式誤差法による Interconnected System の構造を 保持した次数低減化問題[†]

野 原 勉*・細 江 繁 幸*・伊 藤 正 美*

Optimal Approximation via the Equation Error Method of Linear Interconnected Systems

Tsutomu NOHARA*, Shigeyuki HOSOE* and Masami Ito*

In this paper a method for constructing a reduced order model retaining the internal structure of the original high order interconnected system is derived under a single criterion. Reduced order models are obtained for several interconnected systems which have different interactions between subsystems.

Obtained reduced order model is the optimal approximation in the sense that it minimizes the equation error. The equation errors and input-output characteristics are evaluated according to unit impulse or unit step responses and a sufficient condition for the stability of the reduced order model is derived under the assumption that the original system is stable.

The validity of the proposed method is pointed via the numerical simulation at last.

Key Words: approximation, equation error, interconnected system, reduced order model

1. 緒 言

制御対象の低次元化モデルを求めるとき、原システムの入出力構造を保存することは、現実の制御系設計に際し、工学的にきわめて重要である。そこで、構造を保存した次数低減化問題に対する一つのアプローチとして、以前に筆者らは、サブシステムごとに、平衡実現を利用した低次元化を行った¹⁾ 場合を考え、近似系の安定性と結合系の伝達特性の解析を行った。

しかし、この近似法では、系全体のダイナミクスが近似の際、考慮されていないので、必ずしも良好な近似系が得られるとは限らない。

そこで、本論文では、このような問題に対する最適近似モデルを得るため、その評価関数として、システム全体の式誤差を用いた構造付最適近似化法を提案する。

Fig. 1 のようなシステムに対し、式誤差法により、構造を考慮しながら低次元化モデルを構成するとき、原システムが安定でも、必ずしも、近似系の安定性が保証されないので注意を要する。

論文の構成は、まず2章で問題の記述をし、3章で式誤差法による構造付最適近似化法を示し、さらに、本手法により得られる低次元化モデルが安定となるための十分条件を導く。また、4章にて種々の結合関係をもった interconnected system に対して同様の考察を行う。最後に5章で、数値例によって、本手法の有効性を示す。

本稿を通し以下の記号を用いる。

$[\cdot]'$: ベクトルまたは行列の転置

$\sigma[\cdot]$: 行列の最大特異値

$\varrho[\cdot]$: 行列の最小特異値

$\cdot$: 時間に関する微分

2. 問題の記述

高次元原システムが入出力構造をもつ例として、二つのサブシステムから成る Fig. 1 のような interconnected system を考える。

サブシステム Σ_i は、

Fig. 1 An interconnected system

[†] 第30回自動制御連合講演会で発表(昭62・10)

* 名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya
(Received August 27, 1987)

(Revised January 12, 1988)

$$\Sigma_i: \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i \\ y_i = C_i x_i \end{cases}, \quad i=1, 2 \quad (2.1)$$

で表わされ、サブシステム間の結合は

$$u_i = v_j + v_i, \quad i \neq j, \quad i=1, 2, \quad j=1, 2 \quad (2.2)$$

とする。また、それぞれの次数を n_i 次とする。

このとき、

〔仮定〕 原システム Fig. 1 は安定かつ可制御である。

のもとで、

〔問題〕 Fig. 1 の入出力構造を保存し、全体が安定である最適近似モデルを求める。

を考える。

3. 入出力構造を保存した式誤差法による低次元化法

Fig. 1 のシステムに式誤差法^{2), 3)}を適用し、低次元化を行う。

原システムの閉ループ系は

$$\Sigma_c: \begin{cases} \dot{x} = A_c x + Bv \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.1)$$

ここに、

$$x = (x_1' \ x_2')', \quad y = (y_1' \ y_2')', \quad v = (v_1' \ v_2')'$$

$$A_c = A + BKC$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

と表わされる。このとき、入出力構造を保存した低次元モデルの閉ループ系は

$$\hat{\Sigma}_c: \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}_c \hat{x} + \hat{B}v \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} \end{cases} \quad (3.3)$$

ここに、

$$\hat{x} = (\hat{x}_1' \ \hat{x}_2')', \quad \hat{y} = (\hat{y}_1' \ \hat{y}_2')'$$

$$\hat{A}_c = \hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & 0 \\ 0 & \hat{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 & 0 \\ 0 & \hat{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \\ 0 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

と表わされるので、サブシステムの低次元化モデルは、

$$\hat{\Sigma}_i: \begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = \hat{A}_i \hat{x}_i + \hat{B}_i u_i \\ \hat{y}_i = \hat{C}_i \hat{x}_i \end{cases}, \quad i=1, 2 \quad (3.5)$$

となる。 $\hat{\Sigma}_i$ の次数 $\hat{n}_i$ は $\hat{n}_i < n_i$ である。

まず、行最大階数をもつ縮約化行列 R を

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}, \quad R_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}, \quad i=1, 2 \quad (3.6)$$

と設定し、状態変数を

$$\hat{x} = R\hat{x} \text{ i.e., } \hat{x}_i = R_i \hat{x}_i, \quad i=1, 2 \quad (3.7)$$

で近似する。以下では、 R はその一部に行列 C を含むものと仮定する。すなわち、 $\hat{C}$ は系の出力 y をその一部に含む。 $\hat{x}$ の他の変数の物理的意味は、それぞれのサブシステムごとに、状態変数の重要なものだけ取り出し、それらの線形結合で低次元化モデルの状態を表わそうとするものである。

ここで、問題は

$$\hat{x} \approx \hat{x} = R\hat{x} \quad (3.8)$$

となる低次元化モデル $\hat{\Sigma}_c$ を求めることである。もし、すべての時刻 t に対して

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(t) \quad (3.9)$$

が成立すれば、

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}_c \hat{x} + \hat{B}v \quad (3.10)$$

となるが、実際には上式は成立しないので、両辺の差であるいわゆる式誤差

$$d = \dot{\hat{x}} - (\hat{A}_c \hat{x} + \hat{B}v) \quad (3.11)$$

を用い、低次元化モデル (3.3) 式の近似度のメジャーとする。事実、式誤差は近似誤差

$$e = \hat{x} - \hat{x} \quad (3.12)$$

に対して

$$\begin{aligned} e &= \dot{\hat{x}} - \hat{A}_c \hat{x} - \hat{B}v \\ &= (\hat{A}_c \hat{x} - \hat{A}_c \hat{x}) + (\dot{\hat{x}} - \hat{A}_c \hat{x} - \hat{B}v) \\ &= \hat{A}_c e + d \end{aligned} \quad (3.13)$$

となり、式誤差 d を小さくすることは間接的に近似誤差 e を小さくすることになる。

出力誤差は、

$$e_y = y - \hat{y} \approx y - \hat{y} = (C - \hat{C}R)x \quad (3.14)$$

となるので、 $\hat{C}$ は

$$C = \hat{C}R \text{ i.e., } C_i = \hat{C}_i R_i, \quad i=1, 2 \quad (3.15)$$

を満足するように決める。このとき、式誤差 (3.11) 式は (3.7)、(3.1) 式を用いて

$$d = (RA_c - \hat{A}_c R)x + (RB - \hat{B})v \quad (3.16)$$

となるので、 $\hat{B}$ を

$$\hat{B} = RB \text{ i.e., } \hat{B}_i = R_i B_i, \quad i=1, 2 \quad (3.17)$$

と選ぶと、(3.15)、(3.17) 式より

$$\begin{aligned} d &= (RA_c - \hat{A}_c R)x \\ &= \{R(A + BKC) - (\hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C})R\}x \\ &= (RA - \hat{A}R)x \end{aligned} \quad (3.18)$$

を得る。原システムにインパルス入力を印加したときの式誤差を $D_i(t)$ とすると、

$$D_i(t) = (RA - \hat{A}R)e^{A_c t} B \quad (3.19)$$

となり、

$$J_i = \int_0^\infty \text{trace}[D_i(t)D_i'(t)]dt \quad (3.20)$$

を最小化するように $\hat{A}$ を決める。上式は任意の $\hat{A}$ に対し非負であり、かつ $\hat{A}$ に関する 2 次式であるから、

最小値を与える $\hat{A}$ は $\partial J_i / \partial \hat{A} = 0$ において、つぎのように求まる (付録参照)。

$$\begin{aligned}\hat{A} &= RAUR'(RUR')^{-1} \text{ i. e.,} \\ \hat{A}_i &= R_i A_i U_i R'_i (R_i U_i R'_i)^{-1}, \quad i=1, 2\end{aligned}\quad (3.21)$$

ここに、

$$S = \int_0^\infty e^{A_c t} BB' e^{A_c' t} dt \quad (3.22)$$

で、 U は S を A_c と同じサイズで分割した主ブロック対角部分である。

(注意 1) 仮定より $S > 0$ であり、また、 U は S の主対角部分であるから $U > 0$ となる。さらに、 R は行最大階数をもつので $RUR' > 0$ である。よって、 $(RUR')^{-1}$ は存在する。

(注意 2) この問題で構造を考慮しなければ、文献 2) で明らかにされているように、 $\hat{B}$ 、 $\hat{C}$ は (3.17)、(3.15) 式により、また $\hat{A}_c$ は、

$$\hat{A}_c = RA_c SR' (RSR')^{-1}, \quad S = \int_0^\infty e^{A_c t} BB' e^{A_c' t} dt$$

で与えられ、これらは、

$\hat{A}_c (RSR') + (RSR') \hat{A}_c = R(A_c S + SA_c') R' = -\hat{B} \hat{B}'$ を満たす。したがって、低次元化モデルの可制御部分のみ取り出せば、安定な最適近似モデルが得られる。

これに対し、構造を考慮すると、閉ループ系の特性行列 $\hat{A}_c$ は、

$$\hat{A}_c = \hat{A} + \hat{B} \hat{K} \hat{C}$$

となり、しかも、上式右辺の第 1 項、第 2 項は独立に決まるため、上のようなリアプノフ方程式を満たさない。したがって、安定解析も困難となる。

このとき、インパルス入力に対する最適近似としてつぎの定理が成立する。

《定理》 サブシステムが (2.1) 式、その結合が (2.2) 式で表わされる Fig. 1 の Interconnected System の構造を保存した ((3.20) 式の最小化の意味での) 最適近似モデルは、(3.5) 式で表わされ、その $\hat{A}_i$ 、 $\hat{B}_i$ 、 $\hat{C}_i$ はそれぞれ (3.21)、(3.17)、(3.15) 式で与えられる。

また、近似モデルの閉ループ系が安定なための十分条件は次式で与えられる。

$$\bar{\sigma}(X) < \underline{\sigma}(RSR') / 2\bar{\sigma}(TR') \quad (3.23)$$

ここに、

$$X = RA_c - \hat{A}_c R = RA - \hat{A} R \quad (3.24)$$

$$T = \int_0^\infty e^{A_c t} S e^{A_c' t} dt > 0 \quad (3.25)$$

と置いた。

(証明) 定理の前半は導出過程をまとめたものである。

(安定なための十分条件の導出) (3.22) 式はつぎのリアプノフ方程式の解と等価である。

$$A_c S + SA_c' = -BB' \quad (3.26)$$

上式の両辺の左右から $e^{A_c t}$ 、 $e^{A_c' t}$ を掛け、 $t=0$ から $t=\infty$ まで積分すると、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty A_c e^{A_c t} S e^{A_c' t} dt + \int_0^\infty e^{A_c t} S e^{A_c' t} A_c' dt \\ = - \int_0^\infty e^{A_c t} BB' e^{A_c' t} dt\end{aligned}\quad (3.27)$$

となり、(3.25) 式を用いると、次式を得る。

$$A_c T + TA_c' = -S \quad (3.28)$$

ここで、

$$\hat{T} = RTR' \quad (3.29)$$

とすると、近似系のリアプノフ方程式は、(3.24)、(3.28) 式を使って、結局次式となる。

$$\begin{aligned}\hat{A}_c \hat{T} + \hat{T} \hat{A}_c' &= \hat{A}_c RTR' + RTR' \hat{A}_c' \\ &= (RA_c - X)TR' + RT(A_c' R' - X') \\ &= R(A_c T + TA_c')R' - (XTR' + RTX') \\ &= -RSR' - (XTR' + RTX')\end{aligned}\quad (3.30)$$

$\hat{A}_c$ が安定なためには、 $\hat{T} = RTR' > 0$ であるので、上式右辺が負定であればよい。右辺第 1 項は負定であるので、よく知られた結果により、

$$\bar{\sigma}(XTR' + RTX') < \underline{\sigma}(RSR') \quad (3.31)$$

が成立すれば、 $\hat{A}_c$ は安定となる。上式左辺は、

$$\bar{\sigma}(XTR' + RTX') \leq 2\bar{\sigma}(XTR') \leq 2\bar{\sigma}(X)\bar{\sigma}(TR')$$

となるので、定理の十分条件が得られる。 ■

インパルス入力に対する出力誤差 $E_y^i(t)$ の評価式を与えておこう。出力誤差は、

$$E_y^i(t) = Ce^{A_c t} B - \hat{C} e^{\hat{A}_c t} \hat{B} \quad (3.32)$$

で表わされる。したがって、その 2 乗ノルム (trace [$E_y^i(t)E_y^{i'}(t)$] の $t=0$ から ∞ までの積分) は、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \text{trace}[E_y^i(t)E_y^{i'}(t)]dt \\ = \int_0^\infty \text{trace}[\{Ce^{A_c t} B - \hat{C} e^{\hat{A}_c t} \hat{B}\} \\ \{B'e^{A_c' t} C' - \hat{B}' e^{\hat{A}_c' t} \hat{C}'\}]dt\end{aligned}$$

となる。この右辺に、前に指摘した事実、すなわち、(3.22) 式の積分が (3.26) 式の解で与えられることなどを利用して

$$\int_0^\infty \text{trace}[E_y^i(t)E_y^{i'}(t)]dt = \text{trace}[\hat{C} Y \hat{C}'] \quad (3.33)$$

となることを示すことができる。ここで、 Y は、

$$\hat{A}_c Y + Y \hat{A}_c' = -\{X(SR' - \bar{S}) + (RS - \bar{S}')X'\} \quad (3.34)$$

の解であり、さらに、 $\bar{S}$ は

$$A_c \bar{S} + \bar{S} A_c' = -BB' \quad (3.35)$$

の解である。

つぎに、原システムにステップ入力を印加したときの式誤差 $D_s(t)$ を考える。状態のステップ応答は、

$$x = (e^{A_c t} - I)A_c^{-1}B \quad (3.36)$$

であり、これを(3.16)式に代入すると、

$$D_s(t) = (RA_c + \hat{A}_c R)e^{A_c t} A_c^{-1}B + (\hat{A}_c R A_c^{-1}B - \hat{B}) \quad (3.37)$$

となる。定常偏差をなくすためには、

$$\hat{B} = \hat{A}_c R A_c^{-1}B$$

とする必要があるが、上式では構造が保存されない。

ここでは、構造の保存を優先的に考え、定常偏差が残ることを許容することにしインパルス入力の場合と同様に(3.17)式で $\hat{B}$ を構成する。さらに、システムの近似は、 $D_s(t)$ の定常値と $D_s(t)$ の差、すなわち(3.37)式の第1項

$$\begin{aligned} D_{s1}(t) &= (RA_c - \hat{A}_c R)e^{A_c t} A_c^{-1}B \\ &= (RA - \hat{A}R)e^{A_c t} A_c^{-1}B \end{aligned} \quad (3.38)$$

だけを用い

$$J_s = \int_0^\infty \text{trace}[D_{s1}(t)D_{s1}'(t)]dt \quad (3.39)$$

の $\hat{A}$ に関する最小化を行う。インパルス応答の場合と同様に、(3.21)式が求まる。ただし、

$$S = \int_0^\infty e^{A_c t} A_c^{-1} B B' A_c^{-1} e^{A_c t} dt. \quad (3.40)$$

安定性の十分条件も、上の S を用いた(3.23)式となる。

この場合の出力誤差 $E_y(t)$ の評価は、定常偏差が残るため過渡項と定常項にわけて考える必要がある。過渡項に関しては、インパルス入力のときの計算と同様にできるので省略する。一方、定常項 $\bar{E}_y$ は $-CA_c^{-1}B$ と $-\hat{C}\hat{A}_c^{-1}\hat{B}$ との差であることから

$$\bar{E}_y = \hat{C}\hat{A}_c^{-1}X A_c^{-1}B \quad (3.41)$$

だけの定常偏差が残る。

4. 種々の結合関係をもった Interconnected System の構造を保存した最適近似モデル

Fig. 1 のほかに、Fig. 2 のような結合関係の interconnected system が考えられる。

まず、Fig. 2(a)についてはその閉ループ系は、

$$\Sigma_c : \begin{cases} \dot{x} = A_c x + B u \\ y = C x \end{cases} \quad (4.1)$$

ここに、

$$x = (x_1' \ x_2')', \quad y = (y_1' \ y_2')',$$

$$u = (u_1' \ u_2')', \quad x_i \in \mathbf{R}^{n_i}$$

$$A_c = A + LK = \begin{bmatrix} A_1 & L_1 \\ L_2 & A_2 \end{bmatrix}$$

(a)

(b)

(c)

Fig. 2 Some interconnected systems

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

で表わされる。この問題では、前章のような入出力行列で定まる結合関係とは異なり、結合行列 L は B 、 C とは無関係なサブシステム間の結合を表わす。このとき、入出力構造を保存した低次元化モデルは、

$$\Sigma_c : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}_c \hat{x} + \hat{B} u \\ \hat{y} = \hat{C} \hat{x} \end{cases} \quad (4.3)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (\hat{x}_1' \ \hat{x}_2')', \quad \hat{y} = (\hat{y}_1' \ \hat{y}_2')', \quad \hat{x}_i \in \mathbf{R}^{\hat{n}_i} \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} \hat{B}_1 & 0 \\ 0 & \hat{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \\ 0 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

となる。縮約化行列 R を(3.6)式と同様に設定すると、式誤差は

$$d = (RA_c - \hat{A}_c R)x + (RB - \hat{B})u \quad (4.5)$$

となる。 $\hat{B}$ 、 $\hat{C}$ をそれぞれ(3.17)、(3.15)式のように決めると、インパルス入力に対しては、

$$\min_{A_c} J_i = \int_0^\infty \text{trace}[D_i(t)D_i'(t)]dt \quad (4.6)$$

ここに、

$$D_i(t) = (RA_c - \hat{A}_c R)e^{A_c t} B. \quad (4.7)$$

より $\hat{A}_c$ を求めればよい。

また、ステップ入力に対しては、

$$\min_{\hat{A}_c} J_s = \int_0^\infty \text{trace}[D_s(t)D_s'(t)]dt \quad (4.8)$$

ここに、

$$D_s(t) = (RA_c - \hat{A}_c R)e^{A_c t} A_c^{-1} B. \quad (4.9)$$

より $\hat{A}_c$ を求めればよい。

この近似化法は、縮約化行列 R がブロック対角であること、および (4.6), (4.7) 式 (あるいは (4.8), (4.9) 式) の形により、 J を最小化することは、 $\|R_1 A_1 - \hat{A}_1 R_1\|$, $\|R_2 A_2 - \hat{A}_2 R_2\|$, $\|R_1 L_1 - \hat{L}_1 R_2\|$, $\|R_2 L_2 - \hat{L}_2 R_1\|$ を小さくすることを意味し、この意味で得られた近似化系のサブシステムは、原システムのサブシステムにそれぞれ対応している。

〔系 1〕 閉ループ系が (4.1), (4.2) 式で表わされる Fig. 2(a) の interconnected system の構造を保存した最適近似モデルは、(4.3) 式で表わされ、その $\hat{B}$, $\hat{C}$ は (3.17), (3.15) 式により与えられる。また、 $\hat{A}_c$ は、

$$\hat{A}_c = RA_c SR' (RSR')^{-1} \quad (4.10)$$

により与えられる。したがって、 $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{L}_1$, $\hat{L}_2$ は (4.2) 式の A_c の構造に対応して $\hat{A}_c$ の部分行列として定まる。ただし、

$$S = \begin{cases} \int_0^\infty e^{A_c t} B B' e^{A_c' t} dt & \text{(インパルス入力に対する近似の場合)} \\ \int_0^\infty e^{A_c t} \hat{A}_c^{-1} B B' A_c^{-1} e^{A_c' t} dt & \text{(ステップ入力に対する近似の場合)} \end{cases} \quad (4.11)$$

ステップ入力に対する最適近似モデルについては、

$$e_y = \hat{C} \hat{A}_c^{-1} (RA_c - \hat{A}_c R) A_c^{-1} B \quad (4.13)$$

だけの定常偏差が残る。

近似系の安定性については、つぎのことがいえる。

インパルス入力に対しては、 $(\hat{A}_c, \hat{B})$ 、ステップ入力に対しては、 $(\hat{A}_c, RA_c^{-1} B)$ のペアより可制御部分をとり出すことにより安定なモデルが得られる。■

(証明) 前半の部分は定理と同様にして導出できる。

(近似系の安定性の証明) インパルス入力の場合は、(4.10), (4.11) 式により、

$$\begin{aligned} \hat{A}_c RSR' + RSR' \hat{A}_c &= R(A_c S + S A_c') R' \\ &= -RBB'R' \\ &= -\hat{B}\hat{B}' \end{aligned} \quad (4.14)$$

の関係が得られ、 $RSR' > 0$ より、 $(\hat{A}_c, \hat{B})$ が可制御なら $\hat{A}_c$ は安定である。よって、この場合、近似系の可制御モードのみ取り出すことにより安定な最適近似モデルが得られる。

ステップ入力の場合も同様にして、(4.10), (4.12) 式より

$$\hat{A}_c RSR' + RSR' \hat{A}_c = -RA_c^{-1} B B' A_c^{-1} R' \quad (4.15)$$

となるので、系のようなになる。■

つぎに、Fig. 2(b) について考察する。その閉ループ系は、(a) と同様に (4.1) 式で表わされるが、ただし、

$$\left. \begin{aligned} A_c &= A + BKL \\ A &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

である。このとき、入出力構造を保存した低次元化モデルは、(4.3) 式で表わされ、ただし、

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_c &= \hat{A} + \hat{B}K\hat{L} \\ \hat{A} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & 0 \\ 0 & \hat{A}_2 \end{bmatrix}, \hat{L} = \begin{bmatrix} \hat{L}_1 & 0 \\ 0 & \hat{L}_2 \end{bmatrix}, \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} \hat{B}_1 & 0 \\ 0 & \hat{B}_2 \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \\ 0 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

である。縮約化行列 R を (3.6) 式、 $\hat{B}$ を (3.17) 式、 $\hat{C}$ を (3.15) 式で決め、さらに、

$$L = \hat{L}R, \text{ i. e., } L_i = \hat{L}_i R_i, i=1, 2 \quad (4.18)$$

とすると、式誤差は、

$$d = (RA - \hat{A}R)x \quad (4.19)$$

となる。よって、つぎの系が成立する。

〔系 2〕 閉ループ系が (4.1), (4.16) 式で表わされる Fig. 2(b) の最適近似モデルは、(4.3) 式で表わされ、その $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{L}$ はそれぞれ、(3.17), (3.15), (4.18) 式により与えられる。また、 $\hat{A}$ はインパルス入力に対する近似の場合は、(3.21), (3.22) 式、ステップ応答の場合は、(3.21), (3.40) 式で与えられる。安定性の十分条件も、それぞれ、(3.22), (3.40) 式を使った (3.23) 式で表わされる。

ステップ入力の定常偏差は (3.45) 式である。■

最後に、Fig. 2(c) について考察する。この場合は、

$$A_c = A + LKC \quad (4.20)$$

となり、結合部分の入出力が (b) と双対の関係になる。よって、

$$\hat{L} = RL, \text{ i. e., } \hat{L}_i = R_i L_i, i=1, 2 \quad (4.21)$$

とすることにより、系 2 と同様の系が成立する。

5. 数 値 例

Fig. 1 の Σ_1 , Σ_2 の各 A_i , B_i , C_i をつぎのように設定する。

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_1 = (0.1 \ 0) \\ A_2 &= \begin{pmatrix} -11 & -3 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_2 = (0.1 \ 0) \end{aligned}$$

Fig. 3 Unit step responses of the original system and the reduced order model

閉ループ系の固有値は、

$$\lambda_c = -14.0, -11.3, -9.0, -7.7$$

となる。このとき、 $R=C$ と選びステップ入力に対する 2 次の最適近似を求める。

安定性の十分条件 (3.23) 式は、

$$\text{左辺} = \sigma(X) = 0.309$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sigma(RSR')/2\sigma(TR') = 0.442 \times 10^{-7}/2 \\ &\times 0.466 \times 10^{-7} = 0.474 \end{aligned}$$

となるので、条件式が満足され近似系の安定性は保たれる。

最適近似モデルは、

$$\Sigma_c: \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} -8.56 & 0.01 \\ 0.01 & -10.27 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{x} \end{cases}$$

と求まる。ちなみに、近似系の固有値は、

$$\lambda_c = -10.27, -8.56$$

である。

u_1 に単位ステップ入力を加えたときの y_1 , y_2 の応答を Fig. 3 に示す。定常偏差は若干残るが、良好な近似となっている。

6. 結 言

種々の interconnected system の構造を保存した最適近似モデルをインパルス入力とステップ入力の場合について、式誤差法により求めた。

本手法により得られた低次元化モデルが安定なための十分条件を導き、また、出力誤差については、ステップ入力に対して定常偏差が残るが、その過渡特性はインパルス入力、ステップ入力の場合とも良好な近似となることを示した。

日頃からご討論をいただく名古屋大学早川義一講師に感謝します。

参 考 文 献

- 1) 野原, 細江, 伊藤: Interconnected System の構造を保持した次数低減化問題, 第 16 回制御理論シンポジウム, 183/188 (1987)
- 2) E. Eitelberg: Model Reduction by Minimizing the Weighted Equation Error, Int. J. Control, **34**-6, 1113/1123 (1981)
- 3) D. A. Wilson: Stability of Reduced-Order Models Obtained via the Equation Error Method, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-29**-2, 162/163 (1984)
- 4) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)

《付録》 (3.21) 式の導出

(3.20) 式は、

$$J_i = \int_0^{\infty} \text{trace}[(RA - \hat{A}R)e^{A_c t} BB' e^{A_c' t} (A'R' - R'\hat{A}')] dt \quad (\text{A.1})$$

$$= \text{trace} \left[(RA - \hat{A}R) \int_0^{\infty} e^{A_c t} BB' e^{A_c' t} dt (A'R' - R'\hat{A}') \right] \quad (\text{A.2})$$

となり、(3.22) 式を使うと、

$$\begin{aligned} &= \text{trace}[(RA - \hat{A}R)S(A'R' - R'\hat{A}')] \\ &= \text{trace}(RASA'R') - \text{trace}(RASR'\hat{A}') \\ &\quad - \text{trace}(\hat{A}RSA'R') + \text{trace}(\hat{A}RSR'\hat{A}') \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

となる。ここで、 $S=U+V$ ($U: S$ を $A_c=A+BK$ と同じサイズで分割した主ブロック対角成分, V : 非ブロック対角成分) とすると、

$$\begin{aligned} &= \text{trace}(RAUA'R') - \text{trace}(RAUR'\hat{A}') \\ &\quad - \text{trace}(\hat{A}RUA'R') + \text{trace}(\hat{A}RUR'\hat{A}') \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

を得る。ここで上式の第 j 項目を J_i^j と置き、各項を $\hat{A}$ で微分すると、

$$\begin{cases} \partial J_1^1 / \partial \hat{A} = 0 \\ \partial J_2^2 / \partial \hat{A} = -RAUR' \\ \partial J_3^3 / \partial \hat{A} = -RAUR' \\ \partial J_4^4 / \partial \hat{A} = 2\hat{A}RUR' \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

となるので、 $\partial J_i / \partial \hat{A} = 0$ は、

$$2\hat{A}RUR' - 2RAUR' = 0 \quad (\text{A.6})$$

となる。これより (3.21) 式を得る。

このように、評価関数として trace を選ぶことによって、(A.4) 式で S が U に変わり、結局、サブシステム間の結合関係を表わす V が無視できるので、全体のシステムの低次元化が、(3.21) 式で表わされるように、サブシステムごとの低次元化に帰着される。