$\partial \mathbf{k}_x(t)/\partial \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ の考慮による ARMA 過程の パラメータ推定

田 淵 敏 明*・添 田 喬**・河 田 照 茂***・添 田 満****

Parameter Estimation of ARMA Process by Taking into Consideration of $\partial \mathbf{k}_x(t)/\partial \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t)$

Toshiaki TABUCHI*, Takashi SOEDA**, Terushige KAWATA*** and Mitsuru SOEDA****

This paper deals with the improvement of convergence rate or estimation accuracy of the estimates in ARMA parameter estimation. A recursive parameter estimator is developed by using the method of white-noise estimation for linear discrete-time systems. The main feature of the proposed method is to take into consideration of $\partial \mathbf{k}_x(t)/\partial \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ which influences considerably to the performance of RPE (Recursive Prediction Error) or EKF (Extended Kalman Filter) estimator. It is shown that significance considering this term has the effect closing the estimation error covariances with Rao-Cramer's lower bound. Resultant algorithm proposed is constructed by linking RPE estimator with Kalman filter.

Numerical experiment indicates that the convergence rate or the estimation accuracy of parameter estimates is considerably improved compared with the standard RPE method.

Key Words: ARMA process, parameter estimation, Kalman filter, Rao-Cramer's lower bound, white-noise estimation

1. ま え が き

状態空間で表現された時系列モデルのパラメータ推

定手法の代表的なものとして、逐次予測差法 (RPE 法)¹⁾がある。これは、 $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$ を出力 $\mathbf{y}$ の 1 段予測誤差、 $\boldsymbol{\alpha}$ を未知パラメータベクトルとすると、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ の 2 乗平均 $E\{\boldsymbol{\varepsilon}^2(t)\}$ が最小になるように $\boldsymbol{\alpha}$ を推定するものである。したがって、まず $\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t)/\partial \boldsymbol{\alpha}$ の評価が必要になり、このとき

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} (\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) : \text{カルマンフィルタによる状態量の1段予測値}) \quad (1)$$

の評価に関連して

$$\frac{\partial \mathbf{k}_x(t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} \boldsymbol{\varepsilon}(t) (\mathbf{k}_x(t) : \text{カルマンゲイン}) \quad (2)$$

の評価が必要になってくる。そして、この項は、推定値の収束速度を大幅に加速させる効果をもつ²⁾。しかし、(2)は $\mathbf{k}_x(t)$ が $\boldsymbol{\alpha}$ と Riccati の式を通じて陰に関係しているため、直接 $\mathbf{k}_x(t)$ を $\boldsymbol{\alpha}$ で微分して評価することは非常に困難である。そのため、普通 $t \rightarrow \infty$ での $\mathbf{k}_x(t)$ の収束値 $\bar{\mathbf{k}}_x$ に基づく $\partial \bar{\mathbf{k}}_x / \partial \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ が用いられる²⁾。

本論文は、状態空間で表現された ARMA 過程のパラメータ推定において、推定精度の向上、あるいは収束速度の加速をめざす立場から、(2)を直接計算することなく、しかもこれを考慮した推定器の構成を行うものである。これは、(1)が

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} = E \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} \middle| \mathbf{y}^{t-1} \right\},$$

$$(\mathbf{y}^{t-1} \triangleq \{\mathbf{y}(t-1), \dots, \mathbf{y}(0)\}) \quad (3)$$

と書けることから、この右辺の方を評価することにより行われる。本手法は、近似的ではあるが、 $\boldsymbol{\alpha}$ の最小分散推定をめざすために、EKF 法 (拡張カルマンフィルタ法)²⁾と同様に、元の系を $\boldsymbol{\alpha}$ に関して線形化し、この系に white-noise estimation の手法^{3), 4)}を用いて推定器を構成する。その結果、本推定器は、RPE 推

* 徳島文理大学短期大学部 香川県大川郡志度町堂林 1314-1

** 徳島文理大学 徳島市山城町西浜傍示 180

*** 徳島大学歯学部 徳島市蔵本町 3-18-15

**** 舞鶴工業高等専門学校 舞鶴市白屋 234

* School of Junior College, Tokushima Bunri University, Ookawa-gun, Kagawa

** Tokushima Bunri University, Tokushima

*** Department of Dentistry, University of Tokushima, Tokushima

**** Maizuru Technical College, Maizuru

(Received August 14, 1987)

(Revised December 8, 1987)

定器とカルマンフィルタを連動させる形になる。そして、推定器に(2)を考慮することの意義は、各時刻における推定値の誤差共分散を Rao-Cramer の下界に近づける効果をもつことが示される。

数値実験例では、(2)を考慮するとき、推定値の精度、収束速度が大幅に改善されることが確認される。

2. 問題の記述および本手法の概略

ARMA 過程

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})e(t) \quad (4)$$

$$A(q^{-1}) = 1 - \sum_{i=1}^n a_i q^{-i}, \quad B(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^n b_i q^{-i} \quad (5)$$

の一つの状態空間表現

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{B}\mathbf{x}(t-1) + \mathbf{c}d^T\mathbf{y}(t-1) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + e(t) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

にもとづいて、パラメータベクトル $\alpha = [a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_n]^T$ を推定することを考える。(4), (5)において、 $y(t)$ は出力、 $e(t)$ は平均が 0、分散が σ^2 の正規性白色雑音であり、 q^{-1} は単位時間遅延演算子である。また、 $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ は、それぞれ定常条件、可逆条件⁵⁾を満足するものとする。また、(6)において

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= [\mathbf{y}(t) - e(t) \cdots \mathbf{y}(t-n+1) \\ &\quad - e(t-n+1)]^T \\ \mathbf{y}(t-1) &= [\mathbf{y}(t-1) \cdots \mathbf{y}(t-n)]^T, \\ \mathbf{c}^T &= [1 \quad 0 \cdots 0] \\ \mathbf{d} &= \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = [a_1 \cdots a_n]^T, \quad \mathbf{b} = [b_1 \cdots b_n]^T \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{n-1} & -b_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

であり、 T は、行列もしくはベクトルの転置を表わす。

いま、 $\hat{\alpha}(t-1)$ を時刻 $t-1$ における α の既知の推定値として、 $\mathbf{x}(t)$ を $\hat{\alpha}(t-1)$ の回りで線形化すれば、(6)の一つの近似表現として、つぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &\cong \mathbf{x}(t) | \hat{\alpha}(t-1) + \mathbf{W}(t) \tilde{\alpha}(t-1) \\ &= \hat{\mathbf{B}}(t-1) \mathbf{x}(t-1) \\ &\quad + \mathbf{c}d^T(t-1) \mathbf{y}(t-1) + \mathbf{W}(t) \tilde{\alpha}(t-1) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + e(t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで

$$\tilde{\alpha}(t-1) \triangleq \alpha - \hat{\alpha}(t-1) \quad (9)$$

$$\mathbf{W}(t) \triangleq \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \alpha^T} \bigg|_{\hat{\alpha}(t-1)} \quad (10)$$

であり、 $\partial \mathbf{x}(t) / \partial \alpha^T$ は、(6) を α で直接微分することにより

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \alpha^T} = \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{x}(t-1)}{\partial \alpha^T} + \mathbf{c} \phi^T(t-1), \quad \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \alpha^T} = \mathbf{0} \quad (11)$$

$$= \sum_{i=1}^t \mathbf{B}^{t-i} \mathbf{c} \phi^T(i-1) \quad (12)$$

$$\phi^T(t-1) = [\mathbf{y}^T(t-1) : \mathbf{y}^T(t-1) - \mathbf{x}^T(t-1)] \quad (13)$$

となる。また、 $\hat{\mathbf{B}}(t-1) = \mathbf{B} | \hat{\alpha}(t-1)$, $\hat{\mathbf{d}}(t-1) = \mathbf{d} | \hat{\alpha}(t-1)$ である。

さて、本手法は、(9)より

$$\alpha = \hat{\alpha}(t-1) + \tilde{\alpha}(t-1) \quad (14)$$

をもとに、 α の最小分散推定値 $\hat{\alpha}(t)$ を

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(t) &= E\{\alpha | y^t\} \\ &= \hat{\alpha}(t-1) + \hat{\alpha}(t-1 | t) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\hat{\alpha}(t-1 | t) = E\{\tilde{\alpha}(t-1) | y^t\} \quad (16)$$

により求めるものである。ここで、 E は期待値操作を表わし、 $y^t = \{y(t), \dots, y(0)\}$ である。また、 σ^2 の推定値 $\hat{\sigma}^2(t)$ を

$$\hat{\sigma}^2(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t E\{e^2(i) | y^i\} \quad (17)$$

より求める。したがって、 α の推定は、(16)を評価すればよく、これを(8)を利用して行う。すなわち、 $\tilde{\alpha}(t-1)$ を(8)の系への白色性入力雑音と仮定し、white-noise estimation の手法^{3), 4)}を用いて評価する。このとき、 $\tilde{\alpha}(t-1)$ の係数行列としての $\mathbf{W}(t)$ は既知でなければならない。しかし、 $\mathbf{W}(t)$ は、(10)の定義をもとに、(11)あるいは(12)の $\mathbf{B}$ を $\hat{\alpha}(t-1)$ で代用するとしても、 ϕ^T 中の $\mathbf{x}^T$ のために計算できない。したがって、 $\mathbf{x}^T$ もなんらかの推定値で代用することが必要になり、結局(11)あるいは(12)における α , $\mathbf{x}$ をこれらの推定値で代用した $\hat{\mathbf{W}}(t)$ を用いざるをえない。このとき、次章で示されるように、 $\hat{\mathbf{W}}(t)$ の選定が α の推定精度と密接に関係し、 α の推定精度あるいは収束速度を向上させるためには、(2)を考慮することが必要になってくるが、 $\hat{\mathbf{W}}(t)$ の評価は 4 章で行うので、次章では、 $\mathbf{W}(t)$ は既知とする。

3. パラメータ推定

(8)の近似表現をもとに(16)を評価するため、 $\tilde{\alpha}(t-1)$ はその統計的性質が次式で表わされる白色雑音と仮定する。

$$E\{\tilde{\alpha}(t-1)\} = \mathbf{0}, \quad E\{\tilde{\alpha}(t-1) \tilde{\alpha}^T(t-1)\} = \mathbf{P}_\alpha(t-1) \quad (18)$$

このとき、(16)およびその誤差共分散行列は、次式で与えられる(注1)。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(t-1 | t) &= \mathbf{P}_\alpha(t-1) \mathbf{W}^T(t) \mathbf{P}_x^{-1}(t | t-1) \mathbf{k}_x(t) \varepsilon(t) \\ &= \mathbf{P}_\alpha(t-1) - \mathbf{P}_\alpha(t-1) \mathbf{W}^T(t) \mathbf{c} \mathbf{c}^T \mathbf{W}(t) \times \end{aligned} \quad (19)$$

$$E\{[\tilde{\alpha}(t-1) - \hat{\alpha}(t-1 | t)] [\text{same}]^T\}$$

$$= \mathbf{P}_\alpha(t-1) - \mathbf{P}_\alpha(t-1) \mathbf{W}^T(t) \mathbf{c} \mathbf{c}^T \mathbf{W}(t) \times$$

$$\mathbf{P}_a(t-1)/r^2(t) \quad (20)$$

ここで、上式における $\mathbf{P}_x, \mathbf{k}_x, r^2$ は、(8)に対するつぎのカルマンフィルタより得られるものである。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t|t) &= \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{k}_x(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) &= \hat{\mathbf{B}}(t-1)\hat{\mathbf{x}}(t-1|t-1) \\ &\quad + \mathbf{c}\hat{\mathbf{d}}^T(t-1)\mathbf{y}(t-1) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \mathbf{y}(t) - \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) \\ \mathbf{k}_x(t) &= \mathbf{P}_x(t|t-1)\mathbf{c}/r^2(t) \\ \mathbf{P}_x(t|t-1) &= \hat{\mathbf{B}}(t-1)\mathbf{P}_x(t-1|t-1) \times \\ &\quad \hat{\mathbf{B}}^T(t-1) \\ &\quad + \mathbf{W}(t)\mathbf{P}_a(t-1)\mathbf{W}^T(t) \\ \mathbf{P}_x(t|t) &= [\mathbf{I} - \mathbf{k}_x(t)\mathbf{c}^T]\mathbf{P}_x(t|t-1) \\ r^2(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{P}_x(t|t-1)\mathbf{c} + \hat{\sigma}^2(t-1) \\ \hat{\sigma}^2(t) &= \left(1 - \frac{1}{t}\right)\hat{\sigma}^2(t-1) + \frac{1}{t}[\mathbf{y}(t) \\ &\quad - \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}(t|t)]^2 + \mathbf{c}^T\mathbf{P}_x(t|t)\mathbf{c} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

このとき、(15)を用いて $\boldsymbol{\alpha}$ を推定した場合の誤差共分散行列 $\mathbf{P}_a(t)$ は、(14)、(15)より

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(t-1) - \hat{\boldsymbol{\alpha}}(t-1|t) \quad (22)$$

となるので、(20)を用いるとき

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_a(t) &= E\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(t)\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^T(t)\} \\ &= E\{[\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(t-1) - \hat{\boldsymbol{\alpha}}(t-1|t)][\text{same}]^T\} \\ &= \mathbf{P}_a(t-1) - \mathbf{P}_a(t-1)\mathbf{W}^T(t)\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{W}(t) \times \\ &\quad \mathbf{P}_a(t-1)/r^2(t) \end{aligned} \quad (23)$$

となる。したがって、(15)、(19)、(23)をもとに、 $\boldsymbol{\alpha}$ に関する推定式をまとめるとつぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(t) &= \hat{\boldsymbol{\alpha}}(t-1) + \mathbf{k}_a(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t) \\ \mathbf{k}_a(t) &\triangleq \mathbf{P}_a(t-1)\mathbf{W}^T(t)\mathbf{P}_x^{-1}(t|t-1)\mathbf{k}_x(t) \\ &= \mathbf{P}_a(t-1)\mathbf{W}^T(t)\mathbf{c}/r^2(t) \\ \mathbf{P}_a(t) &= [\mathbf{I} - \mathbf{k}_a(t)\mathbf{c}^T\mathbf{W}(t)]\mathbf{P}_a(t-1) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ところで、 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ の精度を表わす $\mathbf{P}_a(t)$ は、(23)より $\mathbf{W}(t)$ に関係する。したがって、(10)の評価が重要になるが、2章で述べたように、 $\mathbf{W}(t)$ はこのままで計算できないので、計算可能にするために、 $\mathbf{W}(t)$ を推定値 $\hat{\mathbf{W}}(t)$ で代用する。いま、 $\hat{\mathbf{W}}(t)$ の選定を考えるために(23)に注目する。このとき、 $\mathbf{P}_a^{-1}(t)$ はつぎのように書ける。

(注1) 離散時間線形系

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t-1) + \mathbf{I}\mathbf{w}(t-1), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \\ E\{\mathbf{w}(i)\} &= 0, \quad E\{\mathbf{w}(i)\mathbf{w}^T(j)\} = \mathbf{Q}\delta_{ij}, \quad E\{\mathbf{v}(i)\} = 0, \\ E\{\mathbf{v}(i)\mathbf{v}^T(j)\} &= \mathbf{R}\delta_{ij}, \quad E\{\mathbf{w}(i)\mathbf{v}^T(j)\} = 0, \quad \delta_{ij}: \text{ク} \\ &\text{ロネッカのデルタ} \end{aligned}$$

において、白色雑音 $\mathbf{w}(t-1)$ の最小分散推定値およびその誤差共分散行列は次式で与えられる^{3), 4)}。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}}(t-1|t) &= E\{\mathbf{w}(t-1)|\mathbf{y}^t\} \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{I}^T\mathbf{P}_x^{-1}(t|t-1)\mathbf{k}_x(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (\text{a}) \\ E\{[\mathbf{w}(t-1) - \hat{\mathbf{w}}(t-1|t)][\text{same}]^T\} \\ &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}\mathbf{I}^T\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}_x(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1}\mathbf{C}\mathbf{I}\mathbf{Q} \quad (\text{b}) \end{aligned}$$

本文の(19)、(20)は、それぞれ上式(a)、(b)を用いた。

$$\mathbf{P}_a^{-1}(t) = \sum_{i=1}^t \mathbf{W}^T(i)\mathbf{c}\hat{\sigma}^{2-1}(i-1)\mathbf{c}^T\mathbf{W}(i) \quad (25)$$

これは、(6)の系の過渡応答を無視した場合の $\boldsymbol{\alpha}$ に関する Fisher の情報行列

$$\mathbf{J}_a(t) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^t E\left\{\left(\frac{\partial \mathbf{x}(i)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T}\right)^T \mathbf{c}\mathbf{c}^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}(i)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T}\right)\right\} \quad (26)$$

の一つの近似になっている。ここで、期待値は $\mathbf{x}$ についてとられる。どのような不偏推定量の誤差共分散も Rao-Cramer の下界 $\mathbf{J}_a^{-1}(t)$ より小さくならないことを考えるとき、 $\mathbf{W}(t)$ をその推定値 $\hat{\mathbf{W}}(t)$ で代用する場合の、 $\hat{\mathbf{W}}(t)$ の選定基準として、 $\mathbf{P}_a(t)$ が $\mathbf{J}_a^{-1}(t)$ に最も近づくように選定することが考えられる。これを行うために、まず(26)をつぎのように書く。

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_a(t) &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^t E\left\{E\left\{\left(\frac{\partial \mathbf{x}(i)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T}\right)^T \mathbf{c}\mathbf{c}^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}(i)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T}\right) \middle| \mathbf{y}^{i-1}\right\}\right\} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^t E\left\{\left(\frac{\partial \mathbf{x}(i)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T}\right)^T \mathbf{c}\mathbf{c}^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}(i)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T}\right)\right\} \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^t E\left\{\left(\frac{\partial \mathbf{x}(i)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T}\right)^T \mathbf{c}\mathbf{c}^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}(i)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T}\right)\right\} \end{aligned} \quad (27)$$

ここで

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} = E\left\{\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} \middle| \mathbf{y}^{t-1}\right\} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} = \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} - \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} \quad (29)$$

である。(27)の右辺第2項の期待値の部分は、(28)、(29)より最小になり、その結果右辺第2項全体も最小になる。したがって、(27)の右辺第1項を参考に、もし

$$\mathbf{P}_a^{-1}(t) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^t \left(\frac{\partial \mathbf{x}(i)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T}\right)^T \mathbf{c}\mathbf{c}^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}(i)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T}\right) \quad (30)$$

とすることができれば

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_a(t) - E\{\mathbf{P}_a^{-1}(t)\} \\ = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^t E\left\{\left(\frac{\partial \mathbf{x}(i)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T}\right)^T \mathbf{c}\mathbf{c}^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}(i)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T}\right)\right\} \end{aligned} \quad (31)$$

となり、 $\mathbf{J}_a(t) - E\{\mathbf{P}_a^{-1}(t)\}$ は最小になる。すなわち、平均的には、 $\mathbf{P}_a(t)$ は $\mathbf{J}_a^{-1}(t)$ に最も近づく。したがって、 $\hat{\mathbf{W}}(t)$ の選定として、(28)を参考に

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}}(t) &= \left[\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} \middle| \hat{\mathbf{a}}(t-1) \right] \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} \middle| \hat{\mathbf{a}}_r \right] \\ &= E\left\{\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} \middle| \hat{\mathbf{a}}_r \middle| \mathbf{y}^{t-1}\right\} \end{aligned} \quad (32)$$

を用いる。ここで、 $\hat{\mathbf{a}}_r$ は $\boldsymbol{\alpha}$ の running estimate を表わす。(28)と(32)を比較するとき、 $\hat{\mathbf{W}}(t)$ は $\partial \mathbf{x}(t)/$

$\partial \alpha^T$ の条件付期待値でなく, $\partial \mathbf{x}(t)/\partial \alpha^T$ を $\hat{\alpha}_r$ で評価したものの条件付期待値を用いているので, 実際には (31) が最小になることは期待事項となる.

ところで, (21), (24) の $\mathbf{W}(t)$ の部分に, (28) を用いることができれば, 上述のように (31) が最小になる意味で, 推定値の精度が向上する. このことと, $\partial \mathbf{k}_x(t)/\partial \alpha^T \cdot \varepsilon(t)$ との関連は, つぎのようになる. いま, (28) は E と $\partial/\partial \alpha^T$ を交換するとき, つぎのように書ける.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t)}{\partial \alpha^T} &= E \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \alpha^T} \middle| \mathbf{y}^{t-1} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha^T} E \{ \mathbf{x}(t) | \mathbf{y}^{t-1} \} \\ &= \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)}{\partial \alpha^T} \end{aligned} \quad (33)$$

ここで, 上式右辺の微分は, (6) に対するカルマンフィルタ

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t|t) &= \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{k}_x(t)\varepsilon(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) &= \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}(t-1|t-1) + \mathbf{c}\mathbf{d}^T \mathbf{y}(t-1) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

より, つぎのようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)}{\partial \alpha^T} &= \mathbf{B}[\mathbf{I} - \mathbf{k}_x(t-1)\mathbf{c}^T] \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t-1|t-2)}{\partial \alpha^T} \\ &\quad + \mathbf{c}\hat{\phi}^T(t-1) + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{k}_x(t-1)}{\partial \alpha^T} \varepsilon(t-1) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\hat{\phi}^T(t-1) = [\mathbf{y}^T(t-1) : \mathbf{y}^T(t-1) - \hat{\mathbf{x}}^T(t-1|t-1)] \quad (36)$$

$\partial \mathbf{k}_x(t)/\partial \alpha^T$ は, このときに入ってくる. (30) は, (33) を用いるとき,

$$\mathbf{P}_\alpha^{-1}(t) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^t \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(i|i-1)}{\partial \alpha^T} \right)^T \mathbf{c}\mathbf{c}^T \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(i|i-1)}{\partial \alpha^T} \right) \quad (37)$$

とも書くことができ, $E\{\mathbf{P}_\alpha(t)\}$ は, Rao-Cramer の下界に最も近づく. したがって, RPE 推定器に $\partial \mathbf{k}_x(t)/\partial \alpha^T \cdot \varepsilon(t)$ を考慮することの意義は, ただ $\hat{\alpha}(t) \rightarrow \alpha$ とするだけでなく, 推定途中のそれぞれの t での $\hat{\alpha}(t)$ の誤差共分散を, Rao-Cramer の下界に最も近づけるところにある. もちろん, この場合も, (35) の実際の計算には, α が関係するところは (32) と同様に running estimate $\hat{\alpha}_r$ で代用されるので, このことは期待事項である.

Ljung の EKF²⁾ は, (35) を計算することにより, EKF の発散防止, バイアス除去を行い, 推定精度の向上を図るものであるが, 本手法は, (33) の左辺を (32) で近似計算することにより, 推定精度の向上あるいは収束速度の向上を図ろうとするものである.

次章では, (32) を評価する.

4. $\hat{\mathbf{W}}(t)$ の評価

(12), (13) をもとに, (32) はつぎのようになる.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}}(t) &= \sum_{i=1}^t \Phi(t, i) \mathbf{c} [\mathbf{y}^T(i-1) : \mathbf{y}^T(i-1) \\ &\quad - \hat{\mathbf{x}}^T(i-1|t-1)] \\ &= [\mathbf{S}_1(t) : \mathbf{S}_1(t) - \mathbf{S}_2(t)] \end{aligned} \quad (38)$$

$$\Phi(t, i) \triangleq \hat{\mathbf{B}}(t-1) \cdots \hat{\mathbf{B}}(i), \quad \Phi(t, t) = \mathbf{I} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1(t) &\triangleq \sum_{i=1}^t \Phi(t, i) \mathbf{c} \mathbf{y}^T(i-1) \\ &= \hat{\mathbf{B}}(t-1) \mathbf{S}_1(t-1) + \mathbf{c} \mathbf{y}^T(t-1), \quad \mathbf{S}_1(0) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\mathbf{S}_2(t) = \sum_{i=1}^t \Phi(t, i) \mathbf{c} \hat{\mathbf{x}}^T(i-1|t-1) \quad (41)$$

したがって, $\mathbf{S}_2(t)$ の繰返し関係が得られると, $\hat{\mathbf{W}}(t)$ は計算できる. いま, $\mathbf{S}_2(t)$ の繰返し関係を導くために, (8) に対する固定点平滑器⁶⁾

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(i-1|t-1) &= \hat{\mathbf{x}}(i-1|t-2) \\ &\quad + \mathbf{G}(i-1, t-1) \mathbf{k}_x(t-1) \times \\ &\quad \varepsilon(t-1) \\ \mathbf{G}(i-1, t-1) &= \mathbf{G}(i-1, t-2) \mathbf{G}(t-2, t-1) \\ \mathbf{G}(t-2, t-1) &= \mathbf{P}_x(t-2|t-2) \hat{\mathbf{B}}^T(t-2) \times \\ &\quad \mathbf{P}_x^{-1}(t-1|t-2) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

を用いる. まず, (41) は (42) の第 1 式を用いると, つぎのようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_2(t) &= \mathbf{c} \hat{\mathbf{x}}^T(t-1|t-1) + \hat{\mathbf{B}}(t-1) \sum_{i=1}^{t-1} \Phi(t-1, i) \mathbf{c} \\ &\quad \times \{ \hat{\mathbf{x}}(i-1|t-2) + \mathbf{G}(i-1, t-1) \times \\ &\quad \mathbf{k}_x(t-1) \varepsilon(t-1) \}^T \\ &= \hat{\mathbf{B}}(t-1) \mathbf{S}_2(t-1) + \mathbf{c} \hat{\mathbf{x}}^T(t-1|t-1) \\ &\quad + \hat{\mathbf{B}}(t-1) \mathbf{T}^T(t-1) \varepsilon(t-1), \quad \mathbf{S}_2(0) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\mathbf{T}(t-1) \triangleq \sum_{i=1}^{t-1} \Phi(t-1, i) \mathbf{c} \mathbf{k}_x^T(t-1) \mathbf{G}^T(i-1, t-1) \quad (44)$$

$\mathbf{T}(t-1)$ はこのままでは繰返し関係が得られないので, その (l, m) 要素 $T_{lm}(t-1)$ の繰返し関係を導く. そのために, $\mathbf{u}_l$, $\mathbf{u}_m$ をそれぞれ l 番目, m 番目の要素が 1 の n 次元単位ベクトル, すなわち

$$\mathbf{u}_l = [0 \cdots 0 \underset{l \text{ 番目}}{1} 0 \cdots 0]^T, \quad \mathbf{u}_m = [0 \cdots 0 \underset{m \text{ 番目}}{1} 0 \cdots 0]^T \quad (45)$$

とすると, $T_{lm}(t-1)$ はつぎのように書ける.

$$\begin{aligned} T_{lm}(t-1) &= \mathbf{u}_l^T \mathbf{T}(t-1) \mathbf{u}_m \\ &= \sum_{i=1}^{t-1} \mathbf{u}_l^T \Phi(t-1, i) \mathbf{c} \mathbf{k}_x^T(t-1) \times \\ &\quad \mathbf{G}^T(i-1, t-1) \mathbf{u}_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{t-1} \mathbf{c}^T \boldsymbol{\Phi}^T(t-1, i) \mathbf{u}_i \mathbf{k}_x^T(t-1) \times \\
 &\quad \mathbf{G}^T(i-1, t-1) \mathbf{u}_m \\
 &= \mathbf{T}_r \{ \mathbf{u}_i \mathbf{k}_x^T(t-1) \mathbf{V}_m(t-1) \}, \\
 &\quad (l=1, \dots, n, m=1, \dots, n) \quad (46)
 \end{aligned}$$

ここで, (42)の第2, 第3式を用いるとき

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_m(t-1) &\triangleq \sum_{i=1}^{t-1} \mathbf{G}^T(i-1, t-1) \mathbf{u}_m \mathbf{c}^T \boldsymbol{\Phi}^T(t-1, i) \\
 &= \mathbf{G}^T(t-2, t-1) \mathbf{u}_m \mathbf{c}^T \\
 &\quad + \mathbf{G}^T(t-2, i-1) \sum_{i=1}^{t-2} \mathbf{G}^T(i-1, t-2) \times \\
 &\quad \mathbf{u}_m \mathbf{c}^T \boldsymbol{\Phi}^T(t-2, i) \hat{\mathbf{B}}^T(t-2) \\
 &= \mathbf{G}^T(t-2, t-1) [\mathbf{V}_m(t-2) \hat{\mathbf{B}}^T(t-2) \\
 &\quad + \mathbf{u}_m \mathbf{c}^T] \\
 &= \mathbf{P}_x^{-1}(t-1|t-2) \hat{\mathbf{B}}(t-2) \mathbf{P}_x(t-2|t-2) \times \\
 &\quad [\mathbf{V}_m(t-2) \hat{\mathbf{B}}^T(t-2) + \mathbf{u}_m \mathbf{c}^T], \\
 &\quad \mathbf{V}_m(0) = \mathbf{0}, \quad (m=1, \dots, n) \quad (47)
 \end{aligned}$$

となる. したがって, $\mathbf{S}_2(t)$ の繰返し関係は, (43), (46), (47)で与えられる. また, (40), (43)より

$$\begin{aligned}
 &[\mathbf{S}_1(t) : \mathbf{S}_1(t) - \mathbf{S}_2(t)] \\
 &= \hat{\mathbf{B}}(t-1) [\mathbf{S}_1(t-1) : \mathbf{S}_1(t-1) - \mathbf{S}_2(t-1)] \\
 &\quad + \mathbf{c} \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(t-1) - \hat{\mathbf{B}}(t-1) [\mathbf{0} : \mathbf{T}(t-1)] \boldsymbol{\varepsilon}(t-1) \\
 &\quad (48)
 \end{aligned}$$

と書くこともできるので, $\hat{\mathbf{W}}(t)$ は(38)をもとに, 次式からも計算することができる.

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{W}}(t) &= \hat{\mathbf{B}}(t-1) \hat{\mathbf{W}}(t-1) + \mathbf{c} \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(t-1) \\
 &\quad - \hat{\mathbf{B}}(t-1) [\mathbf{0} : \mathbf{T}(t-1)] \boldsymbol{\varepsilon}(t-1) \\
 &\quad \hat{\mathbf{W}}(0) = \mathbf{0} \quad (49)
 \end{aligned}$$

Table 1 Parameter estimation algorithm taking into consideration of $\partial \mathbf{k}_x(t)/\partial \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t)$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}(t|t) &= \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{k}_x(t) \boldsymbol{\varepsilon}(t) \\
 \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) &= \hat{\mathbf{B}}(t-1) \hat{\mathbf{x}}(t-1|t-1) + \mathbf{c} \hat{\mathbf{d}}^T(t-1) \mathbf{y}(t-1) \\
 \boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \mathbf{y}(t) - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) \\
 \mathbf{k}_x(t) &= \mathbf{P}_x(t|t-1) \mathbf{c} / r^2(t) \\
 \mathbf{P}_x(t|t-1) &= \hat{\mathbf{B}}(t-1) \mathbf{P}_x(t-1|t-1) \hat{\mathbf{B}}^T(t-1) \\
 &\quad + \hat{\mathbf{W}}(t) \mathbf{P}_a(t-1) \hat{\mathbf{W}}^T(t) \\
 \mathbf{P}_x(t|t) &= [\mathbf{I} - \mathbf{k}_x(t) \mathbf{c}^T] \mathbf{P}_x(t|t-1) \\
 r^2(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{P}_x(t|t-1) \mathbf{c} + \hat{\sigma}^2(t-1) \\
 \hat{\sigma}^2(t) &= \left(1 - \frac{1}{t}\right) \hat{\sigma}^2(t-1) + \frac{1}{t} [\mathbf{y}(t) - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t|t)]^2 \\
 &\quad + \mathbf{c}^T \mathbf{P}_x(t|t) \mathbf{c} \\
 \hat{\boldsymbol{\alpha}}(t) &= \hat{\boldsymbol{\alpha}}(t-1) + \mathbf{k}_a(t) \boldsymbol{\varepsilon}(t) \\
 \mathbf{k}_a(t) &= \mathbf{P}_a(t-1) \hat{\mathbf{W}}^T(t) \mathbf{c} / r^2(t) \\
 \mathbf{P}_a(t) &= [\mathbf{I} - \mathbf{k}_a(t) \mathbf{c}^T] \mathbf{P}_a(t-1) \\
 \hat{\mathbf{W}}(t) &= \hat{\mathbf{B}}(t-1) \hat{\mathbf{W}}(t-1) + \mathbf{c} \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(t-1) \\
 &\quad - \hat{\mathbf{B}}(t-1) [\mathbf{0} : \mathbf{T}(t-1)] \boldsymbol{\varepsilon}(t-1), \quad \hat{\mathbf{W}}(0) = \mathbf{0} \\
 \mathbf{T}_{lm}(t-1) &= \mathbf{T}_r \{ \mathbf{u}_i \mathbf{k}_x^T(t-1) \mathbf{V}_m(t-1) \} \\
 &\quad (l=1, \dots, n, m=1, \dots, n) \\
 \mathbf{V}_m(t-1) &= \mathbf{P}_x^{-1}(t-1|t-2) \hat{\mathbf{B}}(t-2) \mathbf{P}_x(t-2|t-2) \times \\
 &\quad [\mathbf{V}_m(t-2) \hat{\mathbf{B}}^T(t-2) + \mathbf{u}_m \mathbf{c}^T], \quad \mathbf{V}_m(0) = \mathbf{0} \\
 &\quad (m=1, \dots, n) \\
 \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(t-1) &= [\mathbf{y}^T(t-1) : \mathbf{y}^T(t-1) - \hat{\mathbf{x}}^T(t-1|t-1)]
 \end{aligned}$$

上式右辺第3項が, $\partial \mathbf{k}_x(t)/\partial \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ を考慮するとき
に現われる項であり, $\mathbf{T}(t-1)$ の計算は微分演算は含
まれません, 代数演算だけですむ.

本アルゴリズムをまとめると, **Table 1** のようにな
る. これは, RPE 推定器とカルマンフィルタを連動
させる形になっている.

5. 数値実験例

つぎの2次の ARMA 過程について実験を行った.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= 1.5y(t-1) - 0.7y(t-2) + e(t) \\
 &\quad - e(t-1) + 0.2e(t-2) \quad (50)
 \end{aligned}$$

これは, (6)の形に表わすとつぎのようになる.

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t-1) \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t-1) \\
 y(t) &= [1 \quad 0] \mathbf{x}(t) + e(t) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$e(t)$ は, $N[0, 1]$ に従う統計的に独立な乱数を用い
た. アルゴリズムは, Table 1 のものと, 文献2) の
(8・14)式を(6)にあてはめたもの, すなわち

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}(t) &= \hat{\mathbf{B}}(t-1) \hat{\mathbf{x}}(t-1) + \mathbf{c} \hat{\mathbf{d}}^T(t-1) \mathbf{y}(t-1) \\
 \boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \mathbf{y}(t) - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t) \\
 \hat{\boldsymbol{\alpha}}(t) &= \hat{\boldsymbol{\alpha}}(t-1) + \mathbf{k}_a(t) \boldsymbol{\varepsilon}(t) \\
 \mathbf{k}_a(t) &= \mathbf{P}_a(t-1) \hat{\mathbf{W}}^T(t) \mathbf{c} / [\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{W}}(t) \mathbf{P}_a(t-1) \\
 &\quad \times \hat{\mathbf{W}}^T(t) \mathbf{c} + \hat{\sigma}^2(t-1)] \\
 \mathbf{P}_a(t) &= [\mathbf{I} - \mathbf{k}_a(t) \mathbf{c}^T] \mathbf{P}_a(t-1) \\
 \hat{\sigma}^2(t) &= \left(1 - \frac{1}{t}\right) \hat{\sigma}^2(t-1) + \frac{1}{t} \boldsymbol{\varepsilon}^2(t) \\
 \hat{\mathbf{W}}(t) &= \hat{\mathbf{B}}(t-1) \hat{\mathbf{W}}(t-1) + \mathbf{c} \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(t-1) \\
 \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(t-1) &= [\mathbf{y}^T(t-1) : \mathbf{y}^T(t-1) \\
 &\quad - \hat{\mathbf{x}}^T(t-1)] \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

の二つを用いた. (52)は, Table 1 のアルゴリズムに
おいて $\mathbf{k}_x(t) \equiv \mathbf{0}$ とした場合に相当する. これは,
(6)あるいは(51)が入力雑音がないという意味で
deterministic model²⁾と呼ばれているもので, $\mathbf{k}_x(t)$
 $\rightarrow \mathbf{0}$, ($t \rightarrow \infty$), となり, その結果, $\partial \mathbf{k}_x(t)/\partial \boldsymbol{\alpha}^T \rightarrow \mathbf{0}$, ($t \rightarrow$
 ∞) となるので, 最初から $\mathbf{k}_x(t) \equiv \mathbf{0}$ としたものであ
る. アルゴリズムの初期値はつぎのとおりである.

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Table 1: } \hat{\mathbf{x}}(0|0) &= \mathbf{0}, \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}}(0) = \mathbf{0}, \\
 \mathbf{P}_x(0|0) &= 10\mathbf{I}, \quad \mathbf{P}_a(0) = 100\mathbf{I}, \\
 \hat{\sigma}^2(0) &= 0.1 \\
 (52) \text{ 式: } \hat{\mathbf{x}}(0) &= \mathbf{0}, \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}}(0) = \mathbf{0}, \\
 \mathbf{P}_a(0) &= 100\mathbf{I}, \quad \hat{\sigma}^2(0) = 0.1 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

実験は, 15 本の見本系列について行い, $\boldsymbol{\alpha}$, σ^2 の推定
精度は, それぞれ次式で評価した.

$$d_a(t) = \frac{1}{15} \sum_{j=1}^{15} \|\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)}(t)\| \quad (54)$$

Fig. 1 Time evolution of parameter estimation errors

Fig. 2 Time evolution of noise variance estimates

$$\hat{\sigma}^2(t) = \frac{1}{15} \sum_{j=1}^{15} \hat{\sigma}^{2(j)}(t) \quad (55)$$

ここで、 $\hat{\alpha}^{(j)}(t)$, $\hat{\sigma}^{2(j)}(t)$ はそれぞれ j 番目の見本系列に対する推定値 $\hat{\alpha}(t)$, $\hat{\sigma}^2(t)$ である。

Fig. 1 は、(54) で評価した α の推定精度を示す。Table 1 のアルゴリズムのほうは、(52) に比べ収束速度が大幅に加速されているようすが確認でき、 $\partial \mathbf{k}_x(t) / \partial \alpha^T \cdot \varepsilon(t)$ が収束速度あるいは推定精度の向上に及ぼす効果が大きいことがうかがえる。Fig. 2 は σ^2 の推定精度を示す。これも、Table 1 のアルゴリズムは、(52) に比べ収束が速いことが確認される。

6. あとがき

本論文は、ARMA 過程の状態空間表現に基づき、推定値の収束速度に大きい影響を及ぼすといわれてい

る $\partial \mathbf{k}_x(t) / \partial \alpha^T \cdot \varepsilon(t)$ を直接計算することなしに、しかもこれを考慮した形の推定器の構成を行った。そして、この項を考慮することの意義は、推定値の誤差共分散を、Rao-Cramer の下界に最も近づけるところにあることが示された。数値実験例では、 $\partial \mathbf{k}_x(t) / \partial \alpha^T \cdot \varepsilon(t)$ を考慮した場合に、推定値の精度が向上し、収束速度が大幅に加速されることが確認された。

本手法は、(6) の状態空間表現が出发点になっているが、これは Ljung²⁾ がいう deterministic model である。そして、この系に対するカルマンゲイン $\mathbf{k}_x(t)$ は、漸的に 0 になり、 $\partial \mathbf{k}_x(t) / \partial \alpha^T$ も漸的に 0 になる。したがって、過渡期間における推定精度を問題にしないならば、 $\partial \mathbf{k}_x(t) / \partial \alpha^T \cdot \varepsilon$ を考慮しなくても、推定値は真値に収束する。これは、(52) のアルゴリズムを用いることと同じであり、Fig 1 の結果からもうかがえる。しかし、オンライン推定手法の最大の利点は、 α が時変の場合にもある程度それを追跡することができる。このような場合は、 α の変動状況を白色雑音で駆動されるダイナミクスでモデル化し、カルマンフィルタあるいは EKF で推定することができる^{7), 8)}。このときは、 $\mathbf{k}_x(t)$ は漸的に 0 にはならず、 $\partial \mathbf{k}_x(t) / \partial \alpha^T \cdot \varepsilon(t)$ の考慮は推定精度に大きい影響を及ぼすと考えられる。したがって、この項を考慮することの効果は、時変パラメータの推定においてより鮮明にでると思われるが、このことについては現在実験検討中である。

参考文献

- 1) L. Ljung and T. Söderström: Theory and Practice of Recursive Identification, chap. 3, MIT Press (1983)
- 2) L. Ljung: Asymptotic Behavior of the Extended Kalman Filter as a Parameter Estimator for Linear Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-24**-1, 36/50 (1979)
- 3) J. M. Mendel: White-Noise Estimators for Seismic Data Processing in Oil Exploration, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-22**-5, 694/706 (1977)
- 4) G. H. Dai and J. M. Mendel: A Straightforward and Unified Approach to the Derivation of Minimum-Variance Deconvolution Algorithms, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-31**-1, 80/83 (1986)
- 5) 得丸, 添田, 中溝, 秋月: 計数・測定, 4 章, 培風館 (1982)
- 6) B. D. O. Anderson and J. B. Moore: Optimal Filtering, chap. 7, Prentice Hall (1979)
- 7) 北川源四郎: スペクトル解析の動向, 計測と制御, **25**-12, 1074/1081 (1986)
- 8) H. Clergeot: Filter-Order Selection in Adaptive Maximum Likelihood Estimation, IEEE Trans. Information Theory, **IT-30**-2, 199/210 (1984)