ブロック・パルス関数のモデル規範型適応制御 システムへの応用[†]

相 良 節 夫*・原

魁*・和 田 清*

Application of Block-Pulse Functions to Model Reference Adaptive Control Systems

Setsuo SAGARA*, Kui YUAN* and Kiyoshi WADA*

In this paper the digital control problem of single-input-single-output (SISO) continuous-time model reference adaptive control (MRAC) systems is considered. For a given SISO continuous-time system a discrete-time model is developed via block-pulse functions (BPF). Recursive algorithms which can give piece-wise continuous control inputs can be derived from the control rules of the continuous-time MRAC systems using this discrete time model. Since the control algorithms derived by this method still use the parameters of the continuous-time system, the adjustment of the parameters and the choice of the sampling period can be done independently. Therefore one can easily redesign the MRAC systems for different sampling periods according to the requirement of the accuracy once a control algorithm is obtained. Furthermore, the unboundness problem of the multiintegral operation of initial values and input-output variables of the system is also discussed. The effectiveness of our method is shown by the computer simulation of a numerical example.

Key Words: model reference adaptive control, single-input-single-output continuous-time system, on-line control algorithm, block-pulse functions

1. ま え が き

ディジタル制御は、D.D.Cをはじめとして、最適制御、適応制御など広範囲の制御に用いられるようにな

ったが、その際、制御対象を離散系としてオンラインで処理しているのが普通である。しかし、実際のシステムではプラントはほとんど連続系であるため離散系に変換する場合に種々の問題が生じる。たとえば、連続系のパラメータは離散系のいくつかのパラメータに対応しているので、連続系のパラメータの微小変動またはモデリング誤差は離散系に大きな影響を与える場合があること、連続系がたとえ双線形であっても離散系は非線形となることなどである。また、一般に同定を行う場合には比較的長いサンプリング間隔が好ましいが、連続系に近い制御を行うには短いことが要求される。このため、適応制御の場合どのような目安でサンプリング間隔を選択すべきかが問題となり、適切なサンプリング間隔を選ぶためには制御系全体の設計を繰り返して行う必要がある。さらに、離散系を同定するときサンプリング間隔が取れる下限があるので¹⁾、連続系に近い制御を得ることが困難な場合がある。したがって連続系のままで計算機で処理することが望ましいが、制御則の実行においては微分方程式を解くことが必要となるため、計算時間が著しく増大し、オンラインで実行することが非常に難しい。

連続系の微分方程式を積分して、各積分値を観測データから近似的に計算することによって、連続系のパラメータを係数にもつ代数方程式に変換し、それを用いて連続系の同定あるいは制御を行うことができる。Walsh 関数 (WF)²⁾、ブロック・パルス関数 (Block-Pulse Functions, BPF)³⁾ などによる手法はこのような手法に属している。このうち、BPF は非常に簡単で取り扱いやすい特性をもっており、実用上便利のため注目を集めている。Sinha らは BPF によるシステムの状態推定手法を提案しており⁴⁾、線形システムの BPF による解の収束性については Chen らの論文がある^{5), 6)}。また、オブザーバとシステムの低次元モ

[†] 第3回計測自動制御学会九州支部学術講演会で発表 (昭60・7)

* 九州大学工学部 福岡市東区箱崎 6-10-1

* Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka

(Received September 14, 1987)

(Revised January 13, 1988)

デルについては川路⁹⁾と汐月⁸⁾などの研究がある。WF と BPF を用いて最適制御則の計算を行った例もあるが^{9), 10)}, これらの手法はオフライン計算によるもので、適応制御などのようなオンライン制御方式を必要とする場合には適用できない。

本論文では、BPF を用いて 1 人出力連続系のモデル規範型適応制御システム (MRACS) からオンライン制御アルゴリズムを導出することを試みる。BPF を用いて連続系からある種の離散系モデルを導出し、この離散系モデルを用いて連続系の制御則からオンライン制御アルゴリズムを求める手法を提案する。ここで導出する離散系モデルはもとの連続系のパラメータをそのまま用いており、サンプリング間隔の選択とシステムのパラメータの調整を独立に行うことができるなどの特徴をもっているため、制御システムを連続系制御則に基づいて設計して、制御精度の要求に応じて適当なサンプリング間隔を選定できる利点がある。また、本論文では、積分変換によって制御問題を取り扱う手法全般に生ずる初期値および入出力の多重積分による非有界性の問題を除く手法を提案する。本手法の有効性を計算機によるシミュレーションにより確認した。

2. ブロック・パルス関数 (BPF) と演算行列⁶⁾

区間 $[0, T)$ ($0 \leq T < \infty$) 上の N 次 BPF は次式で表わされる。

$$\phi_i(t) = \begin{cases} 1, & (i-1)T/N \leq t < iT/N, \quad (i=1, 2, \dots, N) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.1)$$

また、 $[0, T)$ 上で可積分な任意の関数 $f(t)$ はつぎのように BPF 展開することができる。

$$f(t) \doteq \mathbf{f}^{0T} \boldsymbol{\phi}(t) \quad (2.2)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\phi}(t) \triangleq [\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)]^T, \\ \mathbf{f}^0 \triangleq [f^0(1), f^0(2), \dots, f^0(N)]^T$$

である。また、 $f^0(i)$ ($i=1, 2, \dots, N$) は関数 $f(t)$ の区間 $[(i-1)T/N, iT/N)$ 上の平均値であり、BPF 展開の係数とも呼ばれ、

$$f^0(i) = (N/T) \int_{(i-1)T/N}^{iT/N} f(t) dt \\ \doteq (f((i-1)T/N) + f(iT/N))/2 \quad (2.3)$$

によって近似される。また、(2.2) 式のような展開が各小区間での近似誤差を最小 2 乗の意味で最小にすることもよく知られている。

BPF の積分演算行列 $P(N \times N)$ を用いると、

$$\int_0^t \boldsymbol{\phi}(t) dt \doteq P \boldsymbol{\phi}(t) \quad (2.4)$$

と書くことができる。ただし、ここで、 $h \triangleq T/(2N)$ で

あり

$$P = h \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

である。ゆえに、多重積分

$$I_1 f(t) \triangleq \int_0^t \int_0^t f(t) dt^2 \quad (2.6)$$

の BPE 展開係数 $\mathbf{f}^j$ はつぎのように近似される⁸⁾。

$$\mathbf{f}^j \doteq (P^T)^j \mathbf{f}^0 \triangleq [f^j(1), f^j(2), \dots, f^j(N)]^T \\ (j=1, \dots, n) \quad (2.7)$$

また、 $\mathbf{f}^j$ の第 i 番目の要素はつぎのように計算される。

$$f^j(1) = h f^{j-1}(1) \\ f^j(i) = 2h f_{\frac{1}{2}}^{j-1}(i-1) + h f^{j-1}(i) \quad (2.8a)$$

$$f_{\frac{1}{2}}^{j-1}(i-1) = \sum_{k=1}^{i-1} f^{j-1}(k)$$

あるいは、

$$f^j(1) = h f^{j-1}(1) \\ f^j(i) = f^j(i-1) + h(f^{j-1}(i) + f^{j-1}(i-1)) \quad (2.8b)$$

すなわち、 $\mathbf{f}^j$ の第 i 番目の要素は $f^0(1), f^0(2), \dots, f^0(i)$ だけから求められる。BPF 展開係数のこの性質は連続系の逐次同定あるいは制御アルゴリズムを導出するときに非常に重要な役割を果たすことになる。

3. BPF を用いた 1 入出力連続系の逐次解法

この章では、BPF を用いて 1 入出力連続系から離散系モデルを導出し、このモデルを用いてもとの連続系の解を逐次的に求める手法について述べる。

つぎのような 1 入出力線形定係数システムを考えることにする。

$$A(p)x(t) = B(p)u(t), \quad n > m, \\ A(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0, \\ B(p) = b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_0. \quad (3.1)$$

ここで、 $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_m$ は定数である。

3.1 BPF による離散系モデルの導出

$x(t)$, $u(t)$ の N 次 BPF 展開が、

$$x(t) \doteq \mathbf{x}^{0T} \boldsymbol{\phi}(t) \quad (3.2)$$

$$u(t) \doteq \mathbf{u}^{0T} \boldsymbol{\phi}(t) \quad (3.3)$$

によって与えられるとする。ただし、ここで、

$$\mathbf{x}^0 \triangleq [x^0(1), x^0(2), \dots, x^0(N)]^T,$$

$$\mathbf{u}^0 \triangleq [u^0(1), u^0(2), \dots, u^0(N)]^T$$

は (2.4) 式によって求められる。

(3.1) 式を n 回積分して、(3.2), (3.3) および (2.4) 式を用いると次式が得られる。

$$x^0 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i (P^T)^{n-i} x^0 = \sum_{i=0}^m b_i (P^T)^{n-i} u^0 + \sum_{r=0}^{n-1} s_r c_r \quad (3.4)$$

ここで、

$$s_r \triangleq \sum_{i=0}^r a_{n-r+i} x^{(i)}(0) - \sum_{i=0}^r b_{n-r+i} u^{(i)}(0),$$

$$a_n = 1, b_n = \dots = b_{m+1} = 0,$$

$$c_r \triangleq [c_r(1), c_r(2), \dots, c_r(N)]^T$$

であり、 $c_r(k)$ ($k=1, 2, \dots, N, r=1, 2, \dots, n-1$) は $t^r/r!$ の BPF 展開の係数である。さらに、

$$a \triangleq [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]^T, \quad b \triangleq [b_0, b_1, \dots, b_m]^T,$$

$$(P^T)^i x^0 \triangleq [x^i(1), x^i(2), \dots, x^i(N)]^T,$$

$$(P^T)^i u^0 \triangleq [u^i(1), u^i(2), \dots, u^i(N)]^T,$$

$$\rho^0(k) \triangleq s_0 + s_1 c_1(k) + \dots + s_{n-1} c_{n-1}(k)$$

と定義すると、(3.4)式の第 k 行は次式で表わすことができる¹¹⁾。

$$\begin{aligned} x^0(k) + a_{n-1} x^1(k) + \dots + a_0 x^n(k) \\ = b_{n-1} u^1(k) + \dots + b_1 u^{n-1}(k) + b_0 u^n(k) + \rho^0(k) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$x^i(k), u^i(k)$ ($i=0, 1, \dots, n$) および $\rho^0(k)$ は時刻 k ($k=1, 2, \dots, N$) までの入出力から計算されるので、(3.5)式はシステム(3.1)式に対応する一種の離散系モデルと考えられる。また、(3.5)式において、サンプリング間隔の選択がモデルのパラメータに影響しないことおよび $\rho^0(k)$ は初期値だけによるものであることも明らかにである。

3.2 BPF 手法によるシステムの逐次解法

3.2.1 有限時間の場合

ベクトル

$$h(n, n-m) \triangleq [h^n, h^{n-1}, \dots, h^{n-m}]^T$$

$$g(f, k, n, n-m) \triangleq [f^n(k), f^{n-1}(k), \dots, f^{n-m}(k)]$$

と行列

$$F(f, k, n, n-m)$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} f_{\frac{n}{2}}(k) & f_{\frac{n}{2}}(k) & \dots & f_{\frac{n}{2}-1}(k) & \dots & f_{\frac{n}{2}-1}(k) \\ 0 & f_{\frac{n}{2}}(k) & \dots & f_{\frac{n}{2}-2}(k) & \dots & f_{\frac{n}{2}-2}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_{\frac{n}{2}}(k) & \dots & f_{\frac{n}{2}-m}(k) \end{bmatrix}$$

を定義すると、 $g(f, k, n, n-m)$ 、 $h(n, n-m)$ と $F(f, k, n, n-m)$ との間にはつぎのような関係がある。

$$\begin{aligned} g^T(f, k, n, n-m) \\ = 2F(f, k-1, n, n-m)h(n, 1) \\ + f^0(k)h(n, n-m) \quad (k=2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (3.6)$$

(付録A参照)。ここで、 $F(f, k-1, n, n-m)$ は $f^0(1), \dots, f^0(k-1)$ だけから計算されることが(2.8)式から容易にわかる。

上に定義した h 、 g および F を利用すると、(3.5)

式がつぎのように表わされる。

$$x^0(k) + g(x, k, n, 1)a = g(u, k, n, n-m)b + \rho^0(k) \quad (3.7)$$

(3.7)式に(3.6)式を代入して $x^0(k)$ について解くと、

$$\begin{aligned} x^0(k) &= [g(u, k, n, n-m)b \\ &\quad - 2a^T F(x, k-1, n, 1)h(n, 1) \\ &\quad + \rho^0(k)] / (1 + a^T h(n, 1)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

が得られるので、入力 $u(k)$ が既知ならば、(3.8)式を用いて逐次的に出力 $x^0(k)$ を求めることができる。サンプリング間隔 $T/N \rightarrow 0$ のとき、解 $x^0(k)$ が真値に収束することについては文献^{5), 6)}を参照されたい。

3.2.2 無限時間の場合

離散系モデル(3.5)式において、入出力信号 $u(t)$ と $x(t)$ の多重積分 $I_j u(t)$ と $I_j y(t)$ ($j=1, 2, \dots, n$) の時刻 $t=kT$ での近似として BPF 展開係数 $u^j(k)$ と $y^j(k)$ ($j=1, 2, \dots, n$) が用いられている。 t が有限の場合には問題が生じないが、 $t \rightarrow \infty$ のとき、たとえ、 $u(t)$ が

$$|u(t)| < M_0, \quad 0 \leq t < \infty \quad (3.9)$$

のような関数であっても $I_1 u(t)$ が非有界になる可能性があり、また、 $u(t)$ が

$$\left| \int_0^t u(t) dt \right| < M_1, \quad 0 \leq t < \infty \quad (3.10)$$

のような関数であっても $I_j u(t)$ ($j=2, 3, \dots$) が非有界になる(付録B参照)。さらに、初期値が零でない場合には初期値による項 $\rho^0(k)$ は $t^r/r!$ ($r=1, 2, \dots$) から計算されるので、 $t \rightarrow \infty$ のときこの項も非有界になる。ゆえに、高次微分方程式に対しては3.2.1に述べた手法をそのまま使うことができない。このような多重積分の非有界性問題が WF による手法や BPF による手法などのような積分変換による手法全般にいえる問題である。

上に述べた問題を解決するためにはつぎの手法が有効である。

(1) 2次以下のシステムの場合

まず、安定な2次システム

$$(p^2 + a_1 p + a_0)x(t) = (b_1 p + b_0)u(t) \quad (3.11)$$

について考えることにする。(3.11)式に対して BPF 手法を適用すると

$$\begin{aligned} x^0(k) + a_1 x^1(k) + a_0 x^2(k) \\ = b_1 u^1(k) + b_0 u^2(k) + s^0 + s_1 k h \end{aligned} \quad (3.12)$$

が得られるが、 $t \rightarrow \infty$ のとき $x^2(k)$ 、 $u^2(k)$ 、 $s_1 k h$ などの項が非有界になるので、(3.8)式を用いて $x^0(k)$ を求めることができない。しかし、

$$\Delta f^i(k) \triangleq f^i(k) - f^i(k-1), \quad (i=0, 1, 2)$$

と定義すると(3.10)式を満足する入力に対して $\Delta u^1(k)$

と $\Delta u^2(k)$ も有界であるので (付録B参照), $\Delta x^0(k)$, $\Delta x^1(k)$, $\Delta x^2(k)$ も有界である. 上の定義を利用して (3.12)式から

$$\begin{aligned}\Delta x^0(k) + a_1 \Delta x^1(k) + a_0 \Delta x^2(k) \\ = b_1 \Delta u^1(k) + b_0 \Delta u^2(k) + s_1 h\end{aligned}\quad (3.13)$$

が得られるので, $\Delta x^0(k)$ をつぎのように求めることができる,

$$\begin{aligned}\Delta x^0(k) = [g(\Delta u, k, 2, 1)b - 2a^T F(\Delta x, k-1, 2, 1) \\ h(2, 1) + s_1 h] / (1 + a^T h(2, 1))\end{aligned}\quad (3.14)$$

また, この場合 $x^0(k)$ は

$$x^0(k) = x^0(0) + \sum_{i=1}^k \Delta x^0(i) \quad (3.15)$$

によって求められる.

一方, (3.9)式しか満足していない入力の場合には, $\Delta u^2(k)$ が非有界になるので (3.14)式で $\Delta x^0(k)$ を求めることができないが, その場合, 上に述べた手法をつぎのように拡張すればよい.

$$\Delta^2 f^i(k) \triangleq \Delta f^i(k) - \Delta f^i(k-1), \quad i=0, 1, 2$$

と定義すると, (3.13)式から

$$\begin{aligned}\Delta^2 x^0(k) + a_1 \Delta^2 x^1(k) + a_0 \Delta^2 x^2(k) \\ = b_1 \Delta^2 u^1(k) + b_0 \Delta^2 u^2(k)\end{aligned}\quad (3.16)$$

が得られる. (3.9)式しか満足していない入力の場合でも $\Delta^2 u^1(k)$, $\Delta^2 u^2(k)$, $\Delta^2 x^0(k)$, $\Delta^2 x^1(k)$, $\Delta^2 x^2(k)$ などが有界であるので (付録C参照), $\Delta^2 x^0(k)$ を次式で求めることができる.

$$\begin{aligned}\Delta^2 x^0(k) = [g(\Delta^2 u, k, 2, 1)b - 2a^T F(\Delta^2 x, k-1, 2, 1) \\ h(2, 1)] / (1 + a^T h(2, 1))\end{aligned}\quad (3.17)$$

この場合, $\Delta x^0(k)$ が

$$\Delta x^0(k) = \Delta^2 x^0(0) + \sum_{i=1}^k \Delta^2 x^0(i) \quad (3.18)$$

によって求められ, また, $x^0(k)$ は (3.15)式によって求められる.

特に, 安定な1次システム

$$(p + a_0)x(t) = b_0 u(t) \quad (3.19)$$

の場合, 積分操作が1回しか行われないので, (3.9)式しか満足しない入力に対しても $\Delta u^1(k)$, $\Delta x^0(k)$, $\Delta x^1(k)$ が有界である. この場合, $\Delta x^0(k)$ がつぎのような式で与えられる.

$$\begin{aligned}\Delta x^0(k) = [g(\Delta u, k, 1, 1)b - 2a^T F(\Delta x, k-1, 1, 1) \\ h(1, 1)] / (1 + a^T h(1, 1))\end{aligned}\quad (3.20)$$

(2) n 次システムの場合

一般の n 次の安定なシステムについては, $B(p)/A(p)$ はつぎのように因数分解することができる.

$$\frac{B(p)}{A(p)} = \frac{B_1(p)}{A_1(p)} \cdots \frac{B_l(p)}{A_l(p)} \quad (3.21)$$

ただし, ここで, $B_i(p)/A_i(p)$ ($i=1, 2, \dots, l$) はそれぞれ

れ2次以下の安定なシステムである. このような因数分解を用いて中間変数を

$$\begin{aligned}\xi_1(t) = \frac{B_1(p)}{A_1(p)} u(t), \quad \xi_2(t) = \frac{B_2(p)}{A_2(p)} \xi_1(t), \dots, \\ y(t) = \xi_l(t) = \frac{B_l(p)}{A_l(p)} \xi_{l-1}(t),\end{aligned}\quad (3.23)$$

のように導入すると, $y(t)$ を求める問題を中間変数 $\xi_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, l$) を求める問題に置き換えることができる. また, ここですべての中間変数は安定な1次または2次のシステムの出力であるので, 上述した手法を用いてすべての k に対して順次的に $\Delta \xi_1(k)$, $\Delta \xi_2(k), \dots, \Delta y^0(k)$ を求めることができ, (3.15)式から $y^0(k)$ を求めることができる.

3.3 BPF 変換と z -変換との関係

BPF 展開係数を (2.8)式で近似的に求める場合,

$$f^i(k) = f^i(k-1) + h[f^{i-1}(k) + f^{i-1}(k-1)] \quad (2. b)$$

は

$$f^i(k) = hSf^{i-1}(k), \quad S = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

と表わすことができる. すなわち, BPF を用いて連続系から離散系に変換する操作は積分操作を双1次変換で置き換えることによって連続系から離散系に変換するのと同じである. また, 入出力および初期値の高次積分値が非有界にならないために導入した差分操作は $(1-z^{-1})$ の因子を得られた離散系の両辺にかけると同様である. このため, 安定な連続系は安定な離散系に変換され, BPF 変換によって得られた離散系はもとの連続系と同じ安定性をもっている.

4. MRACS 問題への適用

第3章で BPF を用いて1入出力連続系の逐次解法について説明したが, この章では第3章で述べた手法を MRACS 問題に適用して, オンラインで実行可能な制御アルゴリズムを導出するときの基本的な考え方を示す.

プラントのダイナミクスを

$$\begin{aligned}A(p)x(t) &= B(p)u(t) \\ A(p) &= p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0 \\ B(p) &= b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_0, \quad m < n\end{aligned}\quad (4.1)$$

モデルのダイナミクスを

$$\begin{aligned}A_m(p)x_m(t) &= B_m(p)u_m(t) \\ A_m(p) &= p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_0 \\ B_m(p) &= \beta_q p^q + \beta_{q-1}p^{q-1} + \dots + \beta_0, \quad q \leq m\end{aligned}\quad (4.2)$$

とすると、入出力しか観測できない場合の1入出力連続系の MRACS の設計手法はつぎのステップによって行うことができる^{11)~13)}。

(1) 安定な多項式

$$T(p) = (p + t_1) \cdots (p + t_j), \quad S(p) = (p + s_1) \cdots (p + s_j) \quad (j \geq n - m - 1) \quad (4.3)$$

$$D(p) = (p + d_1) \cdots (p + d_{n-1}) \quad (4.4)$$

を選ぶ。ただし、ここで $S(p)D(p)/T(p)A_m(p)$ が強正実となるように $S(p)$ と $D(p)$ を選ぶ。簡単のために、

$$S(p)D(p)/T(p)A_m(p) = \frac{1}{p + \lambda}, \quad \lambda > 0 \text{ となるように } S(p)$$

と $D(p)$ を選ぶのが普通である。

(2) $D(p)$ を用いて信号

$$\zeta_i(t) = p^{i-1}y(t)/D(p) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\zeta_{i+n}(t) = p^{i-1}u(t)/D(p) \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

$$\zeta_{2n}(t) = T(p)B_m(p)u_m(t)/D(p) \quad (4.5)$$

を発生する。

(3) $S(p)$ を用いて信号

$$v_i(t) = \zeta_i(t)/S(p), \quad (i=1, 2, \dots, 2n) \quad (4.6)$$

を発生する。

(4) 信 号

$$r(t) = u_m(t)/S(p)$$

$$w(t) = \theta^T(t)v(t) \quad (4.7)$$

$$\eta(t) = b(t)w(t)$$

$$e_1(t) = S(p)D(p)\eta(t)/T(p)A_m(p) = \eta(t)/(p + \lambda) \quad (\lambda > 0) \quad (4.8)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - y_m(t) - e_1(t)$$

を発生する。

ここで、

$$v(t) \triangleq [v_1(t), v_2(t), \dots, v_{2n}(t)]^T$$

であり、

$$\theta^T(t) \triangleq [\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_{2n}(t)]$$

は調整すべきパラメータである。

(5) パラメータ調整則

$$b(t) = \gamma_0 \int_0^t w(t)\varepsilon(t)dt + \gamma'_0 w(t)\varepsilon(t)$$

$$\theta_i(t) = \gamma_i \int_0^t v_i(t)\varepsilon(t)dt + \gamma'_i v_i(t)\varepsilon(t)$$

$$(i=1, 2, \dots, 2n)$$

$$\gamma_i > 0, \gamma'_i \geq 0 \quad (i=0, 1, \dots, 2n) \quad (4.9)$$

によってパラメータ $b(t)$ と $\theta(t)$ を調整する。

(6) 制御入力

$$u(t) = -\theta^T(t)S(p)v(t) \quad (4.10)$$

を合成する。

このシステムのブロック線図を **Fig. 1** に示している。

上に述べた設計手順からわかるように、1入出力連続系 MRACS の設計問題は設計ステップ2~6における各連続信号を発生する制御メカニズムの設計問題に帰着される。しかし、これらの信号はそれぞれ安定なシステムの出力あるいは代数方程式によって与えられるので、第3章で述べた手法を用いてこれらの信号

Fig. 1 Block diagram of MRAC system

を逐次アルゴリズムによって発生することができる。
また、これらの信号発生アルゴリズムはオンライン制御アルゴリズムとして用いることができる。

制御アルゴリズムの導出はつぎに示すステップに従って行う。

- a) (4.3)式と(4.4)式によって多項式 $T(p)$, $S(p)$ と $D(p)$ を選ぶ。
- b) (4.5)式, (4.6)式, (4.7)式, (4.8)式に基づき第3章で述べた手法を用いて信号 $\zeta_i(k)$, $v_i(k)$ ($i=1, 2, \dots, 2n$), $r(k)$, $w(k)$, $\eta(k)$, $e_1(k)$, $\varepsilon(k)$ などを発生する。
- c) 数値積分手法を用いて(4.9)式における積分値を計算して, パラメータ $b(k)$ と $\theta(k)$ を調整する。
- d) (4.10)式に基づき第3章で述べた手法を用いて制御入力 $u(k)$ を求める。

このように, 制御系におけるすべての信号を逐次アルゴリズムで発生することができるので, これらの逐次アルゴリズムを用いてオンライン制御を行うことが可能である。ここで提案した手法の有効性を確かめるために, つぎの例題で計算機によるシミュレーションを行った。

例題 1 :

プラント

$$(p^2 + 2p + 4)y(t) = u(t), \quad y(0) = 0.3, \quad y'(0) = 0$$

モデル

$$(p^2 + 5p + 6)y_m(t) = u_m(t), \quad y_m(0) = y'_m(0) = 0$$

$$u_m(t) = 2.0 \sin(0.5t) + 0.6 \cos(1.3t),$$

によって与えられるシステムを考える。システムの初期値は一般に未知であるので, 零として取り扱う。また, パラメータ調整則のゲインを共通に $\gamma_i = \gamma'_i = 10.0$, ($i=0, 1, \dots, 2n$) と選び, サンプル間隔を $T/N=0.1$ と選ぶ。また, 簡単のために, 数値積分法則としては台形法則を使うことにする。

Fig. 2 は 3.2.1 に述べた手法を用いたときのシミュレーション結果であり, **Fig. 3** は 3.2.2 に述べた手法を用いたときのシミュレーション結果である。シミュレーション結果からここで提案した手法がかなり有効であることがわかる。ここで, $T/N=0.1$ の場合のシミュレーション結果しか示していないが, サンプル間隔を $T/N=0.005 \sim 0.2$ の範囲内にとれば, プラントのモデルに対する追従特性および制御アルゴリズムにおけるパラメータの収束性に大きな変化が見られないことが確認されている。

Fig. 2 と **Fig. 3** のシミュレーション結果だけから見ると両者はまったく同じであるが, **Fig. 4** に示し

Fig. 2 Simulation result of Example 1 using the method described in 3.2.1

Fig. 3 Simulation result of Example 1 using the method described in 3.2.2

(a)

(b)

Fig. 4 Comparison of $y^2(k)$ and $4y^2(k)$

た $y^2(k)$ と $4y^2(k)$ の変化からもわかるように, $t=100$ s のとき $y^2(k)$ が 120 まで増大するに対して, $4y^2(k)$ の変動は $-0.05 \sim 0.25$ の範囲内に留まっている。このため, 3.2.1 の手法では $y^2(k)$ などの項は時間の増大につれ計算機の処理範囲を越えてしまう可能性があるのに対して, 3.2.2 に示した差を取る手法は

無限時間の場合でも用いることができる。また、実際に制御を行う場合、プラントの出力がモデルの出力より1サンプル遅れるので連続系に近い制御系を得るためには制御精度の要求に応じて、サンプリング間隔を適当に小さく取る必要がある。

BPF 手法を用いて導出した離散モデルはもとの連続系と同じ安定性をもっている。適応制御システムにおいて、連続系の適応制御則を離散化して得られた制御アルゴリズムを用いるときでも、システム入力からモデル追従誤差への伝達関数はもとの連続系制御則を用いるときと同様に安定になる。したがって、離散系適応制御システムの場合と同じように、サンプリングによる近似誤差の影響でパラメータ推定値は真値に収束することが保証されないが、プラント出力は漸近的にモデル出力に収束する性質をもっている。また、ここで提案した手法はサンプリング間隔を自由に取れる特徴をもっているが、BPF による手法は連続関数を折線で近似するによって連続系から離散系を導出する手法であるので、サンプリング間隔 h の取りうる範囲には許容される上限があり、制御アルゴリズムの実行に際しては、このようなことも考えてサンプリング間隔を選択しなければならない。

6. む す び

本論文では、BPFを用いて1入出力連続系MRACSからオンライン制御アルゴリズムを導出する手法について検討した。BPFを用いて1入出力連続系の出力を計算機によって逐次的に求めることができるので、この考え方を連続MRACSの制御則に適用してオンライン制御アルゴリズムを導出した。ここで提案した手法はもとの連続系のパラメータをそのまま使っており、サンプリング間隔の選択も制御アルゴリズムにおける未知パラメータに影響しないので、制御精度の要求に応じてサンプリング間隔を選択すればよく、従来の離散系制御設計におけるサンプリング間隔の変更による設計の繰返しを避けることができる。さらに、サンプリング間隔を十分小さく取れば連続時間系に近い制御が得られる。

参 考 文 献

- 1) 相良, 江口, 和田: 連続システムの離散モデルの同定におけるサンプリング周期の下限の選定, 計測自動制御学会論文集, **21**-1, 13/19 (1985)
- 2) G. P. Rao: Improved Algorithm for Parameter Identification in Continuous Systems via Walsh Functions, IEE Proc., **130**, 9/16 (1983)
- 3) G. P. Rao: Piecewise Constant Orthogonal Functions and Their Applications to Systems and Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences

- (1983)
- 4) N. K. Sinha and Q. J. Zhou: State Estimation Using Block-Pulse Functions, Int. J. System Sci., **15**-4, 341/350 (1984)
- 5) W. L. Chen and C. L. Lee: On the Convergence of the Block Pulse Series Solution of a Linear Time-Invariant System, Int. J. Systems Sci., **13**-5, 491/498 (1982)
- 6) W. L. Chen, C. H. Hsu: Convergence of the Block-Pulse Series Solution of a Linear Time-Varying System, Int. J. Systems Sci., **15**-4, 351/360 (1984)
- 7) S. Kawaji: Block-Pulse Series Analysis of Linear Systems Incorporating Observers, Int. J. Control, **37**-5, 1113/1120 (1983)
- 8) 汐月, 川路, 田中: ブロックパルス関数を用いたモデルの低次元化手法, 計測自動制御学会論文集, **21**-10, 1029/1035 (1985)
- 9) C. F. Chen and C. H. Hiao: Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control via Walsh Functions, IEEE Trans. Automatic Control, **AC**-20-5, 596/603 (1975)
- 10) N. S. Hsu and B. Cheng: Analysis and Optimal Control of Time-Varying Linear Systems via Block-Pulse Functions, Int. J. Control, **33**-6, 1107/1122 (1981)
- 11) 相良, 原, 和田: ブロック・パルス関数を用いた連続システムパラメータの一致推定, 計測自動制御学会論文集, **23**-5, 455/461 (1987)
- 12) B. Egardt: Unification of some Continuous-Time Adaptive Control Schemes, IEEE Trans. Automatic Control, **AC**-24-4, 588/592 (1979)
- 13) 市川, 金井, 鈴木, 田村: 適応制御, 昭晃堂 (1984)
- 14) 金井喜美雄: 制御システム設計, 横書店 (1982)

《付 録》

A (3.6)式の導出

(2.8a)式から,

$$\begin{aligned} f^j(k) &= 2hf^{\frac{j-1}{2}}(k-1) + hf^{\frac{j-1}{2}}(k) = \dots \\ &= 2[f^{\frac{j-1}{2}}(k-1), \dots, f^{\frac{j-1}{2}}(k-1)]h(j, 1) \\ &\quad + h^j f^0(k) \\ &= 2[0, \dots, f^{\frac{j-1}{2}}(k-1), \dots, f^{\frac{j-1}{2}}(k-1)]h(n, 1) \\ &\quad + h^j f^0(k) \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

と書けるので,

$$\begin{aligned} g^T(f, k, n, n-m) &= [f^n(k), f^{n-1}(k), \dots, f^{n-m}(k)] \\ &= 2 \begin{bmatrix} f^{\frac{n}{2}}(k) & f^{\frac{n-1}{2}}(k) & \dots & f^{\frac{n-m}{2}}(k) & \dots & f^{\frac{n-1}{2}}(k) \\ 0 & f^{\frac{n-1}{2}}(k) & \dots & f^{\frac{n-m-1}{2}}(k) & \dots & f^{\frac{n-2}{2}}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f^{\frac{n-m}{2}}(k) & \dots & f^{\frac{n-m}{2}}(k) \end{bmatrix} h(n, 1) \\ &\quad + [h^n, h^{n-1}, \dots, h^{n-m}]^T f^0(k) \\ &= 2F(f, k-1, n, n-m)h(n, 1) + f^0(k)h(n, n-m) \end{aligned} \quad (3.6)$$

と書くことができる。

B

$$\left| \int_0^t f(t) dt \right| M_1 \quad 0 \leq t < \infty \quad \text{の場合の} \quad f^j(kT) \quad (j=2, 3,$$

…) と $\Delta f^2(k)$ の有界性について

$$A \triangleq \int_0^{t_0} f(t) dt, \quad g(t) \triangleq \int_{t_0}^t f(t) dt \quad (\text{A.1})$$

と定義すると、仮定によって、

$$|I_1 f(t) - A + g(t)| < |g(t)| + \varepsilon \quad (\text{A.2})$$

を満足する $t_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ が存在する.

$$\begin{aligned} |I_j f(t)| &= \left| \int_0^t \cdots \int_0^t f(t) dt' \right| = \left| \int_0^t \cdots \int_0^t (A + g(t)) dt'^{j-1} \right| \\ &> \frac{|A t^{j-1}|}{(j-1)!} - \left| \int_0^t \cdots \int_0^t (|A| - \varepsilon) dt'^{j-1} \right| \\ &= \frac{\varepsilon t^{j-1}}{(j-1)!} \quad 0 \leq t < \infty \end{aligned}$$

であるので、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $I_j f(t)$ ($j=2, 3, \dots$) が非有界である.

一方、定義より、

$$\Delta I_2 f(t) = \int_{(k-1)T}^{kT} \left[\int_0^t f(t) dt \right] dt$$

と書くことができるので、 $\Delta I_2 f(t)$ が有界であることが明らかである。 $\Delta f^i(k)$ が

$$\Delta I_i f(k) \triangleq I_i f(kT) - I_i f((k-1)T) \quad (i=1, 2, \dots)$$

の近似であり、両者が同時に有界または非有界になるため、 $\Delta f^2(k)$ も有界であることが容易にわかる.

また、 $\Delta f^i(kT)$ ($i=0, 1$) が有界であることが明らかである.

C

$|f(t)| < M_0$, $0 \leq t < \infty$ の場合の $\Delta^2 f^2(k)$ の有界性について

定義によって

$$\begin{aligned} \Delta^2 I_2 f(kT) &= \Delta I_2 f(kT) - \Delta I_2 f((k-1)T) \\ &= \int_{(k-1)T}^{kT} \left[\int_0^t f(t) dt \right] dt \\ &\quad - \int_{(k-2)T}^{(k-1)T} \left[\int_0^t f(t) dt \right] dt \end{aligned}$$

と書くことができる。仮定により、

$$\begin{aligned} &\int_{(k-1)T}^{kT} \left[\int_0^t f(t) dt \right] dt - \int_{(k-2)T}^{(k-1)T} \left[\int_0^t f(t) dt \right] dt \\ &< \int_{(k-1)T}^{kT} \left[\int_0^t B dt \right] dt - \int_{(k-2)T}^{(k-1)T} \left[\int_0^t C dt \right] dt \end{aligned}$$

となる有界な実数 B, C が存在するので、

$$\begin{aligned} \Delta^2 I_2 f(kT) &< \int_{(k-1)T}^{kT} \left[\int_0^t B dt \right] dt \\ &\quad - \int_{(k-2)T}^{(k-1)T} \left[\int_0^t C dt \right] dt \\ &= BT - CT \end{aligned}$$

が得られる。すなわち、すべての k に対して $\Delta^2 I_2 f(kT)$ が有界である。 $\Delta^2 f^2(k)$ が $\Delta^2 I_2 f(kT)$ の近似であるので、 $\Delta^2 f^2(k)$ も有界である.

また、 $\Delta^2 f^i(kT)$ ($i=0, 1$) が有界であることが明らかである.