改良された多項式表現による 6 リンク・マニピュレータの逆問題計算法

佐々木 忍*

 Inverse Kinematics Algorithm for a Six-Link Manipulator
 Using an Improved Polynomial Expression

Shinobu SASAKI*

1. はじめに

先の報告¹⁾で、マニピュレータの逆運動学を厳密かつ網羅的に解くための一つのアプローチとして運動学方程式を一旦代数方程式に変換する方法（以下ではこの代数方程式を変換方程式と呼ぶ）を提案した。しかし、厳密な関節解を導くこの変換方程式が 24 次の多項式を構成するために次数の低減化が課題であった。

本報では、変換方程式の誘導過程で高次の要因となった不要な複素根を因数分解法でほとんど分離・除外した結果、8 次の変換方程式を導き出すことに成功した。以下その計算過程を説明する。

2. 変換方程式の誘導

最初に考察の対象となる 6 リンク・マニピュレータの運動学方程式を以下に再記述する（文献 1）参照）。

$$\begin{aligned}
 n_x &= c_6(c_1c_4 - s_1s_4c_{23}) - s_6(c_1s_4s_5 + s_1s_2s_5 + s_1s_5c_4c_{23}) \\
 n_y &= c_6(s_1c_4 + c_1c_{23}s_4) + s_6(c_1c_5s_{23} + c_1c_4c_{23}s_5 - s_1s_4s_5) \\
 n_z &= s_4s_{23}c_6 + s_6(c_4s_5s_{23} - c_5c_{23}) \\
 o_x &= s_1(s_5s_{23} - c_4c_5c_{23}) - c_1c_5s_4 \\
 o_y &= -s_1s_4c_5 - c_1s_5s_{23} + c_1c_4c_5c_{23} \\
 o_z &= s_5c_{23} + c_4c_5s_{23} \\
 a_x &= n_y o_z - n_z o_y \\
 a_y &= n_z o_x - n_x o_z \\
 a_z &= n_x o_y - n_y o_x \\
 P_x &= a_6 a_x + a_5(c_1s_4s_5 + s_1s_2s_5 + s_1s_5c_4c_{23}) \\
 &\quad + (a_3 + a_4)s_1s_{23} + a_2s_1s_2 \\
 P_y &= a_6 a_y + a_5(-c_1c_5s_{23} - c_1c_4c_{23}s_5 + s_1s_4s_5) \\
 &\quad - (a_3 + a_4)c_1s_{23} - a_2s_2c_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_z &= a_6 a_z + a_5(c_5c_{23} - c_4s_5s_{23}) + (a_3 + a_4)c_{23} \\
 &\quad + a_2c_2 + a_1 \\
 (a_1 \sim a_6: &\text{リンク長さ})
 \end{aligned}$$

ここで、関節角 θ_i について $s_i = \sin \theta_i$, $c_i = \cos \theta_i$, $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$, $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$ と略記する。また、 $n = (n_x, n_y, n_z)^T$, $o = (o_x, o_y, o_z)^T$, $a = (a_x, a_y, a_z)^T$ は指先姿勢の 3 方向ベクトル (T は転置を示す), P_x, P_y, P_z は基準座標系における指先の位置座標と約束する。

文献 1) では運動学の上記関係式を指先に一番近い回転角の正弦・余弦で整理した後、下記のパラメータ

$$\begin{aligned}
 A &\triangleq s_1s_{23}c_5 + s_1s_5c_4c_{23} + c_1s_4s_5 = a_xc_6 - n_xs_6 \quad (1) \\
 B &\triangleq c_1c_4 - s_1s_4c_{23} = n_xc_6 + a_xs_6 \quad (2) \\
 C &\triangleq s_1s_4s_5 - c_1c_5s_{23} - c_1c_4c_{23}s_5 = a_yc_6 - n_ys_6 \quad (3) \\
 D &\triangleq s_1c_4 + c_1c_{23}s_4 = n_yc_6 + a_ys_6 \quad (4) \\
 E &\triangleq c_5c_{23} - c_4s_5s_{23} = a_zc_6 - n_zs_6 \quad (5) \\
 F &\triangleq s_4s_{23} = n_zc_6 + a_zs_6 \quad (6)
 \end{aligned}$$

と、これを使ったつぎの指先位置に関する関係式

$$P_x = a_6 a_x + a_5 A + a_{34}s_1s_{23} + a_2s_1s_2 \quad (7)$$

$$P_y = a_6 a_y + a_5 C - a_{34}c_1s_{23} - a_2c_1s_2 \quad (8)$$

$$P_z = a_6 a_z + a_5 E + a_{34}c_{23} + a_2c_2 + a_1 \quad (9)$$

(ただし、 $a_{34} = a_3 + a_4$ とする)

を結びつけ、関節角 θ_6 のみを含んだ 24 次の代数方程式を導いた。本節では、この変換方程式を大幅に改善した低次元の形で表現する。

まず、(8), (9) 式をつぎのようにならべかえる。

$$a_{34}s_{23} + a_2s_2 = \{a_6 a_y + a_5 C - P_y\} / c_1 = P_1 / c_1 \quad (10)$$

$$a_{34}c_{23} + a_2c_2 = P_z - a_6 a_z - a_5 E - a_1 = P_2 \quad (11)$$

ここに、 P_1, P_2 は θ_6 (すなわち t) のみで表現した関数とし、付録の 1 に記載する。

さて、(10), (11) 式の左辺を s_3, c_3 について解くと、

$$a_{34}s_3 = (P_1/c_1)c_2 - P_2s_2 \quad (12)$$

$$a_{34}c_3 = (P_1/c_1)s_2 + P_2c_2 - a_2 \quad (13)$$

が得られ、同時に $\tan \theta_{23}$ が

$$\tan \theta_{23} = \{(P_1/c_1) - a_2s_2\} / \{P_2 - a_2c_2\} = K/c_1 \quad (14)$$

と決まる (K の表示は付録の 2 に示す)。

続いて、(12)~(14) 式から導いた二つの関係式

* 日本原子力研究所東海研究所 茨城県那珂郡東海村白方白根 2-4

* Tokai Research Establishment, Japan Atomic Energy Research Institute, Naka-Gun, Ibaraki (Received July 30, 1987)
(Revised November 9, 1987)

Key Words: inverse kinematics, polynomial expression, six-link manipulator

$$a_2 s_2 c_1 = P_1 - K(P_2 - a_2 c_2) \quad (15)$$

$$P_1^2 + P_2^2 c_1^2 - 2a_2 c_2 P_2 c_1^2 - 2a_2 P_1 s_2 c_1 = -\hat{a} c_1^2 \quad (16)$$

(ただし, $\hat{a} = a_2^2 - a_3^2$ とする)

により s_2 , c_2 を求め, 再び(10), (11)式へ代入すると,

$$a_{34} s_{23} = \frac{P_1}{c_1} - a_2 s_2 = \frac{Y \Phi_x (J + Z^2 - L)}{2c_1 (J \Phi_x + SZ) T} \quad (17)$$

$$a_{34} c_{23} = S(J + Z^2 - L) / \{2(J \Phi_x + SZ) T\} \quad (18)$$

なる表現ができる. この記号表現には付録1, 2の式とつぎの関数を適用した (ただし, $L = \hat{a} T^2$, $T = 1 + t^2$).

$$\begin{aligned} \Phi_x &\triangleq n_x + 2a_x t - n_x t^2, \quad \Phi_y \triangleq n_y + 2a_y t - n_y t^2 \\ \Phi_z &\triangleq n_z + 2a_z t - n_z t^2 \end{aligned} \quad (19)$$

(17), (18)式をそれぞれ2乗して加えた式を整理すると,

$$\frac{(J + Z^2 - L)^2 (S^2 + J \Phi_x^2)}{4(J \Phi_x + SZ)^2 T^2} = a_{34}^2 \quad (20)$$

を得る. この変換方程式は分母分子とも t に関する16次の多項式で, 前回報告したケースに比べて次数は低くなっている. しかし, 取り扱いをさらに簡便にするため以下で上式の各項について詳しく調べてみる.

(1) $J + Z^2 - L$ の簡略化

まず, 付録の(A. 3), (A. 4), (A. 8)と $\tan(\theta_6/2) = t$ の関係から X, Y, Z については, つぎのような因数が発見できる.

$$\begin{aligned} X &= X_n + 2a_5 n_x t + X_p t^2 \\ &= (1+t^2) \{XX - a_5 a_x (1-t^2)/(1+t^2) \\ &\quad + 2a_5 n_x t/(1+t^2)\} \\ &= (1+t^2) \{XX - a_5 a_x c_6 + a_5 n_x s_6\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} Y &= Y_n - 2a_5 n_y t + Y_p t^2 \\ &= (1+t^2) \{YY + a_5 a_y c_6 - a_5 n_y s_6\} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} Z &= Z_n + 2a_5 n_z t + Z_p t^2 = (1+t^2) \{ZZ + a_5 n_z s_6 \\ &\quad - a_5 a_z c_6\} \end{aligned} \quad (23)$$

この3式を利用すると, $J + Z^2 - L$ は

$$\begin{aligned} J + Z^2 - L &= X^2 + Y^2 + Z^2 - \hat{a}(1+t^2)^2 \\ &= (1+t^2)^2 F_1(t) - \hat{a}(1+t^2)^2 = (1+t^2)^2 F_2(t) \end{aligned} \quad (24)$$

$$= (1+t^2)(r_0 + r_1 t + r_2 t^2) \triangleq (1+t^2) R \quad (25)$$

なる簡潔な表現式となる (付録の3参照).

(2) $J \Phi_x + SZ$ と $S^2 + J \Phi_x^2$ の簡略化

この2式をまず, X, Y と(19)式を使って書き換える.

$$\begin{aligned} J \Phi_x + SZ &= (X^2 + Y^2) \Phi_x + (Y \Phi_y - X \Phi_x) Z \\ &= X(X \Phi_x - Z \Phi_x) + Y(Y \Phi_x + Z \Phi_y) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} S^2 + J \Phi_x^2 &= (Y \Phi_y - X \Phi_x)^2 + (X^2 + Y^2) \Phi_x^2 \\ &= (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) X^2 + (\Phi_y^2 + \Phi_z^2) Y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2\Phi_x \Phi_y X Y &= (1+t^2)^2 (X^2 + Y^2) \\ &- (X \Phi_y + Y \Phi_x)^2 \end{aligned} \quad (27)$$

(27)式の導出には, (19)式のつぎの性質が役立つ.

$$\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2 = (1+t^2)^2 \quad (28)$$

さて, (26), (27)式中の双1次式は高々4次式なので展開して各項を調べてみる.

(a) $X \Phi_x - Z \Phi_x$ の因数分解

付録の4に示した t に関する各項の係数を比較すると $u_1 = u_3$, $u_2 = u_0 + u_4$ の性質から4次式 $X \Phi_x - Z \Phi_x$ が $(1+t^2)$ を因数として含む. その表示は次式となる.

$$X \Phi_x - Z \Phi_x = (1+t^2)(u_0 + u_1 t + u_4 t^2) \triangleq (1+t^2) U \quad (29)$$

(b) $J \Phi_x + SZ$ の因数分解

$J \Phi_x + SZ$ についても, (a)と同様に $Y \Phi_x + Z \Phi_y$ が $Y \Phi_x + Z \Phi_y = (1+t^2)(v_0 + v_1 t + v_2 t^2) \triangleq (1+t^2) V$

$$(30)$$

と書けることから次式でまとめられる.

$$J \Phi_x + SZ = (1+t^2) \{XU + YV\} \triangleq (1+t^2) W \quad (31)$$

ただし, V, W の内容は付録の5, 6参照.

(c) $S^2 + J \Phi_x^2$ の因数分解

つぎの $X \Phi_y + Y \Phi_x$ に対する表現 (付録の6参照)

$$X \Phi_y + Y \Phi_x = (1+t^2)(m_0 + m_1 t + m_2 t^2) \triangleq (1+t^2) M \quad (32)$$

と(A. 9)を使って, (27)式は

$$\begin{aligned} S^2 + J \Phi_x^2 &= (1+t^2)^2 \left\{ \sum_{i=0}^4 f_i t^i - \left(\sum_{i=0}^2 m_i t^i \right)^2 \right\} \\ &= (1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 (f_i - n_i) t^i \\ &= (1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 g_i t^i \end{aligned} \quad (33)$$

となる. ただし, $\left(\sum_{i=0}^2 m_i t^i \right)^2 = \sum_{i=0}^4 n_i t^i$, $\sum_{i=0}^4 (f_i - n_i) t^i$

$$= \sum_{i=0}^4 g_i t^i$$

(25), (31), (33)式の因数分離手続きを通して(20)式は

$$R^2 \sum_{i=0}^4 g_i t^i = 4a_{34}^2 \left(\sum_{i=0}^4 w_i t^i \right)^2 \quad (34)$$

と簡略化でき, 求める最終式はつぎの形となる.

$$A(t) = \sum_{i=0}^8 \rho_i t^i = 0 \quad (35)$$

以上で, θ_6 を決定するための変換方程式が簡単な8次式 $A(t)$ で実現できた (係数 n_i, f_i, g_i, ρ_i の内容は割愛する). θ_6 から残りの関節角を導出する手続きは同じなので省略する.

3. 結果と要約

文献1)では, 関節解の多値性が扱える変換方程式を

24次の多項式として誘導したが、本研究では既報のモデルの1/3の次数で実現させた。関節解の計算結果は、有効桁数内で解の値、個数ともに24次の多項式から引出された結果と対比して完全に一致しているうに、前回の計算時間の半分以下であることを確認した。もともと、当初の高次方程式は計算処理技術を駆使して精度よく解いてあるために解の信頼性はきわめて高いが、同一の結果を効率よく導くうえで最初から解と無関係な不要根が回避できる低次のモデルは、計算時間や丸め誤差の蓄積排除の点から有効なものといえる。

参考文献

- 1) 佐々木：多項式表現を用いた6リンク・マニピュレータの逆問題計算法，計測自動制御学会論文集，23-5，485/490 (1987)

《付 録》

運動学方程式から変換方程式を導き出す過程で適用したパラメータや式を t の関数として記述する。

1. P_1 と P_2 の表示

(10), (11) 式の P_1, P_2 を $\tan(\theta_6/2)=t$ を用いて，

$$P_1 = (Y_n - 2a_5n_yt + Y_pt^2)/(1+t^2) = Y/(1+t^2) \quad (\text{A.1})$$

$$P_2 = (Z_n + 2a_5a_zt + Z_pt^2)/(1+t^2) = Z/(1+t^2) \quad (\text{A.2})$$

と整理する。ここで，

$$Y_n = a_5a_y - YY, \quad Y_p = -(a_5a_y + YY), \quad YY = P_y - a_6a_y \quad (\text{A.3})$$

$$Z_n = -a_5a_z + ZZ, \quad Z_p = a_5a_z + ZZ, \quad ZZ = P_z - a_1 - a_6a_z \quad (\text{A.4})$$

2. K の表示

(2), (4) 式を s_4s_{23} について解き，(6) 式の s_4s_{23} と関連づけると $\tan\theta_{23}$ が次式で定まる。

$$\tan\theta_{23} = \frac{Y\{n_z(1-t^2) + 2a_zt\}}{c_1[(n_y + 2a_yt - n_yt^2)Y - (n_x + 2a_xt - n_xt^2)X]} \\ = \frac{K}{c_1}$$

ここに， K は(19)式を使って(A.5)で表現する。

$$K = Y\Phi_z/S, \quad S = Y\Phi_y - X\Phi_x \quad (\text{A.5})$$

また， X, Y, θ_1 間には(7), (8) 式から導いた関数関係

$$\tan\theta_1 = (X_n + 2a_5n_xt + X_pt^2)/(Y_n - 2a_5n_yt + Y_pt^2) \\ = X/Y \quad (\text{A.6})$$

が存在し，これを利用して c_1^2 が次式で表現できる。

$$c_1^2 = Y^2/(X^2 + Y^2) \triangleq Y^2/J \triangleq Y^2/\sum_{i=0}^4 f_i t^i \quad (\text{A.7})$$

ただし，

$$X_n = -a_5a_x + XX, \quad X_p = a_5a_x + XX, \quad XX = P_x - a_6a_x \quad (\text{A.8})$$

$$J \triangleq X^2 + Y^2 \triangleq \sum_{i=0}^4 f_i t^i \quad (\text{A.9})$$

3. $F_1(t), F_2(t)$ の記述

$$F_1(t) = (XX - a_5A)^2 + (YY + a_5C)^2 + (ZZ - a_5E)^2$$

$$F_2(t) = F_1(t) - \hat{a} = (r_0 + r_1t + r_2t^2)/(1+t^2) \\ \triangleq R/(1+t^2)$$

ここに，

$$r_0 = (R_1 - a_5)^2 + R_2^2 + R_3^2 - \hat{a}, \quad r_1 = 4a_5R_2,$$

$$r_2 = (R_1 + a_5)^2 + R_2^2 + R_3^2 - \hat{a}$$

$$R_1 = a_xXX + a_y(-YY) + a_zZZ,$$

$$R_2 = n_xXX + n_y(-YY) + n_zZZ,$$

$$R_3 = o_xXX + o_y(-YY) + o_zZZ$$

4. $X\Phi_z - Z\Phi_x = \sum_{i=0}^4 u_i t^i$ の記述

$$u_0 = X_n n_z - Z_n n_x, \quad u_1 = 2(X_n a_z - Z_n a_x),$$

$$u_2 = 4a_5(n_x a_z - a_x n_z) + (Z_n n_x - X_n n_z)$$

$$+ (X_p n_z - Z_p n_x),$$

$$u_3 = 2(X_p a_z - Z_p a_x),$$

$$u_4 = Z_p n_x - X_p n_z$$

5. $V = v_0 + v_1 t + v_2 t^2$ の記述

$$v_0 = Y_n n_z + Z_n n_y, \quad v_1 = 2(Y_n a_z + Z_n a_y),$$

$$v_2 = -Z_p n_y - Y_p n_z$$

6. $W = \sum_{i=0}^4 w_i t^i$ と $M = m_0 + m_1 t + m_2 t^2$ の記述

$$w_0 = X_n u_0 + Y_n v_0, \quad w_1 = X_n u_1 + Y_n v_1$$

$$+ 2a_5(u_0 n_x - v_0 n_y),$$

$$w_2 = X_n u_4 + Y_n v_2 + X_p u_0 + Y_p v_0$$

$$+ 2a_5(u_1 n_x - v_1 n_y),$$

$$w_3 = X_p u_1 + Y_p v_1 + 2a_5(u_4 n_x - v_2 n_y),$$

$$w_4 = X_p u_4 + Y_p v_2;$$

$$m_0 = X_n n_y + Y_n n_x, \quad m_1 = 2(X_n a_y + Y_n a_x),$$

$$m_2 = -X_p n_y - Y_p n_x$$