力 r を使ったとき, (2.1) で表わされる制御対象と (2.3) で表わされる規範モデルの exact model matching が実現するための条件としてつぎの補題が知られている.

[補題]⁶⁾

exact model matching が実現するための条件式は

以下のとおりである.

$$\begin{aligned} (I - BB^+)B_M &= 0 & (I - BB^+)h &= 0 \\ (I - BB^+)(A_M - A) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし

$$B^+ = (B^T B)^{-1} B^T \quad (B \text{ の pseudo-inverse})$$

である. なおこのとき

$$u = -K_x x + K_u r + K_h h \quad (3.2)$$

ただし

$$K_x = -B^+(A_M - A), \quad K_u = B^+ B_M, \quad K_h = -B^+$$

により exact model matching が実現される.

(証明略)

回転型のロボットマニピュレータにおいては $B_1 = J(\theta)^{-1}$ は正定対称となるから⁸⁾

$$B^+ = [0 \quad B_1^{-1}] \quad (3.3)$$

となって補題の条件が満たされることは明らかである. なおこの性質は次章で誤差方程式を導出する際に利用される.

4. 非線形適応制御

制御入力 u をつぎのように定める.

$$u = K_1 x + K_2 r + k_3 + \theta_1 x + \theta_2 r + \theta_3 \quad (4.1)$$

ただし $K_1 \in R^{n \times 2n}$, $K_2 \in R^{n \times n}$, $k_3 \in R^n$ は定数行列であり, $\theta_1 \in R^{n \times 2n}$, $\theta_2 \in R^{n \times n}$, $\theta_3 \in R^n$ は非線形の可調整パラメータである. (4.1) を (2.2) に代入し補題を使って誤差方程式を導出する.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x}_M - \dot{x} \\ &= A_M x_M + B_M r - Ax - Bu - h \\ &= A_M e + (A_M - A)x + B_M r - h \\ &\quad - B(K_1 x + K_2 r + k_3 + \theta_1 x + \theta_2 r + \theta_3) \\ &= A_M e + BB^+(A_M - A)x + BB^+ B_M r - BB^+ h \\ &\quad - B(K_1 x + K_2 r + k_3 + \theta_1 x + \theta_2 r + \theta_3) \\ &= A_M e + [0 \quad I]^T B_1^+ [B^+(A_M - A) - K_1 - \theta_1] x \\ &\quad + (B^+ B_M - K_2 - \theta_2) r + (-B^+ h - k_3 - \theta_3) \end{aligned} \quad (4.2)$$

上式の各項はロボットマニピュレータに対する簡単な考察からつぎのように評価される⁸⁾.

$$0 < b_1 \leq \|B_1\| \leq b_2 < \infty$$

$$\|B^+(A_M - A) - K_1\| \leq \sum_{i=1}^3 a_i \|e\|^{i-1}$$

$$\|B^+ B_M - K_2\| \leq a_4 \quad (\text{for all } \theta) \quad (4.3)$$

$$\| -B^+ h - k_3 \| \leq \sum_{i=5}^7 a_i \|e\|^{i-5}$$

ただし $\|x_M\|$ の一様有界性より $\|x\|$ ではなく $\|e\|$ について展開した. 上式の $a_1 \sim a_7$, b_1 , b_2 は非負の有界な定数であり, (2.1) から (2.2) の導出過程に応じて a_2 , a_3 , a_6 , a_7 のいずれかが 0 になることもある. つ

ぎの定理を得る。

《定理》

$$D(sI - A_M)^{-1} \bar{B}_M$$

ただし、 $\bar{B}_M = [0 \ I]^T$

が強正実関数となるように $D \in R^{n \times 2n}$ (定数) を定める。このとき、以下の制御則により誤差は 0 に収束する。

$$u = K_1 x + K_2 r + k_3 + \theta_1 x + \theta_2 r + \theta_3 \quad (4.4)$$

$$\theta_1 = \sum_{i=1}^3 \hat{f}_i \|e\|^{i-1} \frac{v}{\|v\|} \text{sgn}(x)^T$$

$$\theta_2 = \hat{f}_4 \frac{v}{\|v\|} \text{sgn}(r)^T \quad (4.5)$$

$$\theta_3 = \sum_{i=5}^7 \hat{f}_i \|e\|^{i-5} \frac{v}{\|v\|} \quad (4.6)$$

$$\text{sgn}(y) = \begin{cases} 1 & (y > 0) \\ 0 & (y = 0) \\ -1 & (y < 0) \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\hat{f}_j = g_j \|e\|^{j-1} \|v\| \sum_{i=1}^{2n} |x_i| \quad (1 \leq j \leq 3)$$

$$\hat{f}_4 = g_4 \|v\| \sum_{i=1}^n |r_i| \quad (4.8)$$

$$\hat{f}_l = g_l \|e\|^{l-5} \|v\| \quad (5 \leq l \leq 7)$$

$g_i > 0$ (定数) $1 \leq i \leq 7$

x_i : x の第 i 成分 ($1 \leq i \leq 2n$)

r_j : r の第 j 成分 ($1 \leq j \leq n$)

(特に $v=0$ のときは $v/\|v\| \rightarrow 0$ とおく)

(証明)

$D(sI - A_M)^{-1} \bar{B}_M$ の強正実性より次式を満足する正定対称行列 H , P が存在する。

$$A_M^T P + P A_M = -H$$

$$D = \bar{B}_M^T P \quad (\text{Kalman-Yacubovic の補題})$$

$f_i (1 \leq i \leq 7)$ (> 0) を後に定める定数として上式の H と P を使って V 関数を定義する。

$$V = e^T P e + \left\{ \sum_{i=1}^7 (f_i - \hat{f}_i)^2 / g_i \right\} b_1 \quad (4.9)$$

軌道に沿って V の時間微分を計算する。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T P \dot{e} + e^T P \dot{e} + \left\{ 2 \sum_{i=1}^7 (f_i - \hat{f}_i) (-\dot{\hat{f}}_i) / g_i \right\} b_1 \\ &= -e^T H e + 2v^T B_1 \{ B^+ (A_M - A) - K_1 \} x \\ &\quad + 2v^T B_1 (B^+ B_M - K_2) r + 2v^T B_1 (-B^+ h - k_3) \\ &\quad - 2v^T B_1 \sum_{j=1}^3 \hat{f}_j \|e\|^{j-1} \frac{v}{\|v\|} \sum_{i=1}^{2n} |x_i| \\ &\quad - 2v^T B_1 \hat{f}_4 \frac{v}{\|v\|} \sum_{i=1}^n |r_i| \\ &\quad - 2v^T B_1 \sum_{j=5}^7 \hat{f}_j \|e\|^{j-5} \frac{v}{\|v\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- 2 \sum_{j=1}^3 (f_j - \hat{f}_j) \|e\|^{j-1} \|v\| \sum_{i=1}^{2n} |x_i| b_1 \\ &- 2(f_4 - \hat{f}_4) \|v\| \sum_{i=1}^n |r_i| b_1 \\ &- 2 \sum_{j=5}^7 (f_j - \hat{f}_j) \|e\|^{j-5} \|v\| b_1 \\ &\leq -e^T H e \\ &\quad + 2\|v\| \cdot \|B_1\| \cdot \|B^+ (A_M - A) - K_1\| \cdot \|x\| \\ &\quad + 2\|v\| \cdot \|B_1\| \cdot \|B^+ B_M - K_2\| \cdot \|r\| \\ &\quad + 2\|v\| \cdot \|B_1\| \cdot \| -B^+ h - k_3 \| \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^3 \hat{f}_j \|e\|^{j-1} \|v\| \sum_{i=1}^{2n} |x_i| b_1 \\ &\quad - 2 \hat{f}_4 \|v\| \sum_{i=1}^n |r_i| b_1 - 2 \sum_{j=5}^7 \hat{f}_j \|e\|^{j-5} \|v\| b_1 \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^3 \hat{f}_j \|e\|^{j-1} \|v\| \sum_{i=1}^{2n} |x_i| b_1 \\ &\quad + 2 \hat{f}_4 \|v\| \sum_{i=1}^n |r_i| b_1 + 2 \sum_{j=5}^7 \hat{f}_j \|e\|^{j-5} \|v\| b_1 \\ &\quad - 2v^T B_1 \sum_{j=1}^3 \hat{f}_j \|e\|^{j-1} \frac{v}{\|v\|} \sum_{i=1}^{2n} |x_i| \\ &\quad - 2v^T B_1 \hat{f}_4 \frac{v}{\|v\|} \sum_{i=1}^n |r_i| \\ &\quad - 2v^T B_1 \sum_{j=5}^7 \hat{f}_j \|e\|^{j-5} \frac{v}{\|v\|} \quad (4.10) \end{aligned}$$

ここで f_i を以下のように定める。

$$f_i \geq a_i b_2 / b_1 \quad (1 \leq i \leq 7) \quad (4.11)$$

すると次式が得られる。

$$\dot{V} \leq -e^T H e \leq 0 \quad (4.12)$$

V は非負で単調非増大関数であるから $V(\infty)$ の存在が

Fig. 1 Nonlinear adaptive control system

いえ, e および $\dot{f}_i$ の一様有界性, x の一様有界性, さらに (4.4) より入力の一様有界性が保証される. したがって (4.2) より $\dot{e}$ の一様有界性も保証され $V(\infty)$ の存在とあわせて e の零収束性が保証された. また $e \equiv 0$, $v \equiv 0$ における挙動の解析は (3.2) 式を等価入力としたときの sliding mode 制御⁴⁾ (あるいは通常の unit vector method^{6),7)} に準じる. (証明終)

証明中で重要な点は $B_1 = J(\theta)^{-1}$ がすべての θ に対して正定対称有界行列となる仮定である. これは回転型のマニピュレータであれば満足される.

(注意) 本手法において必要な計算量は規範モデルを次章の数値実験のように非干渉化システムとした場合,

$$\text{sgn}(x)^T x = \sum_{i=1}^{2n} |x_i|$$

となることなどに着目すると乗算数, 加算数それぞれにおよそ $(15 \sim 20) \cdot n + \text{定数項}$ となる.

5. 数値実験

本手法の有効性を確認するため Fig. 2, Table 1 の 3 自由度 マニピュレータについて数値実験を行った. 目標軌道は文献 9) を参考にして $\theta_M(0) = (0, 1.57, 3.14)$, $\theta_M(T) = (0.3, 1.27, 2.07)$, $\dot{\theta}_M(0) = \dot{\theta}_M(T) = 0$, $T=1$ として境界条件を満たす t の 3 次式で与えた. 規範モデルは

Fig. 2 3-Link manipulator

Table 1 Physical parameters of the manipulator

Link (i)	1	2	3
Length a_i (m)	0.0	0.4	0.336
I_{xxi} ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	0.9859997	0.0132000	0.0001837
I_{yyi} ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	0.7500003	0.1498200	0.147
I_{zz_i} ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	0.6000001	0.1432200	0.1357495
$\bar{x}_i$ (m)	0.0	0.175	0.168
$\bar{y}_i$ (m)	0.0	0.0	0.022
$\bar{z}_i$ (m)	0.0	0.0	0.0
Mass m_i (kg)	20.0	6.6	7.5
I_{ai} ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	5.654609	2.004699	0.8237586

$$A_{Mi} = a_{mi} \cdot I_{3 \times 3} \quad (i=1, 2) \quad a_{m1} = -10, \quad a_{m2} = -11$$

$$B_{M1} = b_{m1} \cdot I_{3 \times 3} \quad b_{m1} = 1$$

とし, 上記の目標軌道を発生するように入力 r を定めた. 対象とモデルの初期条件は一致させ, また

$$D = [10 \cdot I \quad I] \quad g_i = 2$$

のように設定した. 線形フィードバック制御を加えない場合の結果 (Case I) を Fig. 3 に示す.

つぎに線形フィードバック制御を加えた場合について調べた. 係数は初期の姿勢より求まる慣性行列の値

(a) Simulation results in case I (θ, θ_M versus time)

(b) Simulation results in case I (u versus time)

Fig. 3

と遠心，コリオリ力，重力項などより非線形部を除いた値を元にして補題の計算方法に従って概略値を求めた．使用した値は以下のとおりである．

$$K_1 = \begin{bmatrix} -26.53 & 0 & 0 & -29.18 \\ 0 & -45.23 & -17.63 & 0 \\ 0 & -17.63 & -26.53 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Simulation results in case II
(θ, θ_M versus time)

(b) Simulation results in case II
(u versus time)

Fig. 4

$$K_2 = \begin{bmatrix} 2.65 & 0 & 0 \\ 0 & 4.52 & 1.76 \\ 0 & 1.76 & 2.65 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = 0$$

この線形制御のみによる結果 (Case II) と線形制御と非線形適応制御を併用した場合 (Case III) を Fig. 4 Fig. 5 に示す．Fig. 3 の適応制御のみを使用した場

(a) Simulation results in case III
(θ, θ_M versus time)

(b) Simulation results in case III
(u versus time)

Fig. 5

合と Fig. 5 の線形制御を併用した場合を比べると両者の応答結果に差はないが、制御トルクの切り換え振幅が線形制御を併用することにより低減化されていることがわかる。これは定理の証明中からも明らかなように f_i をより小さく設定することができ可調整パラメータもそれに応じて小さく設定されるためと考えられる。なお本実験では線形制御の効果を調べるために制御対象の情報を使ったが、実際には未知であるのでフィードバック係数の同定問題も考慮しなければならない。ただしこの問題については今後の課題とした。

またここで示した設定条件（マニピュレータ、目標軌道）以外でも数値実験を行ったが、おおむね良好な結果が得られた。ただし数値計算の刻み幅（例題では 1 ms とした）と行列 D の選び方により収束性に変化が見られた。実際の適用に当たってのサンプリング時間の設定法（あるいはスイッチング素子の選択）、 D およびゲインの設定法についても今後の課題とした。

5. 考 察

慣性行列の性質を利用して、非線形項の情報を完全に知ることなく（非有界な関数の場合に発散のオーダが評価できればよい）速度項までの情報により適応制御系を構成した。本手法で特に切り換えゲインを固定すると unit vector method^{6),7)} と一致する。現在までに提案されている不連続型の適応制御系の大部分はこの形式に帰着されるが、そこでは対象の未知性を十分大きな切り換えゲインの中に吸収させて対処しているため純粋な意味での適応制御系とはいいがたく、また状態変数に応じて非有界となりうる項をも定数として評価していた。これに対し本稿では非線形項の適切な評価と切り換えゲインの自動調整機能を含む適応制御系を導出し、従来よりも少ない情報での制御系構成が可能となった。なお本手法は $w//v$ の項の影響で入力的高速切り換えが生じるが、これは K_1 , K_2 , k_3 を適当に定めることにより切り換えの振幅は小さくできることが定理から推察されるし、また数値実験よりもこのことが確認できた。ただしこのような場合にすみやかに対応できるためには、本手法のような切り換えゲインの自動調節機能が不可欠である。 K_1 , K_2 , k_3 の自動調整については今後の課題としたい。

最後に筆者の一人宮里が日頃ご指導いただく東京大学北森俊行教授に御礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) S. Dubowsky and D. T. Des Forges: The Application of Model-Reference Adaptive Control to Robotic Manipulators, Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement and Control, **101**, 193/200 (1979)
- 2) 竹垣, 有本: マニピュレータの適応的な軌道制御方式, 計測自動制御学会論文集, **17-4**, 467/472 (1981)
- 3) 大須賀公一: 非線形メカニカルシステムの適応制御, 計測自動制御学会論文集, **22-7**, 756/762 (1986)
- 4) V. I. Utkin: Variable Structure Systems with Sliding Mode, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-22-2**, 212/222 (1977)
- 5) 土手康彦: 可変構造制御法, システムと制御, **30-1**, 26 33 (1986)
- 6) A. Balestrino, G. De Maria and L. Sciavicco: An Adaptive Model Following Control for Robotic Manipulators, Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement and Control, **105**, 143/151 (1983)
- 7) S. Nicisia and P. Tomei: Model Reference Adaptive Control Algorithms for Industrial Robots, Automatica, **20-5**, 635/644 (1984)
- 8) R. P. Paul: Robot Manipulators, MIT Press (1981) (吉川恒夫訳: ロボットマニピュレータ, コロナ社 (1984))
- 9) 有本 卓: ロボット制御の基礎, コンピュートロール, **9**, 21/34 (1985)
- 10) 古田, 川路, 美多, 原: メカニカルシステム制御, 147/150, オーム社 (1984)

《付録》 (2.2) 式の導出例

文献 10) pp. 147~150 に従って平面 2 自由度マニピュレータの場合について (2.2) 式を導出する（記法はすべて文献 10) に準じる。ただしアクチュエータの慣性モーメントと摩擦の項は簡単のため考慮しない。また関節角は本文中の例題と同様に相対角とする）。容易に

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} L_{11} + L_{22} + 2L_{12}\cos\theta_2 & L_{12}\cos\theta_2 + L_{22} \\ L_{12}\cos\theta_2 + L_{22} & L_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} X(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} -2L_{12}\sin\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - L_{12}\sin\theta_2\dot{\theta}_2^2 \\ L_{12}\sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2L_{12}\sin\theta_2\dot{\theta}_2 & -L_{12}\sin\theta_2\dot{\theta}_2 \\ L_{12}\sin\theta_2\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{X}(\theta, \dot{\theta}) \cdot [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} -G_1\sin\theta_1 - G_2\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -G_2\sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

が得られる。したがって

$$\begin{aligned} A_1 &= 0(2 \times 2) & A_2 &= -J(\theta)^{-1}\tilde{X}(\theta, \dot{\theta}) \\ B_1 &= J(\theta)^{-1} \\ h_1 &= -J(\theta)^{-1}G(\theta) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

とおけば、(2.2) 式の一つの表現が求められる。