操作量制限を有する線形系に対する VSS の設計

吉田 和信*・川辺 尚志*

A Design of VSS for a Linear System with Bounded Control

Kazunobu YOSHIDA* and Hisashi KAWABE*

The VSS design problem for a linear system with bounded control has been investigated using a quadratic performance index, the value of which can be more lowered by logically switching admissible gains $\{k_0, k_1, \dots, k_p\}$ than by the single gain k_0 .

Key Words: variable structure system, quadratic performance index, admissible gain, guaranteed cost control, bounded control

1. はじめに

本論文では、操作量制限を有する線形制御対象に対して、許容なゲインの組 $\{k_0, k_1, \dots, k_p\}$ および状態の2次形式評価関数が与えられた場合、 k_0 による線形制御よりも優れた評価を与える VSS の設計問題を考察する。ある基準となる制御よりもよい評価を与える制御、すなわち GCC (Guaranteed Cost Control) に関する一つの理論的考察は、Chang ら¹⁾によってなされているが、本論文で提案する制御則の導出には、Chang らの方法とは異なるアプローチが必要となる。この手法は、文献2)~5)においても利用されている。

2. 問題の記述

操作量制限を有する可制御な制御対象

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (1)$$

$$|u| \leq 1 \quad (2)$$

$$x_0 = x(t_0) \in \Omega_0 \quad (\text{有界閉集合}) \quad (3)$$

$$x \in R^n, u \in R$$

に対して、ゲインの組

$$\{k_0, k_1, \dots, k_p\}, k_i \neq k_j, i \neq j, k_i \in R^n \quad (4)$$

が与えられたとする。許容制御は

$$u = u_i = k_i' x, i \in L(0) \triangleq \{0, 1, \dots, p\}, \\ |u| \leq 1 \quad (5)$$

である。 $A + bk_0'$ の固有値の実部は負であると仮定する。また、集合 Γ をつぎのように定義し

$$\Gamma \triangleq \{x_0 \mid |u_0(t)| = |k_0' \exp[(A + bk_0')x]x_0| \leq 1, \forall t \geq 0\} \quad (6)$$

初期状態の集合 Ω_0 に関して

$$\Omega_0 \subset \Gamma \quad (7)$$

を仮定する。すなわち、 $u = k_0' x$ は、 $\forall x_0 \in \Omega_0$ に対して許容制御である。

つぎの評価を導入する。

$$J = \int_{t_0}^{\infty} e^{2\alpha(t-t_0)} x(t)' Q x(t) dt, Q > 0 \quad (8)$$

α は、 $A + bk_0' + \alpha I$ が漸近安定となるように与えるものとする。 u_0 で制御した場合、(8)式の評価は

$$J_0 = x(t_0)' P x(t_0) \quad (9)$$

と表わされる。ただし、 P はリアプノフ方程式

$$(A + bk_0)' P + P(A + bk_0) + 2\alpha P + Q = 0 \quad (10)$$

の解である。問題はつぎのとおりである。

「許容制御を用いて(9)式の評価よりも小さな評価を達成するためのゲイン切り換え則を求めよ。」

3. 切り換え則の導出

まず、(2)式の制限がない場合のゲイン切り換え則を導き、これに制限条件を考慮した修正を加えるという方法をとる。

初期状態 $x(t)$ に対してつぎの制御を考える。

$$u(\tau) = \begin{cases} k_i' x(\tau), & \tau \in [t, t + \Delta t), \\ k_0' x(\tau), & \tau \in [t + \Delta t, \infty) \end{cases} \quad i \in L(0) \quad (11)$$

Δt は十分小さな正数である。(11)式の制御を適用した場合の評価はつぎのように計算できる。

$$J_1 = x(t)' Q x(t) \Delta t + \int_{t+\Delta t}^{\infty} e^{2\alpha(\tau-t)} x(\tau)' Q x(\tau) d\tau \quad (12)$$

ここで

$$\eta = t + \Delta t \quad (13)$$

とおくと(12)式の第2項の積分はつぎのようになる。

$$e^{2\alpha\Delta t} \int_{\eta}^{\infty} e^{2\alpha(\tau-\eta)} x(\tau)' Q x(\tau) d\tau \\ = e^{2\alpha\Delta t} x(\eta)' P x(\eta) \\ = e^{2\alpha\Delta t} x(t + \Delta t)' P x(t + \Delta t)$$

* 広島工業大学工学部 広島市佐伯区五日市町三宅 725

* Faculty of Engineering, Hiroshima Institute of Technology, Hiroshima

(Received May 6, 1988)

$$\begin{aligned}
& \doteq e^{2\alpha\Delta t} \{x(t) + (A + bk'_i)x(t)\Delta t\}'P\{x(t) \\
& \quad + (A + bk'_i)x(t)\Delta t\} \\
& \doteq (1 + 2\alpha\Delta t) \{x(t)'Px(t) \\
& \quad + 2x(t)'P(A + bk'_i)x(t)\Delta t\} \\
& \doteq x(t)'Px(t) + 2\alpha x(t)'Px(t)\Delta t \\
& \quad + 2x(t)'P(A + bk'_i)x(t)\Delta t \quad (14)
\end{aligned}$$

Δt^2 以上の高次項は無視した。ここで、つぎの関数を定義する。

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{J_1 - J_0}{\Delta t} \\
&= x(t)'(Q + 2\alpha P)x(t) \\
& \quad + 2x(t)'P(A + bk'_i)x(t) \\
&= 2x(t)'Pb(k'_i - k'_0)x(t) \quad (15)
\end{aligned}$$

V が最小となるように $k_i, i \in L(0)$ を選んだ場合、すなわち、

$$u(t) = k'_{j(t)}x(t) \quad (16)$$

$$j(t) = \{j : \min_{i \in L(0)} V = 2x(t)'Pb(k'_j - k'_0)x(t)\} \quad (17)$$

$$j(t) = 0 \quad \text{if } \min V = 0 \quad (18)$$

とした場合

$$V \leq 0 \quad (19)$$

が保証される。(16)~(18)式の制御則を $\forall t \geq t_0$ に対して適用したとき、つぎの定理が成立する。ただし $x(u_0, t)$ および $x(u_{j(t)}, t)$ はそれぞれ u_0 および $u_{j(t)}$ に対する状態軌道を表わし、 $x(u_0, t_0) = x(u_{j(t)}, t_0) = x(t_0)$ である。

《定理 1》

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{2\alpha(t-t_0)} x(u_{j(t)}, t)'Px(u_{j(t)}, t) = 0 \quad (20)$$

となる場合

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{2\alpha(t-t_0)} x(u_{j(t)}, t)'Qx(u_{j(t)}, t)dt \leq J_0 \quad (21)$$

が成立する。

(証明) (9)式から、 $J_0(t) = x(t)'Px(t)$ を得る。また、つぎの関係を用意する。

$$\dot{J}_0(t) = e^{2\alpha(t-t_0)} J_0(t) \quad (22)$$

(22)式の両辺を t で微分し、整理することによって

$$e^{2\alpha(t-t_0)} \frac{dJ_0}{dt} = \frac{d\dot{J}_0}{dt} - 2\alpha e^{2\alpha(t-t_0)} J_0 \quad (23)$$

を得る。(15), (19)式から

$$\begin{aligned}
x(t)'Qx(t) &\leq -\left[\frac{dJ_0}{dt}\right]_{u_{j(t)}} \\
&\quad - 2\alpha x(t)'Px(t) \quad (24)
\end{aligned}$$

が得られ、この両辺に $e^{2\alpha(t-t_0)}$ を掛けて、(23)式を用いると

$$e^{2\alpha(t-t_0)} x(t)'Qx(t) \leq -\left[\frac{d\dot{J}_0}{dt}\right]_{u_{j(t)}} \quad (25)$$

となる。(25)式の両辺を区間 $[t_0, \infty)$ で積分し、(20)

式を用いると定理の結果が得られる。□

定理 1 の証明からわかるように、関数 V を時刻 t で最小化することは、その時点で評価を減少させる最大の努力をすることである。

いま、 $|k'_i x| \leq 1$ を満足する添え字 $i \in L(0)$ の集合を $L(x)$ と記す。(2)式を満足させるためには、 $j(t)$ の決定法をつぎのように修正すればよい。

$$j(t) = \{j : \min_{i \in L(x)} V = 2x(t)'Pb(k'_j - k'_0)$$

$$x(t)\} \quad \text{if } x(t) \in \Gamma^o \quad (26)$$

$$j(t) = 0 \quad \text{if } \min V = 0 \text{ or } x(t) \in \partial\Gamma \quad (27)$$

$x(t) \in \Gamma$ のとき $0 \in L(x)$ 、すなわち $L(x) \neq \emptyset$ である。また、状態が Γ の境界に達したときは k_0 に切り換えるため、 $x(t) \in \Gamma$ 、 $\forall t \geq t_0$ が保証される。この場合も明らかに $V \leq 0$ 、 $\forall t \geq t_0$ となるので、定理 1 は、(26), (27) 式の切り換え則に対しても成立する。

制御 $u_{j(t)}$ を用いた場合の制御系の安定性に関してつぎの定理が成立する。

《定理 2》

$$Q + 2\alpha P > 0 \quad (28)$$

が成立するならば、制御系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bk'_{j(t)}x(t) \quad (29)$$

は安定である。

(証明) $A + bk'_0 + \alpha I$ は安定であるので、 P は正定である。また、 $A + bk'_0$ も安定であるので、(28)式を満足する $Q > 0, \alpha$ は存在する。正值関数 $\xi = x(t)'Px(t)$ の時間微分は

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= 2x(t)'P(A + bk'_{j(t)})x(t) \\
&\leq 2x(t)'P(A + bk'_0)x(t) \\
&= -x(t)'(Q + 2\alpha P)x(t) < 0 \quad (30)
\end{aligned}$$

となる。すなわち、 ξ は制御系(29)のリアプノフ関数となり、安定性が示された。□

定理 2 は、安定性の十分条件であるから、(28)式が満足されない場合であっても、制御系が不安定であるとはいえない。

集合 Γ は、凸多面体によって近似的に構成できることが知られている。実際(27)式の $x(t) \in \partial\Gamma$ の判定は困難であるが(27)式を

$$j(t) = 0 \quad \text{if } \min V = 0 \text{ or } x(t) \notin \Gamma \quad (31)$$

とし、 u_0 の代わりに $\text{sat}(u_0)$ を用いても、 Γ が十分近似されていれば問題ないと思われる。

Γ の構成法については、文献 2) を参照されたい。

4. 数 値 例

つぎの場合を考えよう。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x = (x_1, x_2)' \quad (32)$$

Fig. 1 Responses of the proposed VSS

$$Q = \text{diag} (1, 0.0001) \quad (33)$$

$$k_0 = (-1, -0.734935)' \quad (34)$$

$$k_i = \tilde{k}_i + k_0, \quad i=1, 2 \quad (35)$$

$$\tilde{k}_1 = (-5, 5)', \quad \tilde{k}_2 = (5, -5)' \quad (36)$$

$$\mathcal{Q}_0 = \{x \mid |x_1| \leq 0.5, x_2 = 0\} \quad (37)$$

k_0 は評価関数

$$\int_0^\infty (x(t)' Q x(t) + u(t)^2) dt \quad (38)$$

に対する最適レギュレータゲインである。

Fig. 1 に $x(0) = (x_1(0), 0)'$ に対する VSS のシミュレーション結果を示す。操作量飽和による初期値依存性がみられるが、いずれも $u = k_0 x$ を用いた場合よりも速応性が向上している。

5. おわりに

結果として得られた切り換え則は、状態の 2 次関数

の符号に従ってゲインを切り換えるという簡単なものである。

評価関数の重み係数や許容ゲインは、与えられるものとして定式化したが、実際の設計においては、制御系の安定性や速応性に関する設計パラメータとなる。しかしながら、これらの設計パラメータと構成された制御系の特性との具体的な関係は、現在のところあまり明確ではない。良好な応答を与えるパラメータを見出すためには、シミュレーションによる試行錯誤が必要となる。

参考文献

- 1) S. S. L. Chang and T. K. C. Peng: Adaptive Guaranteed Cost Control of Systems with Uncertain Parameters, IEEE Trans. Automatic Control, AC-17-4, 474/483 (1972)
- 2) 吉田, 西村, 米澤: 操作量に制限がある線形系に対する可変ゲインフィードバック制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, 21-7, 677/683 (1985)
- 3) 吉田, 西村, 米澤: 操作量制限がある線形離散時間系に対する非線形コントローラの設計, 計測自動制御学会論文集, 22-10, 1112/1114 (1986)
- 4) 吉田, 西村, 米澤: 操作量制限がある線形系に対する非線形コントローラの設計, 第 25 回 SICE 学術講演会予稿集, 661/662 (1986)
- 5) 吉田和信: 広島大学学位論文, 制限条件を有する制御系のゲイン空間における設計, 第 4, 6 章 (1987)