多入出力 2-Delay デジタル制御の提案と応用[†]

——不安定零点問題の回避——

美 多 勉*・千 田 有 一*

2-Delay Digital Feedback Control and Its Applications

—Avoiding the Problems on Unstable Zeros—

Tsutomu MITA* and Yuichi CHIDA*

In the design of digital controller, the existence of unsatble zeros (for example, unstable limiting zeros) makes it difficult to construct many control systems, such as inverse systems, robust controller, model matching system and model following adaptive controller. This paper proposes a new control methods in which two outputs are used which are the output at the frame sampling point and auxiliary output at the time leading to the frame sampling point by mT ($0 < m < 1$), where T is frame sampling period. If such a system description is used, the resulting system is proved to have no invariant zeros, that is, the two set of outputs have no common invariant zeros. When such a system description is used, it is easy to construct stable inverse even though the continuous time plant is non-minimum phase, and unknown input observer is constructed.

The dual description of this system is used to assign invariant zeros and used to design model matching system. Such control strategy is completely new but simple, so many applications are expected.

Key Words: digital control system, limiting zeros, unstable zeros, inverse system, unknown input observer

1. はじめに

デジタル制御系ではサンプル周期を 0 に近づけた場合に単位円外に配置される極限零点(limiting zero)

[†] 第 10 回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (昭 62・12)

* 千葉大学工学部 千葉市弥生町 1-33

* Faculty of Engineering, Chiba University, Chiba
(Received September 19, 1987)
(Revised February 3, 1988)

の存在に^{8),9)}より, 連続制御則をそのまま用いるのが困難なことが多い。しかし, 逆にデジタル制御系ではマイコンの機能を活すことにより, 連続制御では不可能な制御系を実現できることがある。このような制御に 2-periodic 制御²⁾や多重周期制御³⁾があり, 連続時間制御対象が不安定な極-零点配置に関する p. i. p 条件⁷⁾を満たさなくとも, 安定な直列補償器で安定な制御系(強安定制御系)が構成できることが知られている。しかし, たとえば, 2-periodic 制御では, 遮断零点(blocking zero)がなくなることより強安定制御系が組めることはわかるが⁷⁾, 極限零点をもつ不変零点(伝達零点)¹²⁾はなくならない。したがって, 不安定零点が問題となるこの他の制御, たとえば, 逆システム, モデルマッチング, モデル規範型適応制御に関する問題は解決されず, ロバスト制御においても不安定零点の存在は制御効果を悪化させる⁷⁾。

本論文では, まず 2-periodic 制御では不変零点がなくならないことを示す。つぎに, 筆者らが以前提案していたサンプル点間の応答も使った制御⁹⁾をすれば, 以上のような問題が解決されることを述べる。すなわち, 提案している制御方法をさらに 2-delay 出力制御, 2-delay 入力制御に分け, これらを使えば, 不変零点がなくなること示す。また, 前者により安定逆システム, 強安定制御系, 未知入力観測器, 後者により不変零点の設定, モデルマッチングなどが簡単に行えることを示す。

この方法は簡便なわりには以上のようにいろいろな新しい制御ができることがわかり, 実際問題にも広範囲に適応可能であると思われる。

なお, 最近 Lee ら⁴⁾により vibration 法という高周期の時変連続時間制御に基づくデジタル制御系の零点の設定法が提案され, Kabamba ら⁵⁾により連続

な 2 組のホールド関数を決定することにより、モデルマッチングなどができることが示されている。しかし、前者は設計パラメータの決め方が難しく、後者は現実的にはより短い周期の 0 次ホールドでできた離散系と等価となり、実系で論文の主張が活かされるか否か疑問である。

本方法も目的は似ているが、発想はまったく違い、2-delay 制御で得られる二つの変数間に共通零点がないことを基礎にし、制御則として定係数フィードバック制御を用いているところに特徴がある。

2. 基本制御系の記述

以下、制御対象は (A_c, B_c) が可制御、 (C, A_c) が可観測な n 次元の連続時間系

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t), \quad y = Cx(t) \quad (1)$$

とする。記述の簡単化を図るため、系(1)は p 入力 p 出力で、 $\text{rank}(C) = \text{rank}(B_c) = p$ とする。また、以下では系(1)をサンプル周期 T の 0 次ホールドを使って離散化した通常の離散系

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \quad y_i = Cx_i \quad (2a)$$

$$A = e^{A_c T}, \quad B = \int_0^T e^{A_c s} ds B_c \quad (2b)$$

$$x_i = x(iT), \quad y_i = y(iT) \quad (2c)$$

を基本離散系と呼ぶ。基本離散系の不変零点は

$$\begin{vmatrix} A - zI_n & B \\ C & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

を満たす z である。基本離散系についてはつぎのことが知られている。

〔補題 1〕⁶⁾ A_c の固有値を η_i とするとき

$$\eta_i - \eta_k \neq j2\pi l/T \quad (l = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4)$$

ならば、 (A_c, B_c) 、 (C, A_c) がそれぞれ可制御、可観測のとき、 (A, B) は可制御、 (C, A) は可観測であり、さらに、(4)式はほとんどすべての T について成り立つ。

また、基本離散系で適当にサンプル周期 T を選んで

$$|CB| \neq 0 \quad (5)$$

が成り立っているものとする。このときつぎの補題を得る。

〔補題 2〕(5)式を満たす T が一つでも存在すれば、ほとんどすべての $t \in (-\infty, \infty)$ について、次式が成り立つ。

$$\left| C \int_0^t e^{A_c s} ds B_c \right| \neq 0 \quad (6)$$

(証明) $Ce^{A_c s} B_c$ の各要素は $s \in (-\infty, \infty)$ について無限回連続微分可能な関数で、その積分および行列式も同様な関数である。したがって、(6)式が恒等的に 0 となる t の開区間があれば、すべての t について

0 となる。逆に、一つでも (6) 式を 0 としない $t = T$ があれば、(6) 式はほとんどすべての t について 0 とはならず、0 となるのはただか可付番個の t についてである。

また、(5) 式が成り立てばほとんどすべての T についてつぎの補題が成り立つ。

〔補題 3〕

1) 基本離散系(2)は原点に不変零点をもたない、すなわち次式が成り立つ。

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (7)$$

2) 不変零点は $n-p$ 個あり、それは

$$\alpha \triangleq A - B(CB)^{-1}CA \quad (8)$$

の n 個の固有値から p 個の零固有値を除いた非零固有値である。

(証明)

1) $A = e^{A_c T}$ は正則であるから、(7) 式は

$$|CA^{-1}B| = \left| -C \int_0^{-T} e^{A_c s} ds B_c \right| \neq 0 \quad (9)$$

と等価であるが、補題 2 より本式が成り立つ。

2) $|CB| \neq 0$ から

$$\begin{aligned} z^p \begin{vmatrix} A - zI_n & B \\ C & 0 \end{vmatrix} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ C & zI_p \end{bmatrix} \begin{vmatrix} A - zI_n & B \\ C & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A - zI_n & B \\ CA & CB \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n |CB| |zI_n - A + B(CB)^{-1}CA| \\ &= (-1)^n |CB| |zI_n - \alpha| \end{aligned} \quad (10)$$

が成り立ち、しかも 1) から不変零点は 0 ではないので α の $n-p$ 個の非零固有値が不変零点となる。

さて、可付番個の有限和も可付番個なので(4)、(5)、(7)式はほとんどすべての T に対して同時に成り立つ。よって、以下では、つぎの仮定のもとで述べる。

仮定 A) 基本離散系では(4)、(5)、(7)式を満たす T が一つ選んである。

(5) 式を満たす T が存在するための必要十分条件は本論文では得られていないが、つぎの十分条件を得ている。

〔補題 4〕1) 連続系(1)が非干渉可能条件¹²⁾を満たすか、あるいは、2) A_c または $-A_c$ が安定行列で系(1)が原点に零点をもたないならば、(5)式を満たす T が存在する。

(証明) 付録 1 参照。

3. 2-Periodic 制御と不変零点の固定

この制御法は系(2)の入出力を周期的に 2 組の独立

な入出力とみたてする方法である。すなわち、(2a)式を2サンプルおきに記述し、

$$x_{i+2} = A^2 x_i + [AB, B](u_i^T, u_{i+1}^T)^T$$

$$y_i = Cx_i, y_{i+1} = CAx_i + CBu_i$$

と書き、入出力をそれぞれ $U_i = \{u_{2i}^T, u_{2i+1}^T\}^T$, $Y_i = \{y_{2i+1}^T, y_{2i}^T\}^T$ 、状態変数を $X_i = x_{2i} (i \geq 0)$ と定義すると

$$X_{i+1} = A^2 X_i + [AB, B]U_i \quad (11a)$$

$$Y_i = \begin{bmatrix} CA \\ C \end{bmatrix} X_i + \begin{bmatrix} CB, 0 \\ 0, 0 \end{bmatrix} U_i \quad (11b)$$

2p 入出力系として扱え、2-periodic 制御系²⁾と呼ばれている。この系では遮断零点がなくなることが示されているが²⁾、不変零点については以下の命題が成り立つ。

【命題1】 2-periodic 制御系の不変零点は、系(2)の不変零点の2乗となる。

(証明) 入出力数の等しい可逆系では逆系の極が0と不変零点となることに着目し¹²⁾、系(11)の逆系の遷移行列を求める。逆系は

$$\begin{bmatrix} I_p, 0 \\ 0, zI_p \end{bmatrix} Y_i = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \end{bmatrix} X_i + \begin{bmatrix} CB, 0 \\ CAB, CB \end{bmatrix} U_i \\ \triangleq A^* X_i + B^* U_i \quad (12)$$

と $|CB| \neq 0$ より

$$U_i = B^{*-1} [\text{diag}(I_p, zI_p) Y_i - A^* X_i] \quad (13)$$

を(11a)式へ代入したものと(13)式で構成される。よって、逆系の遷移行列は

$$\begin{aligned} A^2 - [AB, B]B^{*-1}A^* \\ = A^2 - AB(CB)^{-1}CA \\ + B(CB)^{-1}CAB(CB)^{-1}CA \\ - B(CB)^{-1}CA^2 \\ = [A - B(CB)^{-1}CA]^2 = \alpha^2 \end{aligned} \quad (14)$$

となり、その固有値は(8)式の α の固有値の2乗となる。よって、系(2)の不変零点を z_i とすれば、2-periodic 制御系の不変零点は z_i^2 となる。■

これから、2-periodic 制御では不安定零点や $T \rightarrow 0$ で $|z_i| > 1$ となる極限零点問題⁹⁾は回避できない。なお、この性質は N-periodic 制御²⁾でも同様である。

この点を改善するため、以下ではまず筆者らが先に提案したサンプル点間の応答を使う制御系¹⁾、および、それに双対な制御系の不変零点について調べてみる。ただし、証明上の都合から

仮定B) 基本離散系の不変零点、すなわち、 α の非零の $n-p$ 個の固有値には重複したものがないか、あるいは、あっても、対応するジョルダンブロックは一つしかない

としておく。この仮定は単入出力系は常に満たされ

る。なぜならば、 (A, B) は可制御なので (α, B) も可制御で、 α は非縮退行列とならなくてはならないからである。

4. 2-Delay 制御と不変零点の除去

4.1 2-Delay 出力制御

ここでは、Fig. 1 のように入力の切換え点をサンプル点と定義し、サンプル点上の出力 y_i 、および、サンプル点から mT : $0 < m < 1$ だけ進んだ点の出力 $z_i \triangleq y(iT + mT)$ とを二つの出力とする p 入力 2p 出力系を考える。この場合、制御系は

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \quad (15a)$$

$$\begin{bmatrix} y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C\hat{A} \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 \\ C\hat{B} \end{bmatrix} u_i \quad (15b)$$

$$\hat{A} \triangleq e^{Ac^{mT}}, \hat{B} \triangleq \int_0^{mT} e^{Ac^s} ds B_c \quad (15c)$$

となる¹⁾。この系の不変零点については以下の定理が成り立つ。

《定理1》 仮定A), B)のもとでは、連続系(1)が原点に不変零点をもたなければ、ほとんどすべての $m(0 < m < 1)$ について、系(15)は不変零点をもたず

$$S(z) = \begin{bmatrix} A - zI_n & B \\ C & 0 \\ C\hat{A} & C\hat{B} \end{bmatrix} \quad (16)$$

において、 $\text{rank } S(z) = n + p (\forall z \in \mathbb{C}, \forall m: a.e.)$ となる。逆に連続系が原点に零点をもてば、すべての m に対して系(15)は $z=1$ に不変零点をもつ。

(注意1) 単入出力系では $u_i - y_i$, $u_i - z_i$ 間のパルス伝達関数に共通零点がないことを意味する。

(証明) 仮定A)の(7)式より、(16)式は $z=0$ のときフルランクであり、 $z=0$ に不変零点はもたない。そこで、 $z \neq 0$ とし、(16)式を等価変換すると

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ C & zI_p & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} S(z) = \begin{bmatrix} A - zI_n & B \\ CA & CB \\ C\hat{A} & C\hat{B} \end{bmatrix} = S'(z) \quad (17)$$

となり、 $S(z)$ がすべての z についてフルランクであることと、 $z \neq 0$ のとき $S'(z)$ がフルランクであることは等しい。 $|CB| \neq 0$ であるので、 $S'(z)$ の第2列ブロックに右側から $-(CB)^{-1}CA$ をかけて第1列ブロックに加え、さらに、第2行と第3行ブロックを入れかえる

Fig. 1 Input/output relation (2-delay output control)

と, $S'(z)$ は

$$\begin{bmatrix} A-B(CB)^{-1}CA-zI_n & B \\ C\hat{A}-C\hat{B}(CB)^{-1}CA & C\hat{B} \\ 0 & CB \end{bmatrix} \quad (18)$$

と変形され, $|CB| \neq 0$ より

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A-B(CB)^{-1}CA-zI_n \\ C\hat{A}-C\hat{B}(CB)^{-1}CA \end{bmatrix} = n \quad (19)$$

が $z \neq 0$ とほとんどすべての m に対して満たされれば定理の証明は終わる. (19) 式は

$$\gamma(m) \triangleq C\hat{A} - C\hat{B}(CB)^{-1}CA, \quad \alpha = A - B(CB)^{-1}CA \quad (20)$$

と定義すると, $z=0$ 以外で $[\gamma(m), \alpha]$ が可観測 (a. e. m) であることに等しい. このための必要十分条件は, 仮定 B) から, α の非零固有値の固有ベクトルを v_k としたとき $\gamma(m)v_k \leq 0$ ($\forall k \leq n-p$, a. e. m) となることである. そこで, 逆にある m の連続区間 $[m_1, m_2]$ で上式が恒等的に零であったとしよう. すると, この区間で少なくとも一つの固有ベクトル $v \triangleq v_k \neq 0$ について恒等的に

$$\gamma(m)v \equiv 0 \quad (21)$$

となる. なぜならば, m は不可付番数であり, k は有限だから, m が変るごとに $\gamma(m)$ と直交する v_k の組合せが変れば, m は可付番数になり矛盾する. つぎに α が一定行列で, v は m に依存しない一定ベクトルなので (21) 式を m で逐次微分すると

$$CA_i T^{i+1} e^{A_c m T} [A_c - B_c(CB)^{-1}CA] v \equiv 0 : i \geq 0 \quad (22)$$

となり, (C, A_c) の可観測性と $|e^{A_c m T}| \neq 0$ より

$$[A_c - B_c(CB)^{-1}CA]v \equiv 0 \quad (23)$$

を得るが, 以下で示すように, 連続系が原点に不変零点をもたなければ

$$A_c - B_c(CB)^{-1}CA \quad (24)$$

は正則であり, $v=0$ となり仮定に反する. すなわち, ほとんどすべての m に対して, $\text{rank } S(z) = n+p$ となる. さて, (24) 式は, $|CB| \neq 0$ より

$$N \triangleq \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C e^{A_c T} & C \int_0^T e^{A_c s} ds B_c \end{bmatrix} \quad (25)$$

とすると, $|N| \neq 0$ と等価であるが, 一般公式

$$e^{A_c t} - A_c \int_0^t e^{A_c s} ds = I_n \quad (26)$$

を使うと

$$\begin{bmatrix} e^{A_c T} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} N \begin{bmatrix} e^{-A_c T} & -e^{-A_c T} \int_0^T e^{A_c s} ds B_c \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

と変形でき, 連続系に原点の零点がなければ N は正則である. 逆に (26) 式を使って整理すると (16) 式で

$$S(1) = \begin{bmatrix} \int_0^T e^{A_c s} ds & 0 \\ 0 & I_p \\ C \int_0^T e^{A_c s} ds & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

と書け, 連続系が原点に零点をもてば, $S(1)$ はフルランクとならず, m によらず不変零点を 1 にもつ. ■

4.2 2-Delay 入力制御

これは単入出力系の適応制御系の構成に関して新ら¹¹⁾によって考察されたものの一般化である. 新らのもを一般化すれば, 出力の観測点をサンプル点と定義し, Fig. 2 のようにサンプル間で入力を 2 度切換え $2p$ 入力 p 出力の系

$$x_{i+1} = A x_i + B_1 v_i + B_2 w_i, \quad y_i = C x_i \quad (29a)$$

$$: B_1 = \int_{mT}^T e^{A_c s} B_c ds, \quad B_2 = \int_0^{mT} e^{A_c s} ds B_c \quad (29b)$$

として定式化するものである. ただし, 前章と記号を合わせるため入力の切換え点を, iT から $(1-m)T$ 進んだ点とした. よって, (2b), (15c) 式との関係は

$$B_1 = B - \hat{B}, \quad B_2 = \hat{B} \quad (29c)$$

となる. この場合にはつぎの定理が成り立つ.

《定理 2》 仮定 A), B) のもとで, ほとんどすべての m に対して系 (29) は不変零点をもたない. すなわち

$$S(z) = \begin{bmatrix} A - zI_n & B_1 & B_2 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

において $\text{rank } S(z) = n+p$ ($\forall z \in C, \forall m$: a. e.) である.

(注意 2) この場合には定理 1 と違って連続系が原点に不変零点をもたないという条件は不要である.

(証明) $S(z)$ の第 2 列ブロックに第 3 列ブロックを加えると (29c) 式から $S(z)$ とランクの等しい

$$S^0(z) = \begin{bmatrix} A - zI_n & B & \hat{B} \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

を得る. 仮定 A) から, $z=0$ は不変零点でないので $S^0(z)$ は, $z \neq 0$ のもとで

$$S^0(z) \begin{bmatrix} I_n & B & 0 \\ 0 & zI_p & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - zI_n & AB & \hat{B} \\ C & CB & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

と等価変換できる. ここで, 右辺第 2 列ブロックに右

Fig. 2 Input/output relation (2-delay input control)

から $-(CB)^{-1}C$ をかけ 1 列ブロックに加え、さらに第 2, 3 列ブロックを入れ換えると、(32)式は

$$\left[\begin{array}{c|c} A-AB(CB)^{-1}C-zI_n & B \\ \hline 0 & CB \end{array} \right] \quad (33)$$

となる。ここで

$$\delta \triangleq A-AB(CB)^{-1}C, \beta(m) \triangleq \hat{B} \quad (34)$$

とおくと、定理 1 同様に $S(z)$ がほとんどすべての m についてフルランクであることは、 $[\delta, \beta(m)]$ がほとんどすべての m について $z=0$ 以外で可制御となることと等価となる。この場合、 $|A| \neq 0$ より、 $A^{-1}\delta A = \alpha$ とおけるので、 δ と α は相似であることがわかる。よって、 δ の固有構造は α と同一である。したがって、定理 1 同様に δ の非零固有値に関する左側固有ベクトルを $u_k(1 \times n) \neq 0$ とすると、 $u_k \beta(m) \neq 0 (\forall k)$ ならば、 $[\delta, \beta(m)]$ は $z=0$ 以外で可制御となる。ここで、逆にこれがすべての m に対して成立しないと仮定すると、 $u_k \beta(m) \equiv 0$ となる k と m の連続区間があるので、本式を逐次微分して

$$u_k T^{i+1} e^{A_c m T} A_c^i B_c \equiv 0 \quad (i \geq 0) \quad (35)$$

を得るが、 (A_c, B_c) が可制御で $|e^{A_c m T}| \neq 0$ なので、 $u_k \neq 0$ に反する。よって、定理が成り立つ。 ■

5. 2-Delay 制御の応用

5.1 2-Delay 出力制御の応用

5.1.1 安定逆系の構成への応用

厳密にプロパーな連続時間系の逆系は微分器が必要なことから実現は不可能であり、厳密にプロパーな離散系では L 回遅れ逆システムが容易に構成できるが、離散化モデルは極限零点のため通常利用されるサンプル周期のオーダーでも非最小位相系になり、 L 回遅れ逆系も現実的には使えない。この場合 2-Delay 出力制御に着目すれば、離散化モデルの零点の位置によらず常に安定で極指定可能な逆系が構成できる。ここでは、(15)式で u_i を未知入力と仮定し、 y_i, z_i から u_i を推定する逆系を考える。

このため、(15 a)式を

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= Ax_i + Bu_i \\ &= (A-KC)x_i + Ky_i + Bu_i \end{aligned} \quad (36)$$

と記述しておく。また、補題 2 から仮定 A) のもとでは、 T を固定して m を可変にすると考えれば、ほとんどすべての m に対して

$$|CB| \neq 0 \quad (37)$$

ともなる。以下では(37)式をいちいち注意せず使う。

よって、(15 b)式より次式を得る。

$$u_i = (CB)^{-1}z_i - (CB)^{-1}CA\hat{x}_i \quad (38)$$

そこで、 $\hat{u}_i$ を u_i の推定値とし、あらためて

$$\hat{u}_i = (CB)^{-1}z_i - (CB)^{-1}CA\hat{x}_i \quad (39 a)$$

とし、これを(36)式へ代入して x_i の推定式として

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1} &= [A-B(CB)^{-1}CA-KC]\hat{x}_i \\ &\quad + Ky_i + B(CB)^{-1}z_i \end{aligned} \quad (39 b)$$

を得る。ここで、 x_i と u_i の推定誤差を $e_i = \hat{x}_i - x_i$ 、 $\xi_i = \hat{u}_i - u_i$ とおくと、(36)、(38)、(39)式より

$$\xi_i = -(CB)^{-1}CAe_i \quad (40 a)$$

$$e_{i+1} = [A-B(CB)^{-1}CA-KC]e_i \quad (40 b)$$

を得る。ここで定理 1 からつぎの系が成り立つ。

〈系 1〉 系(1)が原点に不變零点をもたないことと、 $\{C, A-B(CB)^{-1}CA\}$ がほとんどすべての m に対して可観測であることは等価である。

〔証明〕 (16)式の $S(z)$ は

$$\begin{aligned} S(z) &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -(CB)^{-1}CA & I_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A-B(CB)^{-1}CA-zI_n & B \\ C & 0 \\ 0 & CB \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

と等価変換でき、 $S(z)$ がフルランクであることと系 1 の行列対が可観測であることは等価となる。 ■

系 1 の条件下では、系(39)の遷移行列の固有値は K によって任意に設定できるので、系(39)は系(15)の安定逆系となる。この逆系では、たとえ連続系が非最小位相の場合でも原点に零点をもたなければ安定に入力が推定でき、従来の理論では考えられなかったものである。この逆系の応用と応答波形の改善については文献 14)などを参照にされたい。

5.1.2 未知入力観測器の構成とロバスト性回復

つぎに系 1 を使うと未知入力観測器が構成可能なことを示す。これについては川路¹⁰⁾が線形化機械系について述べているが、ここではこれを一般化する。

そのため、系(15)に対して

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1} &= (A-K_1C-K_2CA)\hat{x}_i \\ &\quad + K_1y_i + K_2z_i \end{aligned} \quad (42)$$

なる未知入力観測器を構成すると、推定誤差 $e_i = \hat{x}_i - x_i$ は、 $K_2 = B(CB)^{-1}$ と選んだとき

$$e_{i+1} = [A-K_1C-B(CB)^{-1}CA]e_i \quad (43)$$

を満たすことが計算の結果わかる。

系 1 の条件下では、 $\{C, A-B(CB)^{-1}CA\}$ は可観測なので、この観測器は K_1 を選んで安定化できる。

ここで、サンプル点上の状態変数 x_i のみを使ったデジタル最適状態フィードバック制御系において、最適ゲインを F とすると、入力側の帰還差行列は

$$R(z) = I_p + F(zI_n - A)^{-1}B \quad (44)$$

の形式となるが、状態が未知のときにも y_i, z_i を使った上記未知入力観測器を用いると、同じ帰還差を得

る¹⁵⁾。よって、デジタル制御系では制御対象が最小位相系か否かにかかわらず、最適系までのロバストネスの回復ができる。ただし、デジタル最適系の円条件は連続系より劣っており、単位円上の z について、 $1 > |R(z)|$ とする z が必ず存在し、連続時間系の円条件に対応する条件 $[|g(R(z))| \geq 1]$ は満たされないの
で注意したい¹⁶⁾。

5.1.3 強安定制御

これはすでに文献1)で単入出力系と線形化機械系について述べたが、ここでは系(1)に対して定式化しておく。そこで $u_0 \sim u_{n-1}$ を任意な初期値と考え、 $i \geq 0$ で実施できる出力フィードバック制御則

$$u_{i+n} = -H_1 y_i - P_1 z_i - H_2 y_{i+1} - P_2 z_{i+1} \cdots - H_n y_{i+n-1} - P_n z_{i+n-1} \quad (45)$$

を導入する。本式は文献1)の(16)式であらかじめ $q_i = 0$ とし、さらにスカラー係数を $p \times p$ の正方行列に書き直したものである。後は同文献とまったく同様に展開でき、係数行列 H_i 、 P_i は次式から逆算される(唯一ではない)。

$$(H_1, \dots, H_n, P_1, \dots, P_n)M = (\alpha, \theta_1, \dots, \theta_n) \quad (46)$$

ただし

$$M = \begin{bmatrix} C & 0 & & & 0 \\ CA & CB & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1} & CA^{n-2}B & \cdots & CAB & CB & 0 \\ C\hat{A} & C\hat{B} & 0 & & 0 \\ C\hat{A}A & C\hat{A}B & C\hat{B} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\hat{A}A^{n-1} & C\hat{A}A^{n-2}B & C\hat{A}A^{n-3}B & \cdots & C\hat{A}B & C\hat{B} \end{bmatrix} \quad (47)$$

ここで、 $\alpha, \theta_1 \sim \theta_n$ は(15)、(45)式の閉ループ系を安定かつ最適に制御する係数行列で文献1)の(21)式から求められる。したがって、 $2np \times n(p+1)$ 次元の行列 M が列フルランクであれば、動的要素を用いない安定な出力フィードバック制御(45)式で閉ループ系が安定化でき、強安定制御が可能となる。 M のランクに関してつぎの系を得る。

〈系2〉 系(1)が原点に不変零点をもたないことと、ほとんどすべての m について M が列フルランクであることは等価である。

(証明) 付録2参照。

5.2 2-Delay 入力制御の応用

5.2.1 不変零点の設定

ここでは、まず不変零点の設定に2-delay入力制御を使ってみよう。問題は、系(29a)、(29c)に対して

$$v_i = -F x_i, \quad w_i = r_i \quad (48a)$$

のフィードバック制御によってできた閉ループ系

$$x_{i+1} = [A - (B - \hat{B})F]x_i + \hat{B}r_i, \quad y_i = Cx_i \quad (48b)$$

の $r_i - y_i$ 間のパルス伝達関数行列の不変零点を $n-p$ 個の任意の値に設定することである。ここで

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} A - (B - \hat{B})F - zI_n & \hat{B} \\ C & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A - BF - zI_n & \hat{B} \\ C & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ F & I_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A - BF - zI_n & \hat{B} \\ C & 0 \end{vmatrix} \quad (49a) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} & z^p \begin{vmatrix} A - BF - zI_n & \hat{B} \\ C & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ C & zI_p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A - BF - zI_n & \hat{B} \\ C & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A - BF - zI_n & \hat{B} \\ C(A - BF) & C\hat{B} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n |C\hat{B}| \cdot |zI_n - A + BF \\ &\quad + \hat{B}(C\hat{B})^{-1}C(A - BF)| \\ &= (-1)^n |C\hat{B}| \cdot |zI_n - A + \hat{B}(C\hat{B})^{-1}CA \\ &\quad + [I_n - \hat{B}(C\hat{B})^{-1}C]BF| \quad (49b) \end{aligned}$$

の関係式を使うと、系(48b)の不変零点は

$$A - \hat{B}(C\hat{B})^{-1}CA - [I_n - \hat{B}(C\hat{B})^{-1}C]BF \quad (50)$$

の非零の $n-p$ 個の固有値となり、つぎの系が成り立つ。

〈系3〉 仮定A)、B)の条件下で、 $\{A - \hat{B}(C\hat{B})^{-1}CA, [I_n - \hat{B}(C\hat{B})^{-1}C]B\}$ は、ほとんどすべての $0 < m < 1$ について、 $z=0$ 以外で可制御、すなわち次式が成り立つ。

$$\text{rank} \{zI_n - A + \hat{B}(C\hat{B})^{-1}CA, [I_n - \hat{B}(C\hat{B})^{-1}C]B\} = n \quad (51)$$

(証明) 定理2において、すべての z についてフルランクな $S^0(z)$ は、 $z \neq 0$ のとき

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ C & zI_p \end{bmatrix} S^0(z) = \begin{bmatrix} A - zI & B & \hat{B} \\ CA & CB & C\hat{B} \end{bmatrix} = S'(z) \quad (52)$$

と等価変換でき、 $S'(z)$ は $z=0$ のときのみフルランクでない。ここで、 $S'(z)$ の第3列ブロックに右から $-(C\hat{B})^{-1}CA$ 、 $-(C\hat{B})^{-1}CB$ をかけて、それぞれ、第1列ブロックと第2列ブロックに加えると

$$\begin{bmatrix} A - \hat{B}(C\hat{B})^{-1}CA - zI_n & B - \hat{B}(C\hat{B})^{-1}CB & \hat{B} \\ 0 & 0 & C\hat{B} \end{bmatrix} \quad (53)$$

となり、 $|C\hat{B}| \neq 0$ より $z \neq 0$ のとき(51)式が成り立つ。

よって、(50)式の F により $r_i - y_i$ 間のパルス伝達関数行列の $n-p$ 個の不変零点は任意に設定できる。

5.2.2 モデルマッチング

ここでは、 r_i - y_i 間のパルス伝達関数行列の n - p 個の不変零点と n 個の極を任意に設定し、定常ゲイン行列を指定することをモデルマッチングと定義し、そのような制御系を、 $|Q| \neq 0$ の

$$v_i = -F x_i, \quad w_i = -K x_i + Q r_i \quad (54)$$

によって設計することを考える。前項同様に上式のフィードバック制御を行うと閉ループ系は

$$x_{i+1} = (A - BF - \hat{B}M)x_i + \hat{B}Q r_i, \quad y_i = C x_i \quad (55a)$$

と整理できる。ただし

$$M \triangleq K - F \quad (55b)$$

と定義した。よって、問題のパルス伝達関数行列は

$$G(z) = C(zI_n - A + BF + \hat{B}M)^{-1} \hat{B}Q \quad (56)$$

となり、極は

$$A - BF - \hat{B}M \quad (57)$$

の固有値となる。不変零点は、(49)式と同様に考えていくと(50)式の非零の n - p 個の固有値と一致し、系 3 からこれは F で設定可能である。

ここで、 $\Sigma\{C, A - BF, \hat{B}\}$ で表わされる系を考えてみると、その不変零点はフィードバック制御によって不変なことから、系(48b)、(55)のものと一致する。本論文では、以下、不変零点を設定する F を選んだとき、 $A - BF$ の固有値が指定した不変零点と一致しないと仮定する。すると、 $\Sigma\{C, A - BF, \hat{B}\}$ は最小実現となり、 $(A - BF, \hat{B})$ の可制御性が保証される。よって、(50)式で F によって不変零点、(57)式で M によって極が設定できる。

特に不変零点を 1 に指定しなければ

$$\begin{vmatrix} A - BF - \hat{B}M - I_n & \hat{B} \\ C & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (58)$$

となり、極を 1 に設定しなければ

$$|I_n - A + BF + \hat{B}M| \neq 0 \quad (59)$$

となるので、(58)式から

$$|C(I_n - A + BF + \hat{B}M)^{-1} \hat{B}| \neq 0 \quad (60)$$

が成り立つ。よって、直流ゲイン行列 $G(1) = C(I_n - A + BF + \hat{B}M)^{-1} \hat{B}Q$ は Q を選んで自由に設定できる。

F , $M(K)$ を決める具体的な手順は後報としたい。

〔例題〕 連続時間制御対象を $1/s^2$ 、すなわち

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1, 0)x(t)$$

とする。 $T=1(s)$ とし $G(z) = (z-0.2)/(z-0.5)^2$ に r_i - y_i 間のパルス伝達関数をマッチングさせてみよう。

この場合、(29)式は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} m^2/2 \\ m \end{bmatrix},$$

$$C = (1, 0)$$

となる。(50)式は $F = (f_1, f_2)$ とおくと

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2/m & 1-2/m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1-1/m \end{bmatrix} (f_1, f_2)$$

となり、 $m \neq 1$ ならば $f_1 = 0$, $f_2 = (0.8m-2)/(m-1)$ として零点が 0.2 に設定できる (解は唯一ではない)。

(57)式は、 $M = (m_1, m_2)$ とおいて

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} (0, f_2) - \begin{bmatrix} m^2/2 \\ m \end{bmatrix} (m_1, m_2)$$

となり、その固有値を $\{0.5, 0.5\}$ に設定すると、 $m \neq 0, 1$ のとき、 $m_1 = 5/(8m^2)$, $m_2 = (-9m/80 + 21/16)[1/m(m-1)]$ として求まる。また、 $G(1) = 1.6m^2Q$ となり、 Q は $Q = 2/m^2$ とすればよい。

6. おわりに

2-periodic 制御ではなくならないデジタル制御系の不変零点が提案した 2-delay 制御ではなくなり、不安定零点問題に帰着した数々の問題が解決されることを述べた。とりわけ、逆系については連続系が不安定零点をもっているにもかかわらず設計できることが示されたのは非常に興味深い。本制御系のロバスト性や 2-delay 入力制御時のサンプル点間の応答波形、および、仮定 A), B), モデルマッチング時の極指定可能性などについてのより深い吟味については今後の課題としたい¹⁷⁾。

参考文献

- 1) 美多, ほか: 新しいデジタル最適出力フィードバック制御とメカニカルシステムの制御への応用, 計測自動制御学会論文集, **22-12**, 1262/1268 (1986)
- 2) P. Khargoneker, et al.: Robust Control of Linear Time-Invariant Plants Using Periodic Compensation, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-30-11**, 1088/1096 (1985)
- 3) 萩原, 荒木: 多周期サンプル値系の極配置問題, 電気学会産業電力応用研究会, **IA-86-12** (1986)
- 4) S. Lee, et al.: Vibrational Feedback Control: Zero Placement Capability, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-32-7**, 604/611 (1987)
- 5) P. T. Kabamba: Control of Linear Systems Using Generalized Sample-Date Hold Functions, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-32-9**, 772/783 (1987)
- 6) 美多, 海津: 多入出力分散系から連続時間系への逆変換問題, 電気学会論文誌 C, **104-11**, 273/280 (1974)
- 7) M. Vidyasagar: Control Systems Synthesis, MIT Press (1985)
- 8) K. J. Astrom, et al.: Zeros of Sampled Systems, Automatica, **20-1**, 31/38 (1984)
- 9) 早川, ほか: On the Limiting Zeros of Sampled Multivariable Systems, Systems & Control Letters, **2-5**, 292/300 (1983)
- 10) 川路茂保: 有限整定オブザーバによるデジタル制御系

- の設計, 第 16 回制御理論シンポジウム, 241/244 (1987)
- 11) 新, 北森: 2 入力 1 出力系に対する MRACS の一設計法, 第 22 回 SICE 学術講演会予稿集, 5/6 (1983)
 - 12) H. H. Rosenbrock: State-Space and Multivariable Theory, Nelson (1970)
 - 13) 美多, 千田: 2-Delay デジタル制御と不安定零点問題の回避, 第 30 回自動制御連合講演会前刷, 165/166 (1987)
 - 14) 加来, 美多: 安定逆システムとロボットマニピュレータの制御への応用, 同上, 419/420 (1987)
 - 15) J. C. Doyle, et al.: Robustness with Observers, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-24-4**, 607/611 (1979)
 - 16) 美多, はか: デジタル制御系の安定余有と帰還差行列に関する一考察, 第 30 回自動制御連合講演会前刷, 161/162 (1987)
 - 17) 美多, 千田: デジタル状態フィードバック制御のロバストネスの限界と 2-Delay 制御による回復-LQ 制御と H^∞ 制御一, 第 17 回制御理論シンポジウムで発表予定 (1988)

《付 録》

1. [補題 A 1] 簡単のため 2 次元で述べる. T に依存する行列 $Q(T)(2 \times 2)$ があり, T について行プロパーな行列に展開でき

$$Q(T) = \text{diag}(T^{k_1}, T^{j_1})A_1 + \text{diag}(T^{k_2}, T^{j_2})A_2 + \text{diag}(T^{k_3}, T^{j_3})A_3 + \dots \quad (\text{A. 1})$$

$$k_i < k_{i+1}, j_i < j_{i+1}, |A_i| \neq 0$$

とできたとする. この場合, $Q(T)$ を正則とする十分小さい $T \neq 0$ が存在する.

(証明)

$$\text{diag}(1/T^{k_1}, 1/T^{j_1})Q(T) = A_1 + \text{diag}(T^{k_2-k_1}, T^{j_2-j_1})A_2 + \dots \quad (\text{A. 2})$$

とおける, $k_2 - k_1, j_2 - j_1, \dots$ はすべて正 (> 0) とおける. $T \rightarrow 0$ で (A. 2) 式の第 2 項以降は全要素が有界な行列 K と $\varepsilon \triangleq \max\{T^{k_2-k_1}, T^{j_2-j_1}\}$ によって $\varepsilon K \rightarrow 0$: $T \rightarrow 0$ とおける. 一方, $|Q| \neq 0 \Leftarrow |A_1 + \varepsilon K| \neq 0$ であるが, $|A_1| \neq 0$ ならば, さらに $|(1/\varepsilon)I + A_1^{-1}K| \neq 0$ と同等となる. $A_1^{-1}K$ の固有値は有界であり, 十分小さい T について, $1/\varepsilon$ となりえず, 本式が成り立つ. ■

1) (1) 式が非干渉化可能ならば

$$j_i = \min \{k \geq 1: c_i A_i^{k-1} B_c \neq 0\} \quad (\text{A. 3})$$

$$B^* \triangleq \begin{bmatrix} c_1 A_1^{j_1-1} B_c \\ \vdots \\ c_p A_p^{j_p-1} B_c \end{bmatrix} \quad (\text{A. 4})$$

において $|B^*| \neq 0$ とおける. ただし, c_i は C の第 i

行ベクトルである. そこで, (5) 式中の CB を $e^{A_c T}$ の展開公式を用い, T について展開すると $CB = \text{diag}(T^{j_1}, \dots, T^{j_p}) \cdot DB^* + \text{diag}(T^{j_1+1}, \dots, T^{j_p+1})A_2 + \dots: D = \text{diag}(1/j_1!, \dots, 1/j_p!)$ の形式とだけ, $|DB^*| \neq 0$ と補題 A 1 から, 十分小さい T が存在して CB は正則となる.

2) $A_c(-A_c)$ が安定行列ならば, $|A_c| \neq 0$ で $CB = C(e^{A_c T} - I_n)A_c^{-1}B_c$ とおける, $T \rightarrow \infty (T \rightarrow -\infty)$ で, $CB = -CA_c^{-1}B_c$ となり, 系 (1) が原点に零点をもたなければ ($|CA_c^{-1}B_c| \neq 0$), CB を正則にする $T = \infty (T = -\infty)$ が存在する.

2. 簡単のため $n=3$ とすると, M は次式となる.

$$M = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ CA & CB & 0 & 0 \\ CA^2 & CAB & CB & 0 \\ C\hat{A} & C\hat{B} & 0 & 0 \\ C\hat{A}A & C\hat{A}B & C\hat{B} & 0 \\ C\hat{A}A^2 & C\hat{A}AB & C\hat{A}B & C\hat{B} \end{bmatrix} \quad (\text{A. 5})$$

証明法は, 行操作によって右上のブロック CB, CAB を右下の $C\hat{B}$ で消去し整理するものである. $|C\hat{B}| \neq 0$ から, まず第 2 行 2 列目の CB を第 4 行の $C\hat{B}$ で消去すると, 第 2 行は $\phi \triangleq A - B(C\hat{B})^{-1}C\hat{A}$ と定義して, $\{C\phi, 0, 0, 0\}$ となる. また, 第 3 行 3 列目の CB を第 5 行の $C\hat{B}$ で消去すると, 第 3 行は, $\{C\phi A, C\phi B, 0, 0\}$ となり, さらに, その第 2 列要素 $C\phi B$ を第 4 行の $C\hat{B}$ で消去しまとめると, 第 3 行は $\{C\phi^2, 0, 0, 0\}$ となる. よって, M は

$$\begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ C\phi & 0 & 0 & 0 \\ C\phi^2 & 0 & 0 & 0 \\ C\hat{A} & C\hat{B} & 0 & 0 \\ C\hat{A}A & C\hat{A}B & C\hat{B} & 0 \\ C\hat{A}A^2 & C\hat{A}AB & C\hat{A}B & C\hat{B} \end{bmatrix} \quad (\text{A. 7})$$

と等価変換されるが, これがランク $3(p+1)[n(p+1)]$ であることは, $|C\hat{B}| \neq 0$ より

$$\{C^T, \phi^T C^T, \phi^{T^2} C^T\}^T \quad (\text{A. 7})$$

がランク $3[n]$ であること, すなわち, (C, ϕ) の可観測性と等価である. これが可観測であることは系 1 で述べた. $n \geq 3$ のときにも同様な変形が可能である. ■