内部モデル原理を満足するすべり状態サーボ系

足田 弘光*・久保 洋*

Sliding-Mode Servo Systems Satisfying Internal Model Principle

Hiromitsu HIKITA* and Hiroshi KUBO*

A design method for a sliding-mode servo system with an internal model of a reference signal generator is proposed. This servo system is insensitive to disturbances, parameter variations and nonlinearity.

Key Words: sliding-mode control, variable structure system, servo system, internal model principle, robust control

1. 緒 言

著者らはすべり状態制御(sliding mode control)^{1)~3)}を利用してサーボ系を構成する方法を提案した⁴⁾。この系は従来のモデル追従形式^{5)~8)}のように追従すべきモデルを系のなかに組み込むことなく出力を目標値に追従させることができる。一方、Young ら^{10), 11)}が提案したサーボ系と異なり、すべり状態制御の特徴であるパラメータ変動や外乱に対する不感特性もそのまま保たれる。また、Young らのサーボ系は、ある限られた入力に対するシステムの定常状態からの偏差を表す系にすべり状態制御を応用したもので、それ以外の入力に対する一般的な振舞いは予測できないが、本サーボ系は特別な入力に基づいて得られたものではないのでそのような問題は生じず、しかも、非線形系にまで適用できる。

本報では、より良い追従特性を得るため線形サーボ系の設計論で確立されている内部モデル原理⁹⁾が本サーボ系においていかに実現されるか検討し、具体的な構成法を示す。

2. 内部モデル

つぎのシステムを考える。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d$$

$$y = x_1 \quad (1a)$$

$$y = x_1 \quad (1b)$$

ここで、 x_i , $i=1 \sim n$ は状態変数、 u , y はそれぞれ入力、出力変数で d は外乱を表す。 $|d|$ の最大値はわかっているとす。係数 a_i , $i=1 \sim n$, b は変動したり測定誤差を併っているとす。また、一般性を失うことなく $b > 0$ を仮定する。

つぎの l 次の補償器を考える。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -f_1 & -f_2 & \cdots & -f_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (y-r) \quad (2)$$

ここで、 z_i , $i=1 \sim l$ は状態変数、 r は目標入力である。 f_i , $i=1 \sim l$ は後で検討される実数である。

拡大系(1), (2)につぎの切換え超平面を考える。

$$\sigma = \sum_{i=1}^l c_i z_i + \sum_{j=1}^n c_{l+j} x_j \quad (3)$$

c_i , $i=1 \sim l+n$ は定数であるが $c_{l+n}=1$ とする。(1), (2)を用い(3)を書きなおすと

$$\sigma = \sum_{j=1}^l c_j z_1^{(j-1)} + \sum_{j=0}^n c_{l+j} \left\{ \sum_{i=0}^l f_{i+1} z_1^{(i)} \right\}^{(j-1)} + \sum_{j=1}^n c_{l+j} r^{(j-1)} \quad (4)$$

ただし、 $f_{l+1}=1$ である。したがって、次章で説明する適切な切り換え制御則によりすべり状態制御が達成されると $\sigma=0$ より、 $r \rightarrow z_1$ の関係は伝達関数表示で

$$z_1(s) = - \frac{\sum_{j=1}^n c_{l+j} s^{j-1}}{\sum_{i=1}^l c_i s^{i-1} + \sum_{j=1}^n c_{l+j} \sum_{i=0}^l f_{i+1} s^{i+j-1}} r(s) \quad (5)$$

ところで、(2)より

$$y(s) = \sum_{i=0}^l f_{i+1} s^i z_1(s) + r(s) \quad (6)$$

であるから、(5), (6)より

* 室蘭工業大学 室蘭市水元町 27-1

* Muroran Institute of Technology, Muroran

(Received February 24, 1987)

(Revised September 14, 1987)

$$y(s) = \frac{\sum_{i=1}^l c_i s^{i-1}}{\sum_{i=1}^l c_i s^{i-1} + \sum_{j=1}^n c_{l+j} \sum_{i=0}^l f_{i+1} s^{i+j-1}} r(s) \quad (7)$$

(7)の分母は s の $l+n-1$ 次多項式であるが、 $f_{i+1}=1$ であるので、 $f_i, i=1 \sim l$ がどのような値であっても $c_i, i=1 \sim l+n-1$ の適当な設計により任意のモノックな $l+n-1$ 次多項式を実現できる。つまり、(7)の伝達関数の極は $c_i, i=1 \sim l+n-1$ の設計により任意に設定できる。

したがって、これらの極がすべて安定に選ばれていると仮定し、もし目標値関数 $r(t)$ のラプラス変換形が

$$r(s) = \frac{1}{\sum_{i=0}^l f_{i+1} s^i} \quad (8)$$

なら誤差 $y(t)-r(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で 0 となる。これはラプラス変換の最終値の定理 $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t)-r(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} s(y(s)-r(s))$ と (7), (8) より明らかである。(8)は目標値信号発生系の伝達関数とも考えられ、結局このシステムは目標値信号発生系の内部モデルをもっていると考えられる。

以上より内部モデル原理を満足するすべり状態サーボ系をつぎの手順で構成することができる。まず、目標値発生系の内部モデル(2)をシステム(1)に結合し拡大系を作る。(7)の伝達関数の分母多項式を極指定など適当な方法により決定すると $c_i, i=1 \sim l+n-1$ が決まるので(3)の切換え超平面 σ が確定する。次章で述べる u への切換え制御則により軌道をこの超平面にはりつけることにより出力を目標値発生系からの任意の目標値信号に定常誤差なく追従させることができる。

3. 切換え制御則

切換え制御則について検討する。

$$\dot{\sigma} = \sum_{i=1}^l (c_{i-1} - c_l f_i) z_i + \sum_{j=1}^n (c_{l+j-1} - a_j) x_j + bu - c_l r + d \quad (9)$$

である。ただし、 $c_0=0$ である。したがって

$$u = \sum_{i=1}^l \phi_i z_i + \sum_{j=1}^n \phi_{l+j} x_j + \phi_0 \quad (10)$$

とすると

$$\begin{aligned} \sigma \dot{\sigma} = & \sum_{i=1}^l (b\phi_i + c_{i-1} - c_l f_i) z_i \sigma \\ & + \sum_{j=1}^n (b\phi_{l+j} + c_{l+j-1} - a_j) x_j \sigma \\ & + (b\phi_0 - c_l r + d) \sigma \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる。結局、すべり状態の存在条件 $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma \dot{\sigma} < 0$ を満たすため(10)の係数をつぎのように切換えればよい。

$$\begin{aligned} \phi_i & < \min_b \frac{c_l f_i - c_{i-1}}{b} & \text{if } z_i \sigma > 0 \\ \phi_i & > \max_b \frac{c_l f_i - c_{i-1}}{b} & \text{if } z_i \sigma < 0 \end{aligned} \quad i=1 \sim l \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \phi_{l+j} & < \min_{b, a_j} \frac{a_j - c_{l+j-1}}{b} & \text{if } x_j \sigma > 0 \\ \phi_{l+j} & > \max_{b, a_j} \frac{a_j - c_{l+j-1}}{b} & \text{if } x_j \sigma < 0 \end{aligned} \quad j=1 \sim n \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \phi_0 & = \frac{c_l}{b_{\max}} r - k \operatorname{sgn} \sigma & \text{if } c_l r \sigma > 0 \\ \phi_0 & = \frac{c_l}{b_{\min}} r - k \operatorname{sgn} \sigma & \text{if } c_l r \sigma < 0 \end{aligned} \quad (14a)$$

ただし、

$$k > \max_d |d|/b_{\min} \quad (14b)$$

で、 $b_{\max}, b_{\min}$ はそれぞれ b の最大値、最小値を表わす。(12)~(14)は(11)の各項が $z_i, i=1 \sim l, x_i, i=1 \sim n, \sigma$ が 0 以外で負となるように決めたもので、特に(14)は文献 4) とまったく同様に求められるのでここでは詳細な議論は省略する。

なお、本章で述べられた切換え制御則は切換え平面への到達条件でもあることは明らかである。

4. 等価制御による検討

(9)において $\dot{\sigma}=0$ において等価制御を求めると

$$\begin{aligned} u_{eq} = & \frac{1}{b} \left\{ - \sum_{i=1}^l (c_{i-1} - c_l f_i) z_i \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^n (c_{l+j-1} - a_j) x_j + c_l r - d \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

(15)を(1), (2)の u へ代入すると、

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_l \\ \vdots \\ \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ -f_1 & -f_2 & \cdots & -f_l & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \hline +c_l f_1 & -c_1 + c_l f_2 & \cdots & -c_{l-1} + c_l f_l & -c_l & -c_{l+1} & \cdots & -c_{l+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_l \end{bmatrix} r$$

$$y = x_1 \quad (16)$$

$r \rightarrow y$ の伝達関数を求めると (7) が得られる。結局、(12)~(14) の切り換え則により理想すべり状態が達成されると (7) が成立することが確認された。

5. 非線形系

つぎの非線形系を考える

$$\dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i=1 \sim n-1 \quad (17a)$$

$$\dot{x}_n = f(x; t) + bu + d$$

$$y = x_1 \quad (17b)$$

ここで、 $x = [x_1 \ x_2 \dots x_n]^T$ である。さらにつぎを定義する。

$$|x| = [|x_1| |x_2| \dots |x_n|]^T \quad (18)$$

関数 $f(x; t)$ は多項式オーダーでおさえられると仮定する。つまり、

$$|f(x; t)| \leq F(|x|; t) \quad (19)$$

を満足する多項式 $F(|x|; t)$ が存在する。 $F(|x|; t)$ の係数を時間の正関数で、かつなめらかに選ぶことができる⁸⁾。

(17) の系に (2) の補償器を結合し、その拡大系に (3) の切り換え超平面を考える。すると、これはやはり (4) と書くことができ、適当な切り換え制御則によりすべり状態が達成されれば $r \rightarrow y$ の関係は前と同様に (7) となる。つまり、この種の非線形系に対しても内部モデル原理を満足するすべり状態サーボ系が実現できる。

切り換え制御則について検討する。文献 8) で述べられているように $F(x; t)$ の k 番目の項はつぎのように書ける。

$$F_k = \alpha_k(t) \prod_{i=1}^n (x_i)^{m(i,k)} \quad (20)$$

ただし、 $\alpha_k(t)$ は時間の正関数で、 $m(i, k)$ は F_k における x_i のべき乗を表わす。 u をつぎのように選ぶ

$$u = \sum_{i=1}^l \phi_i x_i + \sum_{j=1}^n \phi_{l+j} x_j + \sum_k u_k(x; t) + \phi_0 \quad (21)$$

ただし、 ϕ_i , $i=0 \sim l+n$ は切り換えゲインである。 $u_k(x; t)$ は (20) と同じ型の項で

$$u_k(x; t) = \beta_k(x; t) \prod_{i=1}^n (x_i)^{m(i,k)} \quad (22)$$

である。切り換え制御則を求めると $\phi_0, \phi_i, i=1 \sim l$ は前と同一でよく、他は

$$\begin{aligned} \phi_i &< \min_b \left(-\frac{c_{i+j-1}}{b} \right) \quad \text{if } x_j \sigma > 0 \\ \phi_i &> \max_b \left(-\frac{c_{i+j-1}}{b} \right) \quad \text{if } x_j \sigma < 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$i = l+1 \sim l+n$$

$$\beta_k(x; t) \leq -\frac{\alpha_k(t)}{b_{\min}} \quad \text{if } \prod_{i=1}^n (x_i)^{m(i,k)} \sigma > 0$$

$$\beta_k(x; t) \geq \frac{\alpha_k(t)}{b_{\min}} \quad \text{if } \prod_{i=1}^n (x_i)^{m(i,k)} \sigma < 0 \quad (24)$$

によってすべり状態制御の存在条件、到達条件が満足される。(24) は $\sigma \dot{\sigma}$ の非線形項

$$\left(f(x; t) + b \sum_k \beta_k(x; t) \prod_{i=1}^n (x_i)^{m(i,k)} \right) \sigma \quad (25)$$

を常に 0 もしくは負とするための切り換え則である。

6. 結 言

前報⁴⁾ の内容を発展させ、内部モデル原理を満足するすべり状態サーボ系について述べた。外乱の抑制についてはすべり状態制御により行われるので、内部モデルは目標値入力の変質のみを考慮して決めればよい。本方法は従来からのすべり状態制御の優れた特徴を保持しつつ、追従モデルを用いることなく出力を目標値入力に追従させることができるので種々の制御問題に広く利用可能であろう。

参 考 文 献

- 1) V.I. Utkin: Variable Structure Systems with Sliding Mode, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-22-2**, 212/222 (1977)
- 2) U. Itkis: Control Systems of Variable Structure, John Wiley (1976)
- 3) 原島, 橋本: Sliding Mode とその応用-I, II, システムと制御, **29-2**, 94/103 (1985), **29-4**, 242/250 (1985)
- 4) H. Hikita: Servomechanisms Based on Sliding Mode Control, International J. of Control, to appear
- 5) K.D. Young: Asymptotic Stability of Model Reference Systems with Variable Structure Control, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-22-2**, 279/281 (1977)
- 6) K.D. Young: Design of Variable Structure Model-Following Control Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-23-6**, 1079/1085 (1978)
- 7) A.S.I. Zinober, et al.: Multivariable Variable-Structure Adaptive Model-Following Control Systems, IEE Proc., 129-Pt. D-1, 6/12 (1982)
- 8) J.J. Slotine and S.S. Sastry: Tracking Control of Non-Linear Systems Using Sliding Surfaces, with Application to Robot Manipulators, International J. of Control, **38-2**, 465/492 (1983)
- 9) たとえば, 中野, 美多: 制御基礎理論「古典から現代まで」, 197, 昭晃堂 (1982)
- 10) K.D. Young: A Compensator-Based Approach to Variable Structure Servomechanism Design, Proc. IEEE CDC, 1121/1124 (1983)
- 11) K.D. Young and H.G. Kwatny: Variable Structure Servomechanism Design and Application to Over-speed Protection Control, Automatica, **18-4**, 385/400 (1982)