極零相殺に伴うモデリング誤差に対する MRACS のロバスト性†

田 中 幹 也*・鈴 木 隆*

Robustness of MRACS to Modelling Error Arising from
Inexact Pole-Zero Cancellation

Kanya TANAKA* and Takashi SUZUKI*

The model reference adaptive control system (MRACS) is designed based on a reduced-order model of the plant which accompanies various modelling errors. This paper discusses the robustness of a continuous-time MRACS to the modelling error arising from inexact pole-zero cancellation.

Key Words: adaptive control, robustness, modelling error, pole-zero cancellation

1. ま え が き

一般に、モデル規範形適応制御系 (MRACS) の設計は、プラントの低次元化モデルに基づいてなされる。この低次元化モデルは寄生要素の存在を無視したり、あるいは近似的に極零相殺を実施した上で得られるので、このモデルには当然モデリング誤差が存在する。このような低次元化モデルに基づいて設計された MRACS の場合、設計に当たって無視されたモデリング誤差の存在に対する MRACS としてのロバスト性が確保されるか否かがきわめて重要な問題となる^{1)~3)}。本論文では、極零相殺に伴うモデリング誤差を対象として、この種の誤差に対する連続時間形式の MRACS のロバスト性について考察する。

2. 問題の設定と MRACS の構成

適応制御の対象となるプラントとして、つぎのような 1 入力 1 出力の連続時間系を考える。

$$y(t) = \frac{B(s)}{A(s)C(s)} u(t) \quad (1)$$

ただし、

$$A(s) = s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i}, \quad B(s) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i s^{n-1-i}$$

$$C(s) = s^l + \sum_{i=1}^l c_i s^{l-i}, \quad D(s) = s^l + \sum_{i=1}^l d_i s^{l-i}$$

ここに、 $u(t)$ と $y(t)$ はプラントの入力と出力、 $B(s)/A(s)$ はプラントの低次元化モデルの伝達関数、 $D(s)/C(s)$ は近似的な極零相殺を生じる部分の伝達関数を表す。このプラントに関し、つぎの仮定が成り立っているものとする。

- (I) 多項式 $A(s)$ と $B(s)$ は互いに既約。
- (II) 次数 n は既知。
- (III) 係数 a_i, b_i は未知の定数。
- (IV) 次数 l , 係数 c_i, d_i は未知、ただし、 $c_i \simeq d_i$ 。
- (V) 多項式 $B(s), C(s), D(s)$ は漸近安定。

上の仮定 (IV) における $c_i \simeq d_i$ なる条件は極零相殺が近似的に生ずることを意味する。

(1) 式はつぎのように書き改めることができる。

$$A(s)y(t) = B(s)(u(t) + v(t)) \quad (2)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= \mu \frac{A(s)}{C(s)} u(t), \quad \Delta(s) = \sum_{i=1}^l d'_i s^{l-i} \\ \mu d'_i &= d_i - c_i (i=1 \sim l), \quad d'_i = 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(2) 式右辺の $v(t)$ は近似的な極零相殺に伴うモデリング誤差を表す。この $v(t)$ は、 $c_i \simeq d_i$ がいえる場合には当然のことながら微小なものとなる。

また、規範モデルとしてつぎのものを考える。

$$A_M(s)y_M(t) = B_M(s)r(t) \quad (4)$$

ただし、

$$A_M(s) = s^n + \sum_{i=1}^n a_{Mi} s^{n-i}, \quad B_M(s) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{Mi} s^{n-1-i}$$

ここで考える問題は、(2) 式のプラント出力 $y(t)$ が (4) 式の規範モデルの出力 $y_M(t)$ に安定に追従するような MRACS を構成するとともに、MRACS の構成に当たって無視されたモデリング誤差に対する MRACS としてのロバスト性を考察することである。つぎにこのための MRACS の構成法について述べる。まず、漸近安定多項式

$$\left. \begin{aligned} P(s) &= (s + \lambda)F(s), \quad \lambda > 0 \\ F(s) &= s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i s^{n-1-i} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を導入し、(2) 式をつぎのように書き改める。

† 第 30 回自動制御連合講演会で発表 (昭 62・10)

* 防衛大学校 横須賀市走水 1-10-20

* The National Defense Academy, Yokosuka
(Received October 30, 1987)

(Revised January 11, 1988)

$$y(t) = \frac{1}{s+\lambda} \left(\theta^T \xi(t) + \frac{B(s)}{F(s)} v(t) \right) \quad (6)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= [\xi_1(t), \dots, \xi_n(t), \xi_{n+1}(t), \dots, \xi_{2n}(t)]^T \\ \xi_1(t) &= u(t), \quad \xi_i(t) = s^{n-i} F^{-1}(s) u(t); i=2 \sim n \\ \xi_{n+1}(t) &= y(t), \quad \xi_{n+i}(t) = s^{n-i} F^{-1}(s) y(t); \\ &\quad i=2 \sim n \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$\theta = [\theta_1, \dots, \theta_{2n}]^T : \xi(t)$ に対応した未知パラメータ

制御入力合成はモデリング誤差の存在を無視してなされる. すなわち, (6) 式で $v(t) \equiv 0$ とし, $y(t)$ を $y_M(t)$ で, θ を可変パラメータ $\hat{\theta}(t) (\triangleq [\hat{\theta}_1(t), \dots, \hat{\theta}_{2n}(t)]^T)$ で置き換えて次式により合成する.

$$\hat{\theta}^T(t) \xi(t) = \hat{y}_M(t) (\triangleq (s+\lambda) y_M(t)) \quad (8)$$

つぎに $\hat{\theta}(t)$ の調整法について述べる. まず, 同定モデルをつぎのように構成する.

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{s+\lambda} (\hat{\theta}^T(t) \xi(t)) \quad (9)$$

このとき, 同定誤差 $\varepsilon(t)$ を $\varepsilon(t) \triangleq y(t) - \hat{y}(t)$ と定義すれば, (6), (9) 式より

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{s+\lambda} \left(\phi^T(t) \xi(t) + \frac{B(s)}{F(s)} v(t) \right) \quad (10)$$

ただし, $\phi(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$.

(10) 式より, $\hat{\theta}(t)$ はつぎの適応則により調整する.

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \hat{\theta}_I(t) + \hat{\theta}_P(t), \quad (\phi(t) = \phi_I(t) + \phi_P(t)) \quad (11a)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_I(t) = -\sigma \hat{\theta}_I(t) + \Gamma \xi(t) \varepsilon(t),$$

$$(\dot{\phi}_I(t) = -\sigma \phi_I(t) - \Gamma \xi(t) \varepsilon(t) + \sigma \theta) \quad (11b)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_P(t) = \Delta \xi(t) \varepsilon(t), \quad (\dot{\phi}_P(t) = -\Delta \xi(t) \varepsilon(t)) \quad (11c)$$

3. ロバスト性の検討

まず, (1), (3), (10), (11) 式より

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= -(\lambda + \xi^T(t) \Delta \xi(t)) \varepsilon(t) + \phi_I^T(t) \xi(t) \\ &\quad + \mu \frac{A(s) \Delta(s)}{F(s) D(s)} y(t) \end{aligned} \quad (12)$$

この場合, プラント・規範モデル間の出力誤差 $e(t) (\triangleq y(t) - y_M(t))$ と $\varepsilon(t)$ の間には, (6), (8) 式および (10) 式より $e(t) = \varepsilon(t)$ なる関係が成り立っている. この関係を (12) 式に用いると,

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= -(\lambda + \xi^T(t) \Delta \xi(t)) \varepsilon(t) + \phi_I^T(t) \xi(t) \\ &\quad + \mu z(t) + \mu w_M(t) \end{aligned} \quad (13)$$

ただし,

$$z(t) = \frac{A(s) \Delta(s)}{F(s) D(s)} \varepsilon(t), \quad w_M(t) = \frac{A(s) \Delta(s)}{F(s) D(s)} y_M(t) \quad (14)$$

上の $z(t)$ は, 状態方程式の形で

$$\dot{y}(t) = A y(t) + b \varepsilon(t) \quad (15)$$

$$z(t) = c^T y(t) + \varepsilon(t) \quad (16)$$

(16) 式の関係 (13) 式に用いて

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= -(\lambda + \xi^T(t) \Delta \xi(t)) \varepsilon(t) + \phi_I^T(t) \xi(t) \\ &\quad + \mu c^T y(t) + \mu \varepsilon(t) + \mu w_M(t) \end{aligned} \quad (17)$$

一方, (15) 式の A は漸近安定なので, 次式を満足するような $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ が存在する.

$$A^T P + P A = -Q \quad (18)$$

ここで, つぎのような正定 2 次関数を考える.

$$V(t) = \frac{1}{2} (\varepsilon^2(t) + \phi_I^T(t) \Gamma^{-1} \phi_I(t) + \eta^T(t) P \eta(t)) \quad (19)$$

$\dot{V}(t)$ は, (11), (15), (17), (18) 式の関係を用いると,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -(\lambda + \xi^T(t) \Delta \xi(t)) \varepsilon^2(t) + \mu c^T y(t) \varepsilon(t) \\ &\quad + \mu \varepsilon^2(t) + \mu w_M(t) \varepsilon(t) - \sigma \phi_I^T(t) \Gamma^{-1} \phi_I(t) \\ &\quad + \sigma \phi_I^T(t) \Gamma^{-1} \theta - \frac{1}{2} \eta^T(t) Q \eta(t) \\ &\quad + \eta^T(t) P b \varepsilon(t) \\ &\leq -\left(\lambda - \frac{|\mu| \|c\|}{4} - |\mu| - \frac{K|\mu|}{4} - \frac{\|Pb\|}{4} \right) \\ &\quad \cdot |\varepsilon(t)|^2 - \sigma \gamma_{\min} \left(\|\phi_I(t)\| - \frac{\gamma_{\max}}{27 \gamma_{\min}} \|\theta\| \right)^2 \\ &\quad + \frac{\sigma \gamma_{\max}^2}{47 \gamma_{\min}} \|\theta\|^2 - \left(\frac{1}{2} \rho_{\min} - |\mu| \|c\| \right. \\ &\quad \left. - \|Pb\| \right) \|\eta(t)\|^2 + |\mu| K \end{aligned} \quad (20)$$

ただし,

$|w_M(t)| \leq K < \infty$ (注 1), $\gamma_{\max} : \Gamma^{-1}$ の最大固有値
 $\gamma_{\min}, \rho_{\min}$: それぞれ Γ^{-1}, Q の最小固有値

ここで, 領域 D を

$$\begin{aligned} &\left(\lambda - \frac{|\mu| \|c\|}{4} - |\mu| - \frac{|\mu| K}{4} - \frac{\|Pb\|}{4} \right) |\varepsilon(t)|^2 \\ &\quad + \sigma \gamma_{\min} \left(\|\phi_I(t)\| - \frac{\gamma_{\max}}{27 \gamma_{\min}} \|\theta\| \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \rho_{\min} - |\mu| \|c\| - \|Pb\| \right) \|\eta(t)\|^2 \\ &\leq \frac{\sigma \gamma_{\max}^2}{47 \gamma_{\min}} \|\theta\|^2 + |\mu| K \end{aligned} \quad (21)$$

なる不等式が満足される $\varepsilon(t)$, $\phi_I(t)$, $\eta(t)$ の領域と定義する. このとき,

$$\lambda > \frac{|\mu| \|c\|}{4} + |\mu| + \frac{|\mu| K}{4} + \frac{\|Pb\|}{4} \quad (22)$$

$$\frac{1}{2} \rho_{\min} > |\mu| \|c\| + \|Pb\| \quad (23)$$

なる条件が満足されていれば, (21) 式の領域外では $\dot{V}(t) < 0$ となり, 初期条件 $\varepsilon(0)$, $\phi_I(0)$, $\eta(0)$ のいかんにかかわらず, ある時刻以降, $\varepsilon(t)$, $\phi_I(t)$, $\eta(t)$ は領域 D 内に閉じ込められることになる. これは,

(注 1) K の値は, プラントパラメータの変動範囲についての事前知識から決めることができる.

$\varepsilon(t)$, $\phi_I(t)$, $\eta(t)$ の有界性を意味する. この場合, $\varepsilon(t) = e(t)$ であるので, $e(t)$, したがって, $y(t)$ の有界性がいえ, また, 仮定より多項式 $B(s)$, $D(s)$ は漸近安定であるので入力 $u(t)$ の有界性も保証される. さらに, 多項式 $F(s)$ も漸近安定であるので (7) 式より信号 $\xi(t)$ の有界性もいえ, (11) 式より $\phi(t)$ も有界となる. 以上の結果, 本構成法は, (22), (23) 式の条件が満足されていれば, モデリング誤差の存在下で安定に動作しうることが明らかになった.

4. 例題およびシミュレーション結果

まず, プラントとしてつぎのものを考える.

$$y(t) = \frac{b}{s+a} \frac{s+d}{s+c} u(t) \quad (24)$$

上式は (6) 式に対応してつぎのように変形できる.

$$y(t) = \frac{1}{s+\lambda} (\theta^T \xi(t) + b v(t)) \quad (25)$$

ただし,

$$\theta = [\theta_1, \theta_2]^T = [b, \lambda - a]^T, \quad \xi(t) = [u(t), y(t)]^T$$

$$v(t) = \frac{\mu}{s+c} u(t), \quad \mu = d - c \quad (26)$$

また, 規範モデルとしてはつぎのものを考える.

$$(s+a_M) y_M(t) = b_M r(t) \quad (27)$$

この場合, (14) 式の $z(t)$, $w_M(t)$ は

$$z(t) = \frac{s+a}{s+d} \varepsilon(t), \quad w_M(t) = \frac{s+a}{s+d} y_M(t) \quad (28)$$

上の $z(t)$ は, 状態方程式の形で

$$\dot{\eta}(t) = -d\eta(t) + (a-d)\varepsilon(t) \quad (29)$$

$$z(t) = \eta(t) + \varepsilon(t) \quad (30)$$

(30) 式を (13) 式に用いて

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = & -(\lambda + \xi^T(t) \mathcal{A} \xi(t)) \varepsilon(t) + \phi_I^T(t) \xi(t) \\ & + \mu \eta(t) + \mu \varepsilon(t) + \mu w_M(t) \end{aligned} \quad (31)$$

ここでつぎのような正定関数を考える.

$$V(t) = \frac{1}{2} (\varepsilon^2(t) + \phi_I^T(t) \Gamma^{-1} \phi_I(t) + \eta^2(t)) \quad (32)$$

(11 b), (29), (31) 式を用いると, $\dot{V}(t)$ は

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -(\lambda + \xi^T(t) \mathcal{A} \xi(t)) \varepsilon^2(t) + \mu \eta(t) \varepsilon(t) \\ & + \mu \varepsilon^2(t) + \mu w_M(t) \varepsilon(t) + \sigma \phi_I^T(t) \Gamma^{-1} \theta \\ & - d \eta^2(t) + (a-d) \eta(t) \varepsilon(t) - \sigma \phi_I^T(t) \Gamma^{-1} \phi_I(t) \\ \leq & -\left(\lambda - \frac{5}{4} |\mu| - \frac{K}{4} |\mu| - \frac{|a-d|}{4}\right) |\varepsilon(t)|^2 \\ & - \sigma \gamma_{\min} \left(\|\phi_I(t)\| - \frac{\gamma_{\max}}{2\gamma_{\min}} \|\theta\| \right)^2 + \frac{\sigma \gamma_{\max}^2}{4\gamma_{\min}} \|\theta\|^2 \\ & - (d - |\mu| - |a-d|) |\eta(t)|^2 + |\mu| K \end{aligned} \quad (33)$$

したがって, 前章の議論より

Fig. 1 Simulation results

$$\lambda > \frac{5}{4} |\mu| + \frac{K}{4} |\mu| + \frac{|a-d|}{4} \quad (34)$$

$$d > |\mu| + |a-d| \quad (35)$$

なる条件が満足されていれば $\varepsilon(t)$, $\phi_I(t)$, $\eta(t)$ は有界となり, モデリング誤差の存在下でこの MRACS は安定に動作しうる. ここで, $|y_M(t)| \leq 1$ とすれば, (28) 式より

$$|w_M(t)| \leq K = \frac{|a-d|}{d} + 1 \quad (36)$$

と考えることができる. このとき, 各係数の値として $a=0.2$, $c=0.5$, $\lambda=1.0$

なるものを採用し, (34), (35) 式が満足されるための μ の許容値を計算すると, つぎの結果が得られる.

$$-0.2 < \mu < 0.2 \quad (38)$$

すなわち, (40) 式の μ の値に対して, この MRACS は安定に動作することが保証されることになる.

つぎに, 上の例題に対し (38) 式の条件のもとでシミュレーション実験を行った. 各係数値は (37) 式およびつぎのものを採用した.

$$\Gamma = 20I, \quad \mathcal{A} = 0, \quad a_M = b_M = 1.0, \quad \mu = 0.1 \quad (39)$$

また, 規範入力 $r(t)$ としては振幅 ± 1 , 周期 30 秒の矩形波を用い, 各変数の初期値は $\theta_1(0) = 0.5$ とした以外はすべて 0 とした. Fig. 1 はプラントの出力 $y(t)$ と規範モデルの出力 $y_M(t)$ を対比して示したものである. この図より $y(t)$ は過渡的に若干変動はしているものの $y_M(t)$ に安定に追従しており, 制御目的が達成されていることがわかる.

参考文献

- 1) P. A. Ioannou and P. V. Kokotovic: Robust Redesign of Adaptive Control, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-29-3**, 202/211 (1984)
- 2) R. L. Kosut and C. R. Johnson, Jr.: An Input-Output View of Robustness in Adaptive Control, Automatica, **20-5**, 569/711 (1984)
- 3) G. Kreisselmeier and B. D. O. Anderson: Robust Model Reference Adaptive Control, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-31-2**, 127/133 (1986)