Kullback の識別情報量に基づく自己回帰モデル 識別のための最適入力[†]

魚崎 勝司*・畠中 利治*

Optimal Input for Autoregressive Model Discrimination
Based on the Kullback's Discrimination Information

Katsuji UOSAKI* and Toshiharu HATANAKA*

Experiment design for dynamic system identification has attracted considerable attention to obtain the maximal information from the observed input/output data. Most studies in this area have been devoted to accurate parameter estimation within a specified model structure. However, the problem of primary importance in system identification might be to determine the model structure itself. From this point of view, the optimal input design problem is discussed in this paper for discriminating two rival autoregressive models efficiently. An optimal input is derived, which maximizes the time increment of the Kullback's discrimination information measure to make the distance between two models as big as possible. The applicability of the proposed input for efficient autoregressive model discrimination is exemplified by simulation studies.

Key Words: identification, input design, model discrimination, Kullback's discrimination information, autoregressive models

1. はじめに

入出力データに基づいてシステムの記述を決定するシステム同定は、通常 **Fig. 1** の流れに従って行われるが、システム同定をより効率的に行うための実験計画、すなわち入力の最適な設定やサンプリング間隔の適切な選定などをいかに行うべきかについて近年多く

の研究がなされている^{1)~3)}。そのなかで、特にシステム同定のための最適入力設計が注目され、多くの研究があるが^{4)~7)}、そのほとんどがあらかじめ定められたモデル構造のもとで、そのモデルに含まれるパラメータをより精度よく推定することを目的として行われてきた。しかしながら、**Fig. 1** に示すようにシステム同定においてはモデル構造そのものの決定が本質的に重要である場合も多い。この見地からの最適入力設計に関する研究は少なく (Krolkowski and Eykhoff⁹⁾ の Table 1 参照), Uosaki^{8), 9)} および Krolkowski and Eykhoff¹⁰⁾ などが挙げられるのみである。前者は一つの制御可能な入力をもつ自己回帰モデル (ARX

Fig. 1 The identification process⁹⁾

[†] 第15回制御理論シンポジウム/第12回システムシンポジウムで発表 (昭61・6)

* 大阪大学工学部 吹田市山田丘 2-1

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita
(Received March 10, 1988)

(Revised June 11, 1988)

モデル) の可能な二つの候補のうち、いずれが適切なモデルであるかを識別するための最適入力、尤度比検定の検出力を最大にするという観点から導出して、その有効性を示したものである。他方、後者は補助行列式比の考えによって、同じ ARX モデル識別のための最適入力設計問題を考察し、入力のモデル識別能力への影響について議論している。

本論文では、モデル識別のための規範として広く知られている Kullback の識別情報量 (Kullback Discrimination Information; KDI)¹¹⁾ を基に、ARX モデル識別のための最適入力設計問題を考察し、入力の大きさに制限のある場合に、モデル識別のための最適入力を導出し、数値例によりその有効性を示す。

2. モデルと入力設計規範

線形離散時間モデルの一つである以下のような制御可能な入力 u_i をもつ自己回帰モデル (ARX モデル) を考える。

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + \dots + a_n y_{i-n} + b u_{i-1} + \varepsilon_i \quad (1)$$

ここで ε_i は互いに独立に、平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数であるとし、またシステム (1) は安定であるとする。すなわち

$$A(z^{-1}) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_n z^{-n} \neq 0 \quad |z| \geq 1 \quad (2)$$

このモデルの同定にあたっては、パラメータ推定については最小 2 乗法などを、次数推定については赤池情報量 (AIC) などを適用することができるが、入力 u_i を適切に選ぶことによって、同定をより効率的に行うことが可能となることが多い。

ここでは、同定の主目的が自己回帰モデル (1) の構造決定である場合を考える。ここで、自己回帰モデルの構造決定はすなわち次数推定となり、次数推定問題は複数個ある次数のモデル候補をしばらくこんで、最終的に二つのモデル候補のうち、いずれが適切なモデルであるかを識別するモデル識別問題に帰着されることから、入力 u_i を二つのモデル候補の識別をより効率的に行えるように設計することが望ましい。すなわちここでの問題は、自己回帰モデル (1) の次数が n であるか $n-1$ であるかを効率よく決定するための入力 u_i を、入力の振幅の大きさに関する制約条件

$$|u_i| \leq C \quad (C: \text{定数}) \quad (3)$$

のもとで求めることである。この制約条件は、現実のシステムには過大な入力を加えることができないことに対応している。

この次数決定の問題は、以下の二つの自己回帰モデ

ルから一つのモデルを識別する問題に置き換えることができる。

$$M_1: y_i = a_1^{(1)} y_{i-1} + a_2^{(1)} y_{i-2} + \dots + a_n^{(1)} y_{i-n} + b^{(1)} u_{i-1} + \varepsilon_i^{(1)} \\ = \theta^{(1)T} y_{i-1:n}^{(1)} + b^{(1)} u_{i-1} + \varepsilon_i^{(1)} \quad (4a)$$

$$M_2: y_i = a_1^{(2)} y_{i-1} + a_2^{(2)} y_{i-2} + \dots + a_{n-1}^{(2)} y_{i-n+1} + b^{(2)} u_{i-1} + \varepsilon_i^{(2)} \\ = \theta^{(2)T} y_{i-1:n}^{(2)} + b^{(2)} u_{i-1} + \varepsilon_i^{(2)} \quad (4b)$$

ただし、 $\varepsilon_i^{(j)}$ は互いに独立に、平均 0、分散 $\sigma^{(j)^2}$ の正規分布に従う確率変数とする ($j=1, 2$)。また

$$\theta^{(1)} = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}, a_n^{(1)})^T \quad a_n^{(1)} \neq 0,$$

$$\theta^{(2)} = (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_{n-1}^{(2)}, 0)^T,$$

$$y_k^* = (y_i, y_{i-1}, \dots, y_k)^T, \quad k \leq i,$$

τ は転置を表わすとする。

これら二つのモデル間の距離を表わす指標として、以下で定義される Kullback の識別情報量 (KDI)¹¹⁾ を採用しよう。

$$I_i[1:2; y^*] = \int p_1(y^* | u^{*-1}) \log \frac{p_1(y^* | u^{*-1})}{p_2(y^* | u^{*-1})} dy^* \\ = E \left[\log \frac{p_1(y^* | u^{*-1})}{p_2(y^* | u^{*-1})} \right] \quad (5)$$

ここに $p_j(y^* | u^{*-1})$ ($j=1, 2$) はモデル M_j のもとで $u^{*-1} = (u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_1)$ が与えられたときの $y^* = (y_i, y_{i-1}, \dots, y_1)$ の条件付確率密度関数であり、 $E[\cdot]$ は $p_1(y^* | u^{*-1})$ による期待値を表わしている。識別情報量はつぎの二つの性質をもっている。

$$(i) \quad I_i[1:2; y^*] \geq 0 \quad (6a)$$

$$(ii) \quad I_i[1:2; y^*] = 0 \text{ となるのは } p_1(y^* | u^{*-1}) = p_2(y^* | u^{*-1}) \text{ (二つのモデルが一致することに対応する) のとき、またそのときに限る。} \quad (6b)$$

このことから、二つのモデルの識別は識別情報量 $I_i[1:2; y^*]$ が大きければ大きいほど容易になることがわかり、したがって、モデルの識別をより効率的に行うためには、識別情報量 $I_i[1:2; y^*]$ を最大にする入力、もしくは識別情報量の時間増分

$$\Delta I_i[1:2; y^*] = I_i[1:2; y^*] - I_{i-1}[1:2; y^{*-1}] \quad (7)$$

を最大にする入力を選べばよいことになる。以下では識別情報量の時間増分 $\Delta I_i[1:2; y^*]$ を制約条件 (3) のもとで最大にする入力を求めることにする。

3. モデル識別のための入力設計

確率密度関数 $p_j(y^* | u^{*-1})$ に対する連鎖則

$$p_j(y^* | u^{*-1}) = p_j(y_i | y^{*-1}, u^{*-1}) p_j(y^{*-1} | u^{*-1}) \\ = p_j(y_i | y^{*-1}, u^{*-1}) p_j(y^{*-1} | u^{*-2}) \quad (8)$$

を(5)式に用いることにより次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta I_t[1:2; y'] &= \int p_1(y^{t-1}|u^{t-2}) dy^{t-1} \\ &\times \int p_1(y_t|y^{t-1}, u^{t-1}) \\ &\log \frac{p_1(y_t|y^{t-1}, u^{t-1})}{p_2(y_t|y^{t-1}, u^{t-1})} dy_t \\ &= E\{I_t[1:2; y_t]\} \quad (9) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \tilde{I}_t[1:2; y_t] &= \int p_1(y_t|y^{t-1}, u^{t-1}) \\ &\log \frac{p_1(y_t|y^{t-1}, u^{t-1})}{p_2(y_t|y^{t-1}, u^{t-1})} dy_t \quad (10) \end{aligned}$$

および $E\{I_t[\cdot]\}$ は $p_1(y^{t-1}|u^{t-2})$ による期待値を表す。

システム(1)の線形性と、 ε_t の正規性より、モデル $M_j(j=1,2)$ のもとでの u^{t-1} が与えられたときの y^t の条件付確率分布および y^{t-1} 、 u^{t-1} が与えられたときの y_t の条件付確率分布はともに正規分布である。すなわち

$$\begin{aligned} p_j(y^t|u^{t-1}) &= (2\pi)^{-t/2} |\Sigma^{(j)}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(y^t - \mu^{(j)t})^T (\Sigma^{(j)})^{-1} (y^t - \mu^{(j)t})\right) \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_j(y_t|y^{t-1}, u^{t-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{(j)}}} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^{(j)^2}}(y_t - m_t^{(j)})^2\right) \quad (12) \end{aligned}$$

ここに

$$\mu^{(j)t} = E_j[y^t|u^{t-1}] \quad (13a)$$

$$\Sigma^{(j)} = E_j[(y^t - \mu^{(j)t})(y^t - \mu^{(j)t})^T|u^{t-1}] \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} m_t^{(j)} &= E_j[y_t|y^{t-1}, u^{t-1}] \\ &= \theta^{(j)T} y_{t-n}^{t-1} + b^{(j)} u_{t-1} \quad (13c) \end{aligned}$$

また $E_j[\cdot|x]$ は $p_j(\cdot|x)$ による条件付期待値を表す。(12)を用いると

$$\begin{aligned} \tilde{I}_t[1:2; y_t] &= -\log \frac{\sigma^{(2)}}{\sigma^{(1)}} + \frac{\sigma^{(1)^2} - \sigma^{(2)^2}}{2\sigma^{(2)^2}} + \frac{(m_t^{(1)} - m_t^{(2)})^2}{2\sigma^{(2)^2}} \quad (14) \end{aligned}$$

が得られる。(14)の第3項の $p_1(y^{t-1}|u^{t-2})$ による期待値は

$$\begin{aligned} E\{I_t[1:2; y_t]\} &= \frac{1}{2\sigma^{(2)^2}} E\{I_t[(\theta^{(1)T} y_{t-n}^{t-1} + b^{(1)} u_{t-1})^2]\} \end{aligned}$$

Fig. 2 Dependence of $\Delta I_t[1:2; y']$ on u_{t-1}

$$\begin{aligned} & -\theta^{(2)T} y_{t-n}^{t-1} - b^{(2)} u_{t-1})^2] \\ &= \frac{1}{2\sigma^{(2)^2}} [\text{tr}\{(\sum_{i=1}^{t-1} \mu_{i-n}^{(1)}) \\ &+ (\mu_{i-n}^{(1)}) (\mu_{i-n}^{(1)})^T (\delta\theta) (\delta\theta)^T\} \\ &+ 2(\delta\theta)^T \mu_{i-n}^{(1)} (\delta b) \cdot u_{t-1} + (\delta b)^2 u_{t-1}^2] \quad (15) \end{aligned}$$

ただし

$$\mu_{i-n}^{(1)} = E_1[y_{i-n}^{t-1}|u^{t-2}] = (\mu_{i-n}^{(1)}, \mu_{i-n}^{(2)}, \dots, \mu_{i-n}^{(n)}) \quad (16a)$$

($\{\mu_i^{(1)}\}$ は $\mu_i^{(1)} = \sum_{i=1}^n a_i^{(1)} \mu_{i-n}^{(1)} + b^{(1)} u_{t-1}$ で逐次計算される.)

$$\Sigma_{i-n}^{(1)} = E_1[(y_{i-n}^{t-1} - \mu_{i-n}^{(1)})(y_{i-n}^{t-1} - \mu_{i-n}^{(1)})^T|u^{t-2}] \quad (16b)$$

$$\delta\theta = (a_1^{(1)} - a_1^{(2)}, a_2^{(1)} - a_2^{(2)}, \dots, a_{n-1}^{(1)} - a_{n-1}^{(2)}, a_n^{(1)}) \quad (16c)$$

$$\delta b = b^{(1)} - b^{(2)} \quad (16d)$$

と求められて、 $E\{I_t[1:2; y_t]\}$ を求めることができる。したがって Kullback の識別情報量の時間増分はつぎの形で与えられることになる。

$$\Delta I_t[1:2; y'] = \alpha u_{t-1}^2 + 2\beta u_{t-1} + \gamma \quad (17)$$

ここで

$$\alpha = \frac{(\delta b)^2}{2\sigma^{(2)^2}} \quad (18a)$$

$$\beta = \frac{(\delta\theta)^T \mu_{i-n}^{(1)} (\delta b)}{2\sigma^{(2)^2}} \quad (18b)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2\sigma^{(2)^2}} [\sigma^{(1)^2} - \sigma^{(2)^2} + \text{tr}\{(\sum_{i=1}^{t-1} \mu_{i-n}^{(1)}) \\ &+ (\mu_{i-n}^{(1)}) (\mu_{i-n}^{(1)})^T (\delta\theta) (\delta\theta)^T\}] \\ &+ \log \frac{\sigma^{(2)}}{\sigma^{(1)}} \quad (18c) \end{aligned}$$

(17)で求められた $\Delta I_t[1:2; y']$ は入力 u_{t-1} に関する2次式であるから、制約条件(3)のもとで $\Delta I_t[1:2; y']$ を最大にする u_{t-1} は Fig. 2 から明らかなように

$$u_{i-1}^* = C \operatorname{sgn} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \\ = C \operatorname{sgn} ((\delta b)(\delta \theta)^T \mu_{i-1}^{(1)}) \quad (19)$$

である。以上をまとめてつぎの定理を得る。

《定理》 振幅に関する制約条件(3)のもとで、Kullback の識別情報量 (KDI) の時間増分(7)を最大にするという意味で最適な、自己回帰モデル(1)の次数決定のための最適入力(19)で与えられる。 ◀

なお実際に(19)で与えられた最適入力を構築するにあたっては、 δb , $\delta \theta$, $\mu_{i-1}^{(j)}$, $\sigma^{(j)^2}$ ($j=1, 2$) の値が必要であるが(注1), これらの値は同定実験の前にはもちろん未知であるので、以下のような逐次的入力構成法を用いることが考えられる。

- 1) 「予備的」入力を用いて出力の観測値を得る。
- 2) 出力の観測値をもとに δb , $\delta \theta$, $\mu_{i-1}^{(j)}$, $\sigma^{(j)^2}$ ($j=1, 2$) の値を推定する (逐次最小 2 乗法などの利用が考えられる)。
- 3) 2) で得られた推定値を真値と考えて(19)により最適入力を構成する。
- 4) 3) で得られた最適入力による出力の観測値を求め、2) へもどる。

4. 数 値 例

前章で導いた Kullback の識別情報量の時間増分を最大にする最適入力の有効性を確認するため、計算機実験を行った。

真のモデルが 2 次の自己回帰モデル (ARX モデル)

$$y_i = 0.5y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + u_{i-1} + \varepsilon_i$$

ただし ε_i は平均 0, 分散 1 の独立な正規確率変数列であるとき、観測値 $\{y_i\}$ をもとに自己回帰モデルの次数が 1 であるか、2 であるかを決定する問題を考える。加える入力 u_i は振幅について

$$|u_i| \leq 1$$

の制限があるとし、つぎの二つの場合について次数決定をより効率的に行うための入力 u_{i-1}^* , (19), を前節で述べた逐次的入力構成法により求めた。

Case 1 $a_2 = -0.1$

Case 2 $a_2 = -0.3$

ここでモデルの次数決定の規範としては赤池情報量 (AIC)¹⁴⁾を採用する。AIC は次式で与えられる。

$$AIC(p) = \log \frac{RSS(p)}{t} + \frac{2p}{t}$$

ただし $RSS(p)$ は次数 p のモデルの残差平方和で

$$RSS(p) = \sum_{k=p+1}^t \left(y_k - \sum_{j=1}^p \hat{a}_{jp} y_{k-j} \right)^2$$

と表わされ、 $\hat{a}_{jp}$ ($j=1, \dots, p$) は p 次モデルをあてはめたときの自己回帰モデルの最尤推定値である (推定値のモデルの次数 p への依存性を示すため、添字 p をつけてある)。モデルの次数の推定値 $\hat{p}$ は $AIC(p)$ を最小にする p として求められる(注2)。すなわち

$$\hat{p} = \arg \min_p AIC(p)$$

Fig. 3 には、AIC の次数 $p=2$ での相対差

$$\Delta AIC(2) = \frac{AIC(1) - AIC(2)}{|AIC(2)|}$$

の時間的変動を、提案した入力 u_{i-1}^* および同じ振幅に対する制限を満たすランダムな入力

$$u_{i-1}^* \begin{cases} 1 & \left(\text{確率} \frac{1}{2} \text{で} \right) \\ -1 & \left(\text{確率} \frac{1}{2} \text{で} \right) \end{cases}$$

に対して示す。AIC(p) は真の次数 $p=2$ で最小となること、および AIC(p) の真の次数前後での変化量が大きいほど次数推定が容易であることから、Fig. 4

(注2) 真の確率密度関数を $g(x)$, モデルに対する確率密度関数を $f(x|\theta)$ (ただし θ は p 次元パラメータ) とすると

$$-\frac{1}{2} AIC(p) = \log(\text{最大尤度}) - p$$

は期待平均対数尤度

$$S(g: f(\cdot|\theta)) = \int g(x) \log f(x|\theta) dx$$

の不偏推定量であり、一方 Kullback の識別情報量 $I[g: f]$ は

$$I[g: f] = S(g: g) - S(g: f(\cdot|\theta))$$

と表現できるから、AIC と Kullback 情報量とは期待平均対数尤度を介して密接に結ばれていることがわかる。

いま二つのモデル候補があって、それぞれの確率密度関数を $f_1(x|\theta_1)$, $f_2(x|\theta_2)$ (θ_1 , θ_2 はそれぞれ p_1 次元, p_2 次元のパラメータ) とするとき、 f_1 , f_2 に対する Kullback 情報量は

$$I[f_1: f_2] = S(g: f_1(\cdot|\theta_1)) - S(g: f_2(\cdot|\theta_2)) \\ + \int (f_1(x|\theta_1) - g(x)) \log \frac{f_1(x|\theta_1)}{f_2(x|\theta_2)} dx$$

と書ける。右辺第 1 項, 第 2 項はそれぞれ $-\frac{1}{2} AIC(p_1)$, $-\frac{1}{2} AIC(p_2)$ に対応する量である。よって、AIC(p) の最小値を見出したいときには、AIC(p) の p に対する変化量が大きいほど明確な判断ができるから、入力 u_i を適切に選んで $S(g: f_1(\cdot|\theta_1)) - S(g: f_2(\cdot|\theta_2))$ が大きくなるほど、すなわち Kullback 情報量 $I[f_1: f_2]$ が大きくなるほど AIC(p) の最小値を見出すのが容易になることになる。

(注1) 動的システムの同定のための実験計画において、最適入力は一般にシステムの未知パラメータに依存することは避けえない(文献4)~7), 12) 参照)。なおこのように真のシステムに依存しないような実験計画について最近 Ljung らが一つの提案をしている¹³⁾。

Fig. 3 Relative difference of AIC for Case 1

Fig. 4 Relative difference of AIC for Case 2

において $\Delta AIC(2)$ は正で大きな値をとればとるほど次数推定が、正確に、かつ容易に行えることになる。Case 1 は $|a_2|$ の値が小さく、自己回帰モデルの次数が1次か2次かの区別がつきにくい場合に対応するが、ランダム入力 u_{t-1}^* の場合には $\Delta AIC(2)$ の値は負の値をとる（すなわち $AIC(1) < AIC(2)$ を意味する）ことが多く、真の次数 $p=2$ を求めることが容易でないのに比べ、提案した入力 u_{t-1}^0 では $\Delta AIC(2)$ は少ない観測データ数に対してでも正の値を与え、真の次数を推定することが可能となっている。Case 2 は $|a_2|$ がやや大きく、1次と2次の区別が明らかな場合で、この場合には u_{t-1}^* , u_{t-1}^0 はともに正の $\Delta AIC(2)$ を与えているから真の次数を求めることができるが、 u_{t-1}^0 によるほうが $\Delta AIC(2)$ の値は大きく、1次と2

次の識別をより明確にしていることになる。

他の例¹⁵⁾も参照することにより、提案した入力 u_{t-1}^0 の、自己回帰モデル識別に有効であることがわかる。

5. おわりに

システム同定をより効率的に行うための入力設計に関しては、あらかじめ指定された構造をもつモデルに含まれるパラメータの有効な推定を目的とする研究が大多数を占め、モデル構造の効率的な推定を目的とするものはほとんどなされていなかった。本論文では、モデル構造自体の決定が本質的に重要な場合が少なくないことを考慮して、モデル構造の効率的な決定のための最適入力設計問題について考察を行った。すなわち、対象とするモデルとして制御可能な入力をもつ自己回帰モデルをとりあげ、可能な二つの候補のうち、いずれが適切なモデルであるかを効率的に決定する入力を、Kullback の識別情報量の時間増分を最大にする入力として導出した。さらに導出した入力がモデル識別に有効であることを、シミュレーション実験により確認した。本論文の手法はより一般的な線形離散時間確率システムの構造識別にも適用できるが、これについては別の機会にゆずる。また本論文では最適入力の設計を時間領域で行ったが、これ

を周波数領域で行うことも可能と考えられ、現在検討をすすめている。

なお本文中でも述べたようにモデル構造の効率的な決定のための最適入力は、モデルに含まれるパラメータの真値に依存する。本論文ではモデル識別のための最適入力をパラメータ推定値を用いて近似的に構成したが、その結果パラメータの推定精度に入力の最適性が影響されることになる。そこで、モデル構造の決定とパラメータ推定の二つを同時に考慮した最適入力に関する考察も今後必要になると考えられる。

参考文献

- 1) K. J. Åström and P. Eykhoff: System Identification—a Survey, *Automatica*, 7, 123/162 (1971)

- 2) G. C. Goodwin and R. L. Payne: Dynamic System Identification, Academic Press (1977)
- 3) M. B. Zarrop: Optimal Experiment Design for Dynamic System Identification, Springer-Verlag (1979)
- 4) R. K. Mehra: Optimal Input Signals for Parameter Estimation in Dynamic Systems—Survey and New Results, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-19-6**, 753/768 (1974)
- 5) T. S. Stoica and T. Söderström: A Useful Input Parametrization for Optimal Experiment Design, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-27-4**, 986/989 (1982)
- 6) T. S. Ng, Z. H. Qureshi and Y. C. Cheah: Optimal Input Design for an AR Model with Output Constraints, Automatica, **20**, 739/742 (1984)
- 7) A. Królikowski and P. Eykhoff: Input Signal Design for System Identification: a Comparative Analysis, IFAC Identification and System Parameter Estimation 1985, 915/920, Pergamon Press (1986)
- 8) K. Uosaki, I. Tanaka and H. Sugiyama: Optimal Input Design for Autoregressive Model Discrimination with Constrained Output Variance, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-29-4**, 348/350 (1984)
- 9) K. Uosaki, I. Tanaka and H. Sugiyama: Optimal Input for Discrimination of Autoregressive Models under Output Amplitude Constraints, Int. J. Systems Sci., **18-2**, 323/332 (1987)
- 10) A. Królikowski and P. Eykhoff: Aspects of Input Signal Design for Model Order and Parameter Estimation in Linear Dynamical Systems, Identification, Adaptive and Stochastic Control (L. Ljung and K. J. Åström (ed.)), 735/740, Pergamon Press (1984)
- 11) S. Kullback: Information Theory and Statistics, J. Wiley (1959)
- 12) T. Söderström and P. G. Stoica: Instrumental Variable Methods for System Identification, Chapter 7, Springer-Verlag (1983)
- 13) Z. D. Yuan and L. Ljung: Unprejudiced Optimal Open Loop Input Design for Identification of Transfer Function, Automatica, **21**, 697/708 (1985)
- 14) H. Akaike: A New Look at the Statistical Model Identification, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-19-6**, 716/723 (1974)
- 15) K. Uosaki and T. Hatanaka: Optimal Input Design for Autoregressive Model Discrimination Based on the Kullback-Leibler Discrimination Information, 第 15 回制御理論シンポジウム資料/第 12 回システムシンポジウム講演論文集, 385/388 (1986)