離散時間最適レギュレータの極の配置可能範囲[†]

藤 中 透*・杉 本 謙 二*・山 本 裕*・片 山 徹*

The Region of Poles for Discrete-Time LQ Regulators

Toru FUJINAKA*, Kenji SUGIMOTO*, Yutaka YAMAMOTO* and Tohru KATAYAMA*

In the design of discrete-time optimal regulators the location of the optimal closed-loop poles is determined by the weighting matrices of the performance index. When the controlled object is given in such a way that certain mode is decomposed from the others, it is possible to specify the weighting matrices so that only the specified mode is altered. This paper aims at clarifying the relationship between the weighting matrices and the optimal poles. Assuming the procedure of moving one real or a complex conjugate pair of poles and then confining the discussion to the corresponding eigenspace, the method gives rise to a systematic characterization of optimality after pole-shifting. To this end, the basic property of the associated symplectic matrix, namely the fact that the optimal poles are given as the eigenvalues of the symplectic matrix, is effectively used. The result is applicable to determining the domain where the closed-loop pole can be optimal. This is an extension to the results of Solheim (1974) and Amin (1984).

Key Words: discrete-time systems, LQ optimal regulators, pole shifting, symplectic matrix

1. ま え が き

離散時間最適レギュレータを制御系の設計に用いる場合、評価関数の重みと閉ループ極の位置との対応関係が直接的でないため、極配置を考慮して設計を行うことは容易でない。そこで、制御対象をモード分解された形で扱い、着目した極のみを逐次指定された位置に移動する方法が Solheim¹⁾により提案されている。ただし、この方法では複数の極を移動したときに全体としての最適性が保証されないという離散時間系特有

の困難があった。これは、連続時間最適レギュレータの性質がそのまま離散時間系では成り立たないことを示す一例である。この困難は、Amin²⁾により解決されているが、このことから推測されるように、連続時間系の最適レギュレータの性質は、離散時間系への変換では失われてしまうことが多い。

さて、極の逐次移動により離散時間最適レギュレータの設計を行う場合、指定可能な閉ループ極の範囲が明らかになれば設計に役立つと考えられる。文献1)、2)ではこの範囲が不明であり、指定可能な範囲はきわめて限定されていた。本論文では着目した一つの実数極あるいは一対の共役複素極のみを移動する場合について、離散時間最適レギュレータとして配置可能な閉ループ極の範囲を求める。筆者らは、連続時間系に対してもすでに同様の問題を考察しているが³⁾、離散時間系に対しては、独立した解析が必要である。得られた結果は従来の結果^{1), 2)}の大幅な拡張となっている。

2. 問題の設定と準備

つぎの式で表わされる線形離散時間系を考える。

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \quad y_k = Cx_k \\ x &\in R^n, \quad y \in R^m, \quad u \in R^r \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 (A, B) は可制御、 A は可逆であるとする。この系に対する評価関数を

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \quad (2)$$

とする。ただし、 $Q \geq 0$, $R > 0$ であり、 $(Q^{1/2}, A)$ は可観測であるとする。 J を最小にする入力 u_k はよく知られているように⁴⁾ リカッチ方程式

$$P = A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q \quad (3)$$

の半正定解 P を用いて線形状態フィードバック則

$$u_k = -F x_k, \quad F = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (4)$$

で与えられ、このとき

$$\begin{aligned} A_c &= A - BF \\ &= (B R^{-1} B^T P + I)^{-1} A \end{aligned} \quad (5)$$

[†] 第 26 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 62・7)

* 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

* Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto

(Received September 24, 1987)

(Revised July 30, 1988)

で与えられる最適閉ループ系の行列 A_c は安定となる。

連続時間系のハミルトン行列の性質に対応するものとしてつぎの性質が成り立つ。

〔補題 1〕⁵⁾ 重み Q に対する最適閉ループ極を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ とする。このとき、つぎのシンプレクティック行列 H の固有値は $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, 1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n\}$ である。

$$H = \begin{bmatrix} A + VA^{-T}Q & -VA^{-T} \\ -A^{-T}Q & A^{-T} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ただし、添字 $-T$ は逆行列の転置を表わし、 V は次式で定義される行列である。

$$V = BR^{-1}B^T \quad (7)$$

行列 H の特性方程式はブロック行列の行列式の公式⁶⁾を用いるとつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \det(zI - H) &= \det(zI - A - VA^{-T}Q) \\ &\quad \cdot \det(zI - A^{-T} - A^{-T}Q(zI \\ &\quad - A - VA^{-T}Q)^{-1}VA^{-T}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

したがって、(8)式を解けば、重み行列 Q 、 R に対する最適閉ループ極を求めることが可能である。ただし、このままでは、重みを変化させた場合に閉ループ極が複素平面上のどの範囲に存在しうるかを知ることは困難である。

以下の章ではシンプレクティック行列 H の性質に関連して、ある数（実数または複素数）とその逆数との和がしばしば現れる。そこで、 $\text{Bir}(\lambda)$ (Basic Invariant with respect to Reciprocals) という関数を用意しておく。

$$\text{Bir}(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda} \quad (9)$$

さて、制御対象をモード分解された形で扱い、着目した極のみを逐次移動することによって望ましい極配置を得る設計法を考えよう。ここで、着目する極としては一つの実数極および一対の共役複素極が考えられるが、いずれの場合においても、着目した部分が他のモードと分離された形で制御対象(1)を表現しておくことにする。すなわち、適当な正則行列 M を用いて

$$x = Mx_m \quad (10)$$

なる相似変換を行うことにより係数行列 A を

$$\begin{aligned} A_m &= M^{-1}AM \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

の形に変換し、 A_{11} を移動対象となるモードに対応する 1×1 または 2×2 行列であるとする。

(10)式の相似変換により、行列 V 、 Q は

$$\begin{aligned} V_m &= M^{-1}BR^{-1}B^T M^{-T} \\ &= \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2^T & V_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$Q_m = M^T Q M$$

$$= \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

と変換される。

着目したモードのみを移動し、他のモードを不変に保つためには、行列 A_m 、 V_m 、 Q_m の第(1,1)ブロックのみを取り出して考え、 $Q_2=0$ 、 $Q_3=0$ と設定することにより、 A_{11} に対応する部分のみに最適フィードバックを施せばよい。

以下の章では、着目した極のみを逐次移動する設計法において、対応する部分の重み行列 Q_1 を $(Q_1)^{1/2}$ 、 A_{11} が可観測となる範囲で変化させたときの閉ループ極の存在範囲を求める。重み行列 R は設計パラメータとしてあらかじめ与えられており、必要ならば着目したモードごとに定数倍したものを考えるものとする。最適閉ループ極は補題 1 によりシンプレクティック行列 H の特性方程式の解として与えられるから、以下ではリカッチ方程式(3)や状態フィードバック則(4)を陽に用いることはせず、もっぱら H の特性方程式(8)を評価することによって結果を導く。

3. 一つの実数極に着目する場合

まず、一つの実数極 a のみを移動する場合を考える。着目した部分の状態変数の次数は $n=1$ であるから、対応するシンプレクティック行列 H の要素を

$$A_{11} = [a], \quad V_1 = [v], \quad Q_1 = [q] \quad (13)$$

とおく。ここで、(13)式の v は正数であるが、評価関数(2)において Q および R を定数倍してもリカッチ方程式の解および J の最小値が同じく定数倍されるだけで閉ループ極の位置には影響しないことに注意しておく。そこで、以下では一般性を失うことなく(13)式で $v=1$ であるとする。

着目した部分に関する最適閉ループ極の存在範囲について、つぎの結果が得られる。

《定理 1》 一つの実数極 a に対応する $n=1$ の部分を考える。このとき、 a_c がある重み q に対する最適閉ループ極であるための必要十分条件は、 a_c がつぎの i), ii) を同時に満たすことである。

$$\text{i)} \quad a_c \text{ は } a \text{ と同符号である。} \quad (14)$$

$$\text{ii)} \quad |a_c| < \min \left(|a|, \left| \frac{1}{a} \right| \right) \quad (15)$$

定理 1 を証明するために、つぎの補題を用いる。

〔補題 2〕 開ループ極 a に対して a_c が最適閉ループ極であるための必要十分条件は、 a_c が安定であり、かつ $q > 0$ が存在して

$$\text{Bir}(a_c) = \text{Bir}(a) + \frac{q}{a} \quad (16)$$

を満たすことである。

(証明) まず、重み q のとりうる範囲は、 $Q_1 \geq 0$ であるから (Q_1^2, A_{11}) 可観測性の仮定より $q > 0$ である。このとき最適閉ループ系は安定である。したがって、補題 1 より、 a_c が最適閉ループ極であるための必要十分条件は、 a_c がシンプレクティック行列 H の安定な固有値であることである。そこで、 H の特性方程式を用いて重みと閉ループ極の関係を導出する。 $n=1$ の部分に対するシンプレクティック行列は (13) 式で $v=1$ としたものを (6) 式に当てはめると

$$H = \begin{bmatrix} a+q/a & -1/a \\ -q/a & 1/a \end{bmatrix} \quad (17)$$

である。したがって、 H の特性方程式は

$$z^2 - \{\text{Bir}(a) + q/a\}z + 1 = 0 \quad (18)$$

となる。ここで、 a_c を H の固有値、すなわち (18) 式の解とすると、2 次方程式の根と係数の関係により $1/a_c$ も (18) 式の解であり、(16) 式が成立することがわかる。明らかに以上の議論の逆も成立するから、 a_c が最適閉ループ極であるための必要十分条件は、 a_c が安定であり、かつ (16) 式を満たす $q > 0$ が存在することである。□

(定理 1 の証明) まず、与えられた a_c がなんらかの重み q に対する最適閉ループ極であると仮定すると、補題 2 より a_c は安定であり、 $q > 0$ が存在して (16) 式が成立する。このとき、(16) 式より明らかに a_c は a と同符号であり、さらに、

$$|\text{Bir}(a_c)| > |\text{Bir}(a)| \quad (19)$$

が成立する。ここで、一般の実数 λ に対して $|\text{Bir}(\lambda)|$ が $|\lambda|=1$ のとき最小となり $|\lambda| \rightarrow 0$ あるいは $|\lambda| \rightarrow \infty$ とともに増加すること、および、 a_c は安定で a は安定または不安定であること、の 2 点に注意すると、(19) 式より (15) 式が導かれる。

逆に、 a_c が i), ii) を満たすと仮定すると、(15) 式より $|a_c| < 1$ であり、上と同様の議論により (19) 式が成立する。(16) 式を q について解くと

$$q = a \{ \text{Bir}(a_c) - \text{Bir}(a) \} \quad (20)$$

となる。条件 i) および (19) 式より、(20) 式で定められる q は $q > 0$ を満たすから、補題 2 より、 a_c は重み q に対応する最適閉ループ極である。□

4. 一对の共役複素極に着目する場合

つぎに、一对の共役複素極 $a_1 \pm ja_2$ を移動する場合を考えよう。着目した部分の状態変数の次数は $n=2$ であるから、この部分に対応する (6) 式の行列 H の要素を

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

とおいて、 Q_1 と閉ループ極との関係を論じる。ここで、(21) 式の V_1 は対称行列であるから直交変換により対角化可能であり、一方、 A_{11} は直交変換に対して不変であるか、または A_{11}^T になる。したがって、 V_1 が対角行列、かつ A_{11} が (21) 式の形となるように (10) 式の変換行列 M を選ぶことが可能である。さらに、(13) 式の場合と同様に評価関数を定数倍することを考えると、一般性を失うことなく

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (22)$$

とおくことができる。以下では、(21) 式の V_1 は (22) 式の形になっているものとする。

最適閉ループ極の存在範囲を調べるには、やはり H の特性方程式を利用する。ただし、 H の特性方程式が 4 次方程式となるため、その扱いは一つの実数極の場合ほど簡単ではない。そこで、以下では重みが増化したときに H の特性方程式の係数がとりうる範囲を求め、これによって、閉ループ極の存在範囲を特徴づける。

本章の主な結果はつぎに述べるとおりである。

《定理 2》 一对の共役複素極 $\alpha = a_1 + ja_2$, $\bar{\alpha} = a_1 - ja_2$ に対応する $n=2$ の部分を考える。ただし、 $\rho \neq 0$ であると仮定する。この部分に状態フィードバックを施したときの閉ループ極を λ_1, λ_2 とする。ただし、 λ_1, λ_2 は一对の共役複素極あるいは二つの実数極である。ここで、実数 c_1, c_2 を

$$c_1 = \text{Bir}(\lambda_1) + \text{Bir}(\lambda_2) - \text{Bir}(\alpha) - \text{Bir}(\bar{\alpha}) \quad (23)$$

$$c_2 = \text{Bir}(\lambda_1) \cdot \text{Bir}(\lambda_2) - \text{Bir}(\alpha) \cdot \text{Bir}(\bar{\alpha}) \quad (24)$$

と定義する。このとき、 λ_1, λ_2 が、(21) 式の重み行列 Q_1 を対角行列としたときに対応する最適閉ループ極となっているための必要十分条件は、 λ_1, λ_2 が安定であり、かつ c_1, c_2 がつぎの i), ii) を同時に満たすことである。

$$\text{i)} \quad c_1 \text{ は } a_1 \text{ と同符号である。} \quad (25)$$

$$\text{ii)} \quad d_1 \leq c_2 \leq d_2 \quad (26)$$

ただし、 d_1, d_2 はつぎのように定義される実数である。

$$d_1 = \frac{1}{a_1} (a_1^2 + 1 + a_2^2 \rho) c_1 \quad (27)$$

$$d_2 = \begin{cases} \frac{1}{4|\alpha|^2} \left\{ \frac{|\alpha|^2}{a_1} c_1 + a_2^2 \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right) \right\}^2 \\ \quad + \frac{1}{a_1} (a_1^2 + 1 + a_2^2 \rho) c_1 & (q_{3a} \geq q_{3b} \text{ のとき}) \\ \frac{1}{a_1} (a_1^2 + 1 + \frac{a_2^2}{\rho}) c_1 & (q_{3a} < q_{3b} \text{ のとき}) \end{cases} \quad (28)$$

$$q_{3a} = \frac{|\alpha|^2}{a_1 \rho} c_1 \quad (29)$$

$$q_{3b} = \frac{|\alpha|^2}{2a_1 \rho} c_1 + \frac{a_2^2}{2\rho^2} (1 - \rho^2) \quad (30)$$

以下、定理2を証明するために用いる補題を述べる。

〔補題3〕 λ_1, λ_2 が最適閉ループ極であるための必要十分条件は λ_1, λ_2 が安定であり、かつ、要素が

$$q_1 \geq 0, q_3 \geq 0, q_1 q_3 - q_2^2 \geq 0, q_1 + q_3 > 0 \quad (31)$$

を満たす重み Q_1 が存在してつぎの二つの式を同時に満たすことである。

$$\begin{aligned} & \text{Bir}(\lambda_1) + \text{Bir}(\lambda_2) - \text{Bir}(\alpha) - \text{Bir}(\bar{\alpha}) \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2} \{a_1 q_1 + a_2 (1 - \rho) q_2 + a_1 \rho q_3\} \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Bir}(\lambda_1) \cdot \text{Bir}(\lambda_2) - \text{Bir}(\alpha) \cdot \text{Bir}(\bar{\alpha}) \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2} \{ (a_1^2 + 1 + a_2^2 \rho) q_1 + (a_1^2 \rho + \rho + a_2^2) q_3 \\ &+ 2a_1 a_2 (1 - \rho) q_2 + \rho (q_1 q_3 - q_2^2) \} \quad (33) \end{aligned}$$

(証明) まず、(31)式の四つの不等式は、 Q_1 のとりうる範囲をその要素で表わしたものである。すなわち、はじめの三つが $Q_1 \geq 0$ に対応し、最後の一つは、 $(Q_1^{-1/2}, A_{11})$ の可観測性の仮定により $Q_1 \neq 0$ であることを付け加えたものである。(31)式を満たす Q_1 に対する最適閉ループ系は安定であるから、補題1より、 λ_1, λ_2 が最適閉ループ極であるためには、 λ_1, λ_2 がシンプレクティック行列 H の安定な固有値であることが必要である。

さて、閉ループ極 λ_1, λ_2 が最適であると仮定すると、 λ_1, λ_2 は安定であり、対応する H の特性方程式は、補題1より

$$(z - \lambda_1) \left(z - \frac{1}{\lambda_1} \right) (z - \lambda_2) \left(z - \frac{1}{\lambda_2} \right) = 0 \quad (34)$$

でなければならない。(34)式を展開すると

$$\begin{aligned} & z^4 - \{ \text{Bir}(\lambda_1) + \text{Bir}(\lambda_2) \} (z^3 + z) \\ &+ \{ \text{Bir}(\lambda_1) \cdot \text{Bir}(\lambda_2) + 2 \} z^2 + 1 = 0 \quad (35) \end{aligned}$$

と表わされる。

一方、 H の要素として、(21)、(22)式を(8)式に代入して展開し、(35)式と係数比較すれば(32)、(33)式が得られる。したがって、 λ_1, λ_2 が最適閉ループ極であれば(32)、(33)式を満たす重み Q_1 が存在する。

逆に、安定な閉ループ極 λ_1, λ_2 に対して適当な重み Q_1 が存在して(32)、(33)式を満たすとき、補題1により λ_1, λ_2 は、その重み Q_1 に対応する最適閉ループ極である。□

(定理2の証明) まず、必要性を示す。 Q_1 を対角行列と仮定したので、補題3で $q_2 = 0$ の場合を考える。(32)、(33)式を(23)、(24)式に代入して $q_2 = 0$ と

おくと

$$c_1 = \frac{a_1}{|\alpha|^2} (q_1 + \rho q_3) \quad (36)$$

$$\begin{aligned} c_2 = \frac{1}{|\alpha|^2} \{ & (a_1^2 + 1 + a_2^2 \rho) q_1 + (a_1^2 \rho + \rho + a_2^2) q_3 \\ & + \rho q_1 q_3 \} \quad (37) \end{aligned}$$

となる。補題3より、 λ_1, λ_2 が最適閉ループ極であれば(31)式のもとで(32)、(33)式を満たす重み q_1, q_3 が存在する。このとき、(36)式より c_1 は a_1 と同符号であるから、i)の必要性が示された。

つぎに、(26)式の必要性を示すための準備として、重み q_3 がとりうる範囲を求めておく。(36)式を q_1 について解くと

$$q_1 = \frac{|\alpha|^2}{a_1} c_1 - \rho q_3 \quad (38)$$

となる。(29)式で定義した q_{3a} は(38)式で $q_1 = 0$ のときの q_3 の値である。したがって、 $q_1 \geq 0, q_3 \geq 0$ のもとで重み q_3 がとりうる範囲は

$$0 \leq q_3 \leq q_{3a} \quad (39)$$

である。以下、(39)式のもとで c_2 がとりうる範囲を求めることにより、(26)式の必要性を示す。

(38)式を(37)式に代入して q_1 を消去すると c_2 は q_3 の2次関数となり、

$$c_2 = h_2 q_3^2 + h_1 q_3 + h_0 \quad (40)$$

と表わされる。ここに、 h_0, h_1, h_2 はつぎのように定義される係数である。

$$h_0 = \frac{1}{a_1} (a_1^2 + 1 + a_2^2 \rho) c_1,$$

$$h_1 = \frac{\rho}{a_1} c_1 + \frac{a_2^2}{|\alpha|^2} (1 - \rho^2),$$

$$h_2 = -\frac{\rho^2}{|\alpha|^2} \quad (41)$$

(41)式の h_2 は負であるから、もし q_3 の範囲に制約がなければ(40)式の右辺は $q_3 = -h_1/2h_2$ において最大となる。(30)式で定義した q_{3b} は、 $-h_1/2h_2$ に(41)式を代入したものである。(29)、(30)式より、

$$q_{3b} \geq \frac{q_{3a}}{2} \quad (42)$$

が成り立つことがわかる。したがって、(39)式の制約のもとで c_2 が最小となるのは $q_3 = 0$ のときであり、最大となるのは $q_3 = \min(q_{3a}, q_{3b})$ のときである。

$q_3 = 0, q_3 = q_{3a}, q_3 = q_{3b}$ を(40)式に代入してそれぞれの場合の c_2 の値を計算すれば(27)、(28)式が得られる。ただし、(28)式の場合分けは $q_3 = q_{3b}$ が(39)式を満たすかどうかに対応するものである。以上により、(26)式の必要性が示された。

逆に、 λ_1, λ_2 が安定で、かつ c_1, c_2 が(25)、(26)

式を満たすと仮定する。このとき、以上の議論により、(31)式のもとで(32)、(33)式を満たす重み q_1, q_3 が存在する。したがって、補題3により λ_1, λ_2 は重み q_1, q_3 に対する最適閉ループ極であり、十分性が示された。□

以上では一対の共役複素極を移動する場合について重み Q_1 を対角行列に限定し、しかも $\rho \neq 0$ と仮定して結果を導いた。ここで、 ρ がとりうる両極端の値として、 $\rho=0$ の場合および $\rho=1$ の場合に対する結果を述べる。特に、 $\rho=1$ の場合については Q_1 の形を対角行列に限定しない結果を導く。まず、 $\rho=0$ の場合を考える。

【系1】 $\rho=0$ と仮定する。このとき、(26)式を $d_1 \leq c_2$ と置き換えれば定理2と同様の必要十分条件が成立する。

(証明) $\rho=0$ の場合においても補題3および定理2の条件 i) はそのまま成立するから、影響を受けるのは c_2 の範囲のみである。さて、(36)式で $\rho=0$ とおけばわかるように、 c_1 を固定すれば対応する q_1 が一意に定まり、このとき q_3 の上限は存在しない。したがって、定理2の(26)式を $d_1 \leq c_2$ と置き換えればそれ以外は $\rho \neq 0$ の場合とまったく同様の必要十分条件が成立する。□

【注意1】 制御対象が1入力系すなわち(1)式で $r=1$ の場合は必ず $\rho=0$ である。

つぎに、 $\rho=1$ の場合を考えよう。定理2では重み行列 Q_1 を対角行列と限定したので $q_2=0$ であり、(32)式の右边が簡単になった。 $\rho=1$ の場合は $q_2 \neq 0$ であっても(32)式の右边は同様に簡単になる。このことに着目すると、 Q_1 の形を限定しない結果が得られる。 ρ の値は重み行列 R に依存するものであり、 R があらかじめ指定されていれば一般に $\rho=1$ とは限らない。ただし、 R を任意に選んでよい場合には、特定の共役複素極に対して $\rho=1$ となるように R を定めることは可能である。

【命題1】 定理2において、 $\rho=1$ であると仮定し、 d_1, d_2 をそれぞれ(27)、(28)式で $\rho=1$ とおいたものと定義する。このとき、重み行列 Q_1 を対角行列に限定せず、一般の半正定値行列であるとしても、同様の結果が成立する。

(証明) 補題3は一般の半正定値行列 Q_1 に対して成立する結果である。さて、(32)、(33)式で $\rho=1$ とおいたものを(23)、(24)式に代入すると、 c_1, c_2 はつぎのようになる。

$$c_1 = \frac{a_1}{|\alpha|^2} (q_1 + q_3) \quad (43)$$

$$c_2 = \left(1 + \frac{1}{|\alpha|^2}\right) (q_1 + q_3) + \frac{1}{|\alpha|^2} (q_1 q_3 - q_2^2) \quad (44)$$

(43)式には q_2 が含まれないから、 c_1 に関しては定理2の結果がそのまま成り立つ。(43)、(44)式より $q_1 + q_3$ の項を消去すると

$$c_2 = \frac{|\alpha|^2 + 1}{a_1} c_1 + \frac{1}{|\alpha|^2} (q_1 q_3 - q_2^2) \quad (45)$$

となる。(45)式より、 $Q_1 \geq 0$ に対して c_2 がとりうる範囲がつぎのように求められる。すなわち、 c_2 が最小となるのは

$$q_1 q_3 = q_2^2 \quad (46)$$

のときであり、このとき

$$c_2 = \frac{|\alpha|^2 + 1}{a_1} c_1 \quad (47)$$

である。(43)式より $q_1 + q_3$ が一定値になるので、 c_2 が最大となるのは

$$q_1 = q_3 = \frac{c_1 |\alpha|^2}{2a_1}, \quad q_2 = 0 \quad (48)$$

の場合で、このとき

$$c_2 = \frac{|\alpha|^2 + 1}{a_1} c_1 + \frac{|\alpha|^2}{4a_1^2} c_1^2 \quad (49)$$

である。(47)、(49)式の右边はそれぞれ(27)、(28)式で $\rho=1$ とおいたものにはかならない。□

(注意2) (46)式はたとえば $q_1 = q_2 = 0$ とおけば成立するから、 $\rho=1$ の場合は $q_2=0$ と限定しても設定可能な閉ループ極の範囲を狭めることにはならない。

5. 手 順

定理2を用いることにより、着目した $n=2$ の部分に対して特定の閉ループ極が最適となりうるかどうかを判定すること、および、最適となりうる閉ループ極を指定したときに、対応する重み q_1, q_3 を求めることができる。さらに、あらかじめ設定可能な最適閉ループ極の範囲を求めておくことも可能である。

定理2において、着目した部分の開ループ極として a_1, a_2 が与えられ、重み R を与えることによって ρ が定められているとする。このとき、閉ループ極を具体的に指定すれば(23)、(24)式により c_1, c_2 が定まる。これより、(27)、(28)式の d_1, d_2 が求められる。したがって、条件 i), ii) が満たされているかどうかを調べれば指定した閉ループ極が最適となりうるかどうか判定できる。

最適閉ループ極を選んだ場合、対応する重み q_1, q_3 はつぎのようにして求められる。

【手順1】

Step 1: (23)、(24)式により c_1, c_2 を計算する。

Step 2: (41)式の h_0, h_1, h_2 を計算する.

Step 3: (40)式を q_3 について解く.

Step 4: 求めた q_3 を (38)式に代入して q_1 を定める.

(40)式は 2 次方程式であるから, q_1, q_3 としては一般に 2 通りが考えられるが, $q_1 \geq 0, q_3 \geq 0$ を満たすものが求まる重みである.

閉ループ極を特定するかわりに, あらかじめ定理 2 の条件 i), ii) を同時に満たす範囲を調べておけば, 最適閉ループの存在範囲を求めることも可能である. この場合, 定理 2 は c_1, c_2 の範囲を与えるものであるから, これを最適閉ループ極の存在範囲に対応づける必要がある. c_1, c_2 が定められたときに, 対応する最適閉ループ極 λ_1, λ_2 は以下のようにして求められる.

$$\begin{aligned} q_1 &= \text{Bir}(\lambda_1) + \text{Bir}(\lambda_2), \\ q_2 &= \text{Bir}(\lambda_1) \cdot \text{Bir}(\lambda_2) \end{aligned} \quad (50)$$

とおくと, $\text{Bir}(\lambda_1), \text{Bir}(\lambda_2)$ は w に関する 2 次方程式 $w^2 - q_1 w + q_2 = 0$

を満たす. したがって, c_1, c_2 が定まれば (23), (24) 式より q_1, q_2 が定まり, (51)式を解けば $\text{Bir}(\lambda_1), \text{Bir}(\lambda_2)$ が求められる. ここで,

$$w_1 = \text{Bir}(\lambda_1), w_2 = \text{Bir}(\lambda_2) \quad (52)$$

とおくと (9)式の定義より,

$$\lambda_1^2 - w_1 \lambda_1 + 1 = 0, \lambda_2^2 - w_2 \lambda_2 + 1 = 0 \quad (53)$$

であるから, (53)式を解いて安定なものをとれば, 最適閉ループ極 λ_1, λ_2 が求められる.

重みを変化させたときの最適閉ループ極の存在範囲はつぎの手順により求めることができる.

[手順 2]

Step 1: 条件 i) を満たすパラメータ c_1 を一つ固定する.

Step 2: (27), (28)式により d_1, d_2 を計算し, c_2 のとりうる範囲を求める.

Step 3: (23), (24)式により q_1, q_2 の範囲を求める.

Step 4: (51)式を解いて w_1, w_2 の範囲を求める.

Step 5: (53)式を解いて λ_1, λ_2 の範囲を求める.

Step 6: パラメータ c_1 を変化させて Step 2~Step 5 を繰り返す.

6. 数 値 例

着目した開ループ極が共役複素極 $0.6 \pm j0.4$ であり, この部分のパラメータがつぎのように与えられているとする.

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

閉ループ極を

$$\lambda_1 = 0.2 + j0.15, \lambda_2 = 0.2 - j0.15 \quad (55)$$

と指定すると (23), (24)式より

$$c_1 = 3.29231, c_2 = 13.4102 \quad (56)$$

となり, c_1 は a_1 と同符号である. このとき, $q_{3a} < q_{3b}$ であり, (27), (28)式より

$$d_1 = 7.55036, d_2 = 16.242 \quad (57)$$

であるから, c_2 は (26)式を満たしている. したがって, 定理 2 より, (55)式の閉ループ極は最適閉ループ極となりうることがわかる. そこで, 対応する重みを求めよう. (41)式の係数は

$$\begin{aligned} h_0 &= 7.55036, h_1 = 0.853333, \\ h_2 &= -0.0192308 \end{aligned} \quad (58)$$

である. (40)式を解いて得られる q_3 を (38)式に代入して q_1 を求めると, (31)式を満たすものとしては結局

$$q_1 = 2.00411, q_3 = 8.49226 \quad (59)$$

が得られる.

(54)式の系に対して設定可能な最適閉ループ極の範囲は手順 2 により求めることができる. 手順 2 の実行結果を図示したものが **Fig. 1** である. 図の太い実線で囲まれた領域が定理 2 から導かれる最適閉ループ極の存在範囲であるが, (55)式の閉ループ極 $0.2 \pm j0.15$ は確かにこの領域内にあることが確認できる. また, 破線は Solheim¹⁾, Amin²⁾の結果に対応するものである. これは $q_2 = 0$ でさらに $q_1 = q_3$ とおいたものであり, 設定可能な閉ループ極の範囲が曲線上の点に限定されている.

Fig. 1 The region of optimal poles—inside the solid lines. Poles assignable by the methods of Solheim¹⁾ and Amin²⁾—dashed lines

7. あとがき

特定のモードに着目して離散時間最適レギュレータを構成する場合に閉ループ系の極として指定することが可能な範囲を求めた。まず、一つの実数極に着目する場合について、設定可能な閉ループ極の範囲および対応する重みを明らかにした。つぎに、一対の共役複素極を移動する場合において同様の検討を行った。特に、重み行列を対角行列に限定したときについては、設定可能な閉ループ極の範囲を明らかにするとともに、閉ループ極の位置を指定したときに対応する重み行列を求める方法を示した。重み行列の形を限定したため、設定可能な閉ループ極の範囲をすべて求めたわけではないが、従来の結果^{1),2)}に比べればはるかに広い領域を対象として設計を行うことが可能である。

参 考 文 献

- 1) O. A. Solheim: Design of Optimal Discrete Control Systems with Prescribed Eigenvalues, Int. J. Control, **19-2**, 417/427 (1974)
- 2) M. H. Amin: Optimal Discrete Systems with Prescribed Eigenvalues, Int. J. Control, **40-4**, 783/794 (1984)
- 3) 杉本, 山本, 藤中: 最適レギュレータを用いた逐次的な極配置の可能範囲について, 計測自動制御学会論文集, **25-1** (1989) 掲載予定
- 4) H. Kwakernaak and R. Sivan: Linear Optimal Control Systems, Wiley-Interscience (1972)
- 5) V. Kucera: The Discrete Riccati Equation of Optimal Control, Kybernetika, **8-5**, 430/447 (1972)
- 6) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, p. 41, 計測自動制御学会 (1978)