ディスクリプタシステムに対する Luenberger 型オブザーバ†

川 路 茂 保*

Luenberger-Type Observer for Descriptor Systems

Shigeyasu KAWAJI*

Linear descriptor system of the form $E\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ with E singular is a mixture of dynamic and static equations and can be served as a useful method in analysis of many real and practical situations.

This paper deals with the problem of designing an observer for descriptor systems. The traditional approach to such an observer is to separate the dynamic equations from the algebraic equations, and to estimate the unobservable parts from the outputs. Contrary to this, the observer is presupposed to have the same structure as Luenberger observer. At first, the fundamental equations that the plant and the observer must satisfy are derived. Secondly, based on these equations, sufficient conditions are given for the existence of the observer and methods of designing an identity observer and low-order observers are presented by utilizing the generalized matrix inverse.

Key Words: descriptor systems, identity observer, low order observer, observability

1. はじめに

ディスクリプタ方程式は、システムの動的な部分を記述する常微分方程式とシステムを構成する各要素間の相互関係を記述する代数方程式よりなり、システム内の物理変数や物理的構造を変えることなく自然に記述できる数式表現である。このように状態方程式より高い表現能力をもつディスクリプタシステムに対する

解析・設計手法を確立することは重要な課題であり、近年盛んに研究が行われている¹⁾。

設計の基本的手法は状態方程式の場合と同様にディスクリプタ変数のフィードバックであって、極配置^{2),3)}、最適レギュレータ^{4),5)}などの問題が解かれている。そして、この制御則を実現する際にディスクリプタ変数を推定するオブザーバが必要であることは、ディスクリプタ方程式が物理システムの自然な表現であっても変わらない。このため、オブザーバの構成法もいろいろ研究されている⁶⁾⁻¹⁰⁾。細江ら⁶⁾はレギュラペンシルの正準形を、小林ら⁷⁾は標準形をそれぞれ用いてシステムを静的なものとの動的なものに分離して Rosenbrock の意味で可観測な条件のもとにオブザーバを構成した(注1)。El-Tohami ら⁸⁾、Shafai ら⁹⁾は一般化逆行列を用いて構成法を提案したが、オブザーバが構成可能なための条件は明確にされていない。これは文献8)ではディスクリプタ方程式のみに、文献9)では出力方程式にのみ一般化逆行列を適用したためと考えられる。これに対して、著者ら¹⁰⁾は Rosenbrock の意味で可観測な条件のもと両方の方程式に一般化逆行列を適用してレギュラシステムに変換ののちオブザーバを構成する方法を提案した。そのアルゴリズムは簡便であり、また、ディスクリプタシステムと同一次元のオブザーバをも構成できる。

これらの従来の方法は出力から観測できない部分を再構成する考え方に基づいており、そのためにディスクリプタ方程式を変形するやり方である。ところが、状態方程式の場合でも明らかに、オブザーバの構造をあらかじめ定めてオブザーバの基礎方程式を導出し、この基礎方程式を満足するようにオブザーバの

† 第10回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表(昭62・12)

* 熊本大学工学部 熊本市黒髪 2-39-1

* Faculty of Engineering, Kumamoto University, Kumamoto

(Received February 15, 1988)

(Revised June 29, 1988)

(注1) なお、文献7)では Verghese の意味で可観測ならば低次元オブザーバが構成できることを示しているが、得られたオブザーバは(2b)式に入力項を含む形となる。

パラメータを決定する手順を考えることができる。状態方程式の場合におけるオブザーバの適合性の判定や未知入力オブザーバの構成などの例からも明らかのようにこのアプローチの利点は多い。

そこで、本論文ではオブザーバの構造を Luenberger 型¹¹⁾に定め、その基礎方程式を導き、オブザーバが構成可能な条件を求める。つぎに、この基礎方程式をもとに同次元オブザーバや低次元オブザーバの構成法を示す。

2. オブザーバの定義と基礎方程式

対象とするシステムは、ディスクリプタ方程式

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu, & x(0_-) = x_0 \\ y = Cx \end{cases} \quad (1a)$$

$$(1b)$$

で記述される線形時不変系である。ここで $x \in \mathbf{R}^n$ はディスクリプタ変数、 $u \in \mathbf{R}^m$ は入力、 $y \in \mathbf{R}^p$ は出力である。 $E \in \mathbf{R}^{n \times n}$ の正則性は仮定せず、 $\text{rank } E = r$ ($\leq n$) とする。 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 、 $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 、 $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ かつ $\text{rank } C = p$ とする。また、この方程式(1)が一意解をもつために

$$\det(\lambda E - A) \neq 0$$

と仮定する。

これに対して、システム(1)の入出力(u, y)を入力とする q 次元 Luenberger 型システム

$$\begin{cases} \dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}y + \hat{J}u, & z(0_-) = z_0 \end{cases} \quad (2a)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \hat{C}z + \hat{D}y \end{cases} \quad (2b)$$

を考える。ただし、 $z \in \mathbf{R}^q$ 、 $\hat{A} \in \mathbf{R}^{q \times q}$ 、 $\hat{B} \in \mathbf{R}^{q \times p}$ 、 $\hat{J} \in \mathbf{R}^{q \times m}$ 、 $\hat{C} \in \mathbf{R}^{n \times q}$ 、 $\hat{D} \in \mathbf{R}^{n \times p}$ であり、 q の値はこの段階では未定とする。

【定義】(2)式で表わされるシステムの出力 $\hat{x}$ が、システム(1)の任意の入力 u 、任意の初期値 x_0, z_0 に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{x}(t) - x(t)] = 0 \quad (3)$$

が成り立つとき、システム(2)をディスクリプタシステム(1)に対するオブザーバという。

この定義に従うと、システムとオブザーバとの関係を表わす基礎方程式が導かれる。

《定理1》システム(2)がディスクリプタシステム(1)に対するオブザーバであるための十分条件は

$$i) \quad \text{Re } \lambda_i(\hat{A}) < 0, \quad i=1, \dots, q \quad (4a)$$

かつ次式を満たす行列 $U \in \mathbf{R}^{q \times n}$ が存在することである。

$$ii) \quad \hat{A}UE + \hat{B}C = UA \quad (4b)$$

$$iii) \quad \hat{J} = UB \quad (4c)$$

$$iv) \quad \hat{C}UE + \hat{D}C = I_n \quad (4d)$$

ただし、 $\lambda_i(\hat{A})$ は $\hat{A}$ の固有値を表わす。■

(証明) 推定誤差を

$$\varepsilon \triangleq z - UEx \quad (5)$$

と定義すると、(1)、(2)式より

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{z} - U\dot{E}\dot{x} \\ &= \hat{A}\varepsilon + (\hat{A}UE + \hat{B}C - UA)x \\ &\quad + (\hat{J} - UB)u \end{aligned} \quad (6)$$

が導かれる。(4b)、(4c)式が成り立てば

$$\dot{\varepsilon} = \hat{A}\varepsilon$$

となり、さらに(4a)式より $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) となる。

このとき

$$\hat{x} = \hat{C}\varepsilon + (\hat{C}UE + \hat{D}C)x$$

であり、(4d)式が成り立てば $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ ($t \rightarrow \infty$)、すなわち(3)式が成り立つ。 Q. E. D.

定理1で得られた条件は十分条件であるが、とくに行列 E が正則の場合を考えると(このとき(1)式は状態方程式になる)、(4b)~(4d)式は

$$\begin{aligned} \hat{A}\bar{U} + \hat{B}\hat{C} &= \bar{U}E^{-1}A \\ \hat{J} &= \bar{U}E^{-1}B \\ \hat{C}\bar{U} + \hat{D}C &= I_n \end{aligned} \quad (7)$$

となり、よく知られているように、上記の定義のもとで必要十分条件となる¹²⁾。ただし、 $\bar{U} = UE$ 。そこで、以降では「定理1の条件を満たす行列 U が存在するとき、システム(2)はディスクリプタシステム(1)に対するオブザーバである」と狭義の意味で定義することにする。

3. オブザーバの設計

前章で Luenberger 型の構造をもつシステム(2)がディスクリプタシステム(1)に対するオブザーバであるための条件を明らかにした。本章ではシステム(1)とオブザーバの次数 q が与えられたとき基礎方程式(4)を満足する行列 U が存在するための条件とオブザーバパラメータの決定法について考察する。オブザーバの次数 q としてはディスクリプタ変数をすべて推定する同次元オブザーバ、 $\text{rank } E$ に等しい r 次元オブザーバおよび前章の定義のもとでの最小次元オブザーバの三つのケースをとりあげる。最初に必要な補題を準備し、つぎに各オブザーバの構成手順を示す。

まず、条件式(4d)より

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \quad (8)$$

でなければならない。この条件はシステム(1)の純静的模式モードを含むインパルスモードが可観測であることを意味し、Rosenbrock により示された¹³⁾。また、(8)式が成り立つためには $r \geq n - p$ でなければならない。(8)式が成り立つとき

$$\begin{bmatrix} E^* & C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = I_n \quad (9)$$

を満足する $E^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C^* \in \mathbb{R}^{n \times p}$ が存在する. このような E^* , C^* のクラスのなかで, $\det E^* \neq 0$ であるものを

$$\Gamma_{n,e} \triangleq \{(E^*, C^*) \mid \det E^* \neq 0, \\ E^* E + C^* C = I_n\}$$

と定義するとつぎの補題が成り立つ.

[補題]¹⁰⁾ $\Gamma_{n,e}$ は空集合でなく, その一つの要素はつぎのアルゴリズムで求められる.

$\langle (E^*, C^*) \in \Gamma_{n,e}$ を求めるアルゴリズム

1° E の行の中から独立な行を r 本選び, さらに C の行の中から E と線形独立な行を $(n-r)$ 本選ぶ操作を P_1 , P_2 とする.

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \\ n-r \\ p-n+r \end{matrix}$$

2° $W \triangleq \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 + C_1 \end{bmatrix}$ とおく.

3° $(E^*, C^*) \in \Gamma_{n,e}$ は次式より求められる.

$$E^* = W^{-1}P_1, \quad C^* = W^{-1}MP_2$$

$$: M \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-r} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

また, 条件式(4d)は

$$\text{rank} \begin{bmatrix} UE \\ C \end{bmatrix} = n \quad (10)$$

をも要求している. これより $n-p \leq \text{rank } U \leq n$, すなわち Luenberger 型オブザーバの可能な次数は最大で n 次元, 最小で $n-p$ 次元となる.

以下, (9)式の関係に留意して条件式(4b)~(4d)を満足する U とパラメータ $\hat{A} \sim \hat{D}$ を求め, つぎに $\hat{A}$ の安定性を考察する手順で, 同次元, $r (= \text{rank } E)$ 次元, 最小次元のオブザーバを構成する.

3.1 同次元オブザーバ

システム(2)において, 任意の $(E^*, C^*) \in \Gamma_{n,e}$ を選び, $\text{rank } U = n$ を考慮して

$$\hat{C} = I_n, \quad U = E^*, \quad \hat{D} = C^* \quad (11)$$

と選ぶと

$$\hat{C}UE + \hat{D}C = E^*E + C^*C = I_n$$

であるので条件式(4d)が満足される. また, 条件式(4b)に $U = E^*$ を代入し, (9)式を用いると

$$\hat{A} + (\hat{B} - \hat{A}C^*)C = E^*A \quad (12)$$

となる. よって, $K = \hat{B} - \hat{A}C^*$ とおくと

$$\hat{A} = E^*A - KC \quad (13)$$

$$\hat{B} = \hat{A}C^* + K = E^*AC^* + K - KCC^* \quad (14)$$

が得られる. さらに条件式(4c)より

$$\hat{J} = UB = E^*B \quad (15)$$

が得られる. このとき同次元オブザーバは

$$\begin{cases} \dot{z} = (E^*A - KC)z + (E^*AC^* + K \\ - KCC^*)y + E^*Bu \\ \hat{x} = z + C^*y \end{cases} \quad (16)$$

で与えられる.

残る問題は $\hat{A}$ の安定性であるが, このためには (C, E^*A) が可観測であればよい (厳密には可検出であればよいが, オブザーバの推定速度は任意に指定できることが望ましいので本論文では安定性を考えるときは可観測性を用いることにする). すなわち

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I_n - E^*A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in C \quad (17)$$

が成り立てばよい. ところが

$$\begin{bmatrix} \lambda I_n - E^*A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^* & \lambda C^* \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix}$$

かつ $\det E^* \neq 0$ であるので(17)式は

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in C \quad (18)$$

と等価である. この条件は, ディスクリプタシステム(1)の指数モードが可観測であることを意味する. したがって

《定理2》 同次元オブザーバが構成可能なための条件はシステム(1)において

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \quad (8)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in C \quad (18)$$

が成り立つこと, すなわちシステム(1)が Rosenbrock の意味で可観測であることである. ■

3.2 r 次元オブザーバ

$\text{rank } E = r$ であることと(8)式の条件より適当な正則行列 $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{R}^{p \times p}$ が存在して

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \quad (19)$$

$$VCQ = \begin{bmatrix} C_1 & I_{n-r} \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n-r \\ p-n+r \end{matrix}$$

とできる. そこで, $x = Q\bar{x}$, $y = Vy$ とおくと正則変換 P, Q, V によりシステム(1)は標準形

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2 + \bar{B}_1u \\ 0 &= \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{B}_2u \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & I_{n-r} \\ \bar{C}_{12} & 0 \end{bmatrix} \bar{x} \quad (20b)$$

に変換される. ただし, $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^r$, $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$ で

$$PAQ = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}, \quad PB = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}$$

(20b)式より $\bar{y}_1 = \bar{C}_{11}\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ なる関係があるので $\bar{x}_1$ の推定値 $\hat{\bar{x}}_1$ が構成できれば全状態 $\bar{x}$ ，したがって x の推定値が得られる。文献7)ではこの線に沿って r 次元オブザーバが導出されている。ここでは基礎方程式(4)をもとに r 次元オブザーバを構成する。

任意の $(E^*, C^*) \in \Gamma_{n,r}$ を選び，(19)式の行列 P ， Q を用いて

$$\hat{C} = E^* P^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = C^* \quad (21)$$

$$U = [I_r, L_1]P$$

とくと

$$\begin{aligned} \hat{C}UE + \hat{D}C \\ &= E^* P^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} [I_r, L_1]PE + C^* C \\ &= E^* P^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + C^* C \\ &= E^* E + C^* C = I_n \end{aligned}$$

であるので条件式(4d)が満足される。ただし， L_1 は任意の行列である。

$$UE = [I_r, 0]Q^{-1}$$

に注意すると条件式(4b)は

$$\begin{aligned} \hat{A}[I_r, 0] + \hat{B}V^{-1} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & I_{n-r} \\ \bar{C}_{12} & 0 \end{bmatrix} \\ = [I_r, L_1]PAQ \end{aligned} \quad (22)$$

となり，これより

$$\hat{A} = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}C_{11} + [L_1, L_2] \begin{bmatrix} \bar{A}_{21} - \bar{A}_{22}\bar{C}_{11} \\ \bar{C}_{12} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\hat{B} = [\bar{A}_{12} + L_1\bar{A}_{22} - L_2]V \quad (24)$$

を得る。ただし， L_2 は任意の行列である。また条件式(4c)より

$$\hat{J} = [I_r, L_1]PB = \bar{B}_1 + L_1\bar{B}_2 \quad (25)$$

となるので， r 次元オブザーバは

$$\begin{cases} \dot{z} = \{\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{C}_{11} + L_1(\bar{A}_{21} - \bar{A}_{22}\bar{C}_{11}) \\ \quad + L_2\bar{C}_{12}\}z + [\bar{A}_{12} + L_1\bar{A}_{22} - L_2]Vy \\ \quad + (\bar{B}_1 + L_1\bar{B}_2)u \\ \hat{x} = E^* P^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} z + C^* y \end{cases} \quad (26)$$

で与えられる。

残る問題は $\hat{A}$ の安定性であるが，(23)式により

$$\left(\begin{bmatrix} \bar{A}_{21} - \bar{A}_{22}\bar{C}_{11} \\ \bar{C}_{12} \end{bmatrix}, \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{C}_{11} \right)$$

が可観測であればよい。ところで

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -\bar{C}_{11} & I_{n-r} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda I_r - \bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}\bar{C}_{11} & -\bar{A}_{12} \\ -\bar{A}_{21} + \bar{A}_{22}\bar{C}_{11} & -\bar{A}_{22} \\ 0 & I_{n-r} \\ \bar{C}_{12} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つので可観測条件

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I_r - \bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}\bar{C}_{11} \\ \bar{A}_{21} - \bar{A}_{22}\bar{C}_{11} \\ \bar{C}_{12} \end{bmatrix} = r, \quad \forall \lambda \in C \quad (27)$$

と(18)式は等価である。したがって，つぎの定理を得る。

《定理3》 r 次元オブザーバが構成可能なための条件はシステム(1)が Rosenbrock の意味で可観測であることである。

3.3 最小次元オブザーバ

前項の r 次元オブザーバでは一部の出力しか利用していないが，出力情報をより積極的に用いればさらにオブザーバの次数を下げるができる。

まず， $\text{rank } C = p$ であることより

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} U^* \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

となる行列 $U^* \in \mathbf{R}^{(n-p) \times n}$ が存在する。また，

$$T = [H, D]$$

とおけば

$$HU^* + DC = I_n \quad (29)$$

が成り立つ。ここで $(E^*, C^*) \in \Gamma_{n,r}$ を用いると

$$\begin{aligned} HU^* E^* E &= (I_n - DC)(I_n - C^* C) \\ &= I_n - \{C^* + D(I_p - CC^*)\}C \end{aligned}$$

したがって

$$[HU^* E^* C^* + D(I_p - CC^*)] \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = I_n \quad (30)$$

となるので， $\text{rank } U = n - p$ を考慮して

$$\begin{aligned} \hat{C} &= H, \quad U = U^* E^* \\ \hat{D} &= C^* + D(I_p - CC^*) \end{aligned} \quad (31)$$

と選べば条件式(4d)は満足される。また，上式を条件式(4b)に代入すると

$$\hat{A}U^* + (\hat{B} - \hat{A}U^*C^*)C = U^* E^* A$$

したがって

$$[\hat{A} \quad \hat{B} - \hat{A}U^*C^*] = U^* E^* A \begin{bmatrix} U^* \\ C \end{bmatrix}^{-1} \quad (32)$$

となる。これから

$$\hat{A} = U^* E^* A \begin{bmatrix} U^* \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{n-p} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\hat{B} = U^* E^* A \begin{bmatrix} U^* \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} + \hat{A}U^*C^* \quad (34)$$

を得る。さらに条件式(4d)より

$$\hat{J} = UB = U^* E^* B \quad (35)$$

となる。残る問題は $\hat{A}$ の安定性であるが，(33)式の形では見通しが立ちにくい。そこで $\begin{bmatrix} \hat{C} \\ C \end{bmatrix} (\triangleq S^{-1})$ が正則となるように $\tilde{C} \in \mathbf{R}^{(n-p) \times n}$ を任意に選び，(28)式を満たす U^* として

$$U^* = [I_{n-p} \ L] S^{-1} \quad (36)$$

とおくと(33)式は

$$\begin{aligned} \hat{A} &= [I_{n-p} \ L] S^{-1} E^* A S \begin{bmatrix} I_{n-p} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= A_{11} + L A_{21} \end{aligned} \quad (37)$$

となる。ただし

$$S^{-1} E^* A S = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \underline{A_{21}} & \underline{A_{22}} \end{bmatrix} \begin{matrix} n-p \\ p \\ n-p \end{matrix}$$

したがって、 (A_{21}, A_{11}) が可観測であれば L を選ぶことにより $\hat{A}$ の極を任意に指定できる。ところが、

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_n - E^* A \\ C \end{bmatrix} S \\ &= \begin{bmatrix} \lambda I_{n-p} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \lambda I_p - A_{22} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つので可観測条件

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-p} - A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = n-p, \quad \forall \lambda \in C \quad (38)$$

は(17)式と、さらに(18)式と等価となる。よって

《定理4》 最小次元オブザーバが構成可能なための条件はシステム(1)が Rosenbrock の意味で可観測であることである。

このとき、最小次元オブザーバは

$$\begin{cases} \dot{z} = (A_{11} + L A_{21})z + \{A_{12} + L A_{22} - (A_{11} + L A_{21})(L - [I \ L] S^{-1} C^*)\} y \\ \quad + [I \ L] S^{-1} E^* B u \\ \dot{x} = S \begin{bmatrix} I_{n-p} \\ 0 \end{bmatrix} z + \{C^* + S \begin{bmatrix} -L \\ I_p \end{bmatrix} (I_p - C C^*)\} y \end{cases} \quad (39)$$

で与えられる。

以上、ディスクリプタシステムに対する Luenberger 型オブザーバの構成法を基礎方程式(4)をもとに示した。とくに、 $E = I_n$ の場合は $(I_n, 0) \in \Gamma_{ne}$ と選ぶと、オブザーバの存在条件は、(8)式は自明で、(18)式より (C, A) が可観測であることで、同一次元オブザーバ(16)は

$$\begin{cases} \dot{z} = (A - KC)z + Ky + Bu \\ \dot{x} = z \end{cases} \quad (40)$$

となり、Luenberger¹¹⁾の提案した状態オブザーバとなる。また、最小次元オブザーバ(39)は

$$\begin{cases} \dot{z} = (A_{11} + L A_{21})z + \{A_{12} + L A_{22} - (A_{11} + L A_{21})L\} y + [I \ L] S^{-1} B u \\ \dot{x} = S \begin{bmatrix} I_{n-p} \\ 0 \end{bmatrix} z + S \begin{bmatrix} -L \\ I_p \end{bmatrix} y \end{cases} \quad (41)$$

となり、Gopinath¹⁴⁾のアルゴリズムと一致する。

4. 数 値 例

次式で記述されるディスクリプタシステム

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (1)$$

を考える ($n=3, p=2, r=2$)。このシステムは条件式(8), (18)を満足するので Rosenbrock の意味で可観測である。したがって、任意に極配置可能なオブザーバが構成できる。

まず、補題で述べたアルゴリズムにより $(E^*, C^*) \in \Gamma_{ne}$ を求める。

$$P_1 = I_3, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

とすると

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

より

$$E^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

となる。

(1) 同一次元オブザーバ

$$E^* A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

であるので、 $\hat{A}$ の極を $\{-\alpha, -\beta, -\gamma\}$ と設定するとき K は

$$K = \begin{bmatrix} -5 & k_4 \\ 0 & k_5 \\ -1 & k_6 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$: k_4 = \alpha\beta\gamma, \quad k_5 = \alpha + \beta + \gamma$$

$$k_6 = 1 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

となる。同一次元オブザーバは(16)式より

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & -k_4 & 0 \\ 0 & -k_5 & 1 \\ 1 & 1 - k_6 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \dot{x} = z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y \end{cases} \quad (6)$$

となる。

(2) r 次元オブザーバ

E, C を(19)式の形にする P, Q, V は

$$P = I_3, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{C}_{11} &= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{A}_{21} - \bar{A}_{22}\bar{C}_{11} \\ \bar{C}_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

であるので、 $\hat{A}$ の極を $\{-\alpha, -\beta\}$ に設定すれば $[L_1 \ L_2]$ は

$$\begin{aligned} [L_1 \ L_2] &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ l_{12} & l_{22} \end{bmatrix} \\ &: l_{12} = -\alpha - \beta, \ l_{22} = -\alpha\beta \end{aligned} \quad (9)$$

と選べる。これらを(26)式に代入すると r 次元オブザーバは

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ l_{22} & l_{12} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -l_{22} & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ -l_{12} \end{bmatrix} u \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y \end{cases} \quad (10)$$

となる。

(3) 最小次元オブザーバ

$\bar{C} = [0 \ 0 \ 1]$ と選ぶと

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

と正則になる。このとき

$$S^{-1}E^*AS = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

となる ($A_{11}=0, A_{21}=[0 \ 1]^T$)。そこでオブザーバの極を $-\alpha$ とすれば、 $L=[l_1 \ -\alpha]$ と求まる。ただし、 l_1 は任意。したがって、オブザーバは(39)式より

$$\begin{cases} \dot{z} = -\alpha z + [l_1\alpha \ -5l_1 \ 1]y + (l_1 + \alpha)u \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -l_1 & 0 \end{bmatrix} y \end{cases} \quad (13)$$

となる。

5. おわりに

本論文では、ディスクリプタシステムに対してオブザーバの構造をあらかじめ Luenberger 型と定めた場合のオブザーバの基礎方程式を求め、これをもとにオブザーバの構成可能条件とその構成法を示した。とくに、行列 E が正則な場合 ($E=I_n$ としても一般性は失わない) $E^*=I_n$ 、 $C^*=0$ とすると、オブザーバの構成アルゴリズムは Luenberger や Gopinath のものと一致し、レギュラシステムを包括した議論となっている。

しかし、オブザーバを(2)式のように x の推定値を得るのに出力のみを利用する Luenberger 型と限定し

たため、ディスクリプタシステムに対する最小次元オブザーバは得られていない。これはディスクリプタシステムには入力とディスクリプタ変数の一部が線形関係になる純静的モードが存在するためである。この純静的モードを削除することにより、Vergheze の意味で可観測¹⁵⁾という緩い条件のもとでオブザーバが構成できることが明らかにされている¹⁶⁾。

本論文で求めたオブザーバの基礎方程式をもとに未知入力オブザーバ、外乱推定オブザーバ、線形関数オブザーバなども構成可能であるが、これについては別の機会に報告の予定である。

最後に、日頃ご指導くださいます東京工業大学古田勝久教授に感謝いたします。

参考文献

- 1) 池田雅夫：Descriptor 形式に基づくシステム理論，計測と制御，**24**-7，597/604 (1985)
- 2) D. Cobb: Feedback and Pole Placement in Descriptor Variable Systems, Int. J. Control, **33**-6, 1135/1146 (1981)
- 3) 張，池田，汐月：ディスクリプタ方程式表現されたシステムの極指定，計測自動制御学会論文集，**23**-3，314/316 (1987)
- 4) D. Cobb: Descriptor Variable Systems and Optimal State Regulation, IEEE Trans. Automatic Control, **AC**-28-5, 601/611 (1983)
- 5) Y. Y. Wang, S. J. Shi and Z. J. Zhang: An Improved Algorithm for Optimal State Regulation of Generalized Systems, Systems & Control Letters, **9**, 235/239 (1987)
- 6) 細江，高見，早川，伊藤：中間標準形で記述されたシステムのオブザーバ，第8回 Dynamical System Theory シンポジウム資料，43/46 (1985)
- 7) 小林，中溝：中間標準形システムのオブザーバについて，計測自動制御学会論文集，**23**-12，110/112 (1987)
- 8) M. El-Tohami, V. L. Nagy and R. Mukundan: On the Design of Observers for Generalized State Space Systems Using Singular Value Decomposition, Int. J. Control, **38**-3, 673/683 (1983)
- 9) B. Shafai and R. L. Carroll: Design of a Minimal Order Observer for Singular Systems, Int. J. Control, **45**-3, 1075/1081 (1987)
- 10) 川路，檜橋：ディスクリプタシステムに対するオブザーバの設計，計測自動制御学会論文集，**24**-2，141/148 (1988)
- 11) D. G. Luenberger: Observers for Multivariable Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC**-11-2, 190/197 (1966)
- 12) T. E. Fortmann and D. Williamson: Design of Low-Order Observers for Linear Feedback Control Laws, IEEE Trans. Automatic Control, **AC**-17-3, 301/308 (1972)
- 13) H. H. Rosenbrock: Structural Properties of Linear Dynamical Systems, Int. J. Control, **20**-2, 191/202 (1974)
- 14) B. Gopinath: On the Control of Linear Multiple Input-Output Systems, Bell System Tech. J., **50**, 1063/1081 (1971)
- 15) G. C. Vergheze, B. C. Levy and T. Kailath: A Generalized State-Space for Singular Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC**-26-4, 811/831 (1981)
- 16) 川路，汐月，檜橋：中間標準システムに対するオブザーバの構成可能条件，昭和63年電気学会全国大会講演論文集，1910/1911 (1988)