離散時間パラメータ調整則の再構築†

新 中 新 二*・川 又 直 樹*・佐 藤 幹 夫*

Re-Establishment of Discrete-Time Parameter Adjustment Algorithms
for Adaptive Systems

Shinji SHINNAKA*, Naoki KAWAMATA* and Mikio SATO*

This paper presents a well generalized parameter adjustment algorithm for adaptive systems. It enables unified analysis of properties and relations of a variety of algorithms reported individually.

Key Words: adaptive system, parameter adjustment algorithm, adaptive law, system identification

1. ま え が き

適応システムの性能は、使用されるパラメータ調整則によって著しく左右される場合が少なくなく、これまで調整則に関して多くの研究がなされてきた^{1)~9)}。筆者らは、先に、調整則の統一的解析の一環として、ランダウ形の一般化調整則をはじめ、各種一般化調整則を包含しうより一般性に富む調整則を提示した³⁾。しかし、これは、確率近似アルゴリズム、ナグモ・ノダルアルゴリズムなどを含む一般化された固定ゲイン調整則を無理なく包含するものではなく、この調整則は別途、導出および解析されねばならなかった⁹⁾。本論文では、両一般化調整則を無理なく包含しうる汎一般化調整則とも呼ぶべき調整則を示し、各種調整則の共通の性質および相互の関連を統一的に明らかにする。

2. 汎一般化パラメータ調整則

適応システムに用いられる誤差方程式として、つぎの形のものを考える。

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) &= \zeta^T(k)\phi(k) = \zeta^T(k)(\hat{\theta}(k) - \theta) \\ &= \zeta^T(k)\hat{\theta}(k) - s(k) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $\varepsilon(k)$ はスカラー誤差、 $\zeta(k)$ は利用可能なベクトル信号、 θ は未知なる有界なベクトルパラメータ、 $\hat{\theta}(k)$ は θ の推定値たる可調整なベクトルパラメータ、 $\phi(k)$ は $\phi(k) = \hat{\theta}(k) - \theta$ なるパラメータ誤差、 $s(k)$ は $s(k) = \zeta^T(k)\theta$ なる利用可能なスカラー信号である。

適応システムにおいては、(1)式の誤差方程式に対し、一般につきのように $\hat{\theta}(k)$ を調整することが要求される⁵⁾。

$$(i) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0 \quad (2)$$

$$(ii) \quad \|\hat{\theta}(k)\| < \infty \quad ; \quad \forall k \quad (3)$$

$$(iii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)) = 0 \quad (4)$$

$$(iv) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\theta}(k) = \theta \quad ; \quad \zeta(k) = \text{P. S.} \quad (5)$$

このための調整則として、つぎの定理のものを考えることができる。

《定理》

(1)式の誤差方程式において、 $\hat{\theta}(k)$ が以下に示す調整則により調整されるならば、すべての有界な $\hat{\theta}(-1)$ に対し、 $\zeta(k)$ の有界、非有界にかかわらず、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0$ となる。

(汎一般化調整則)

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) - \mu_0(k) \Gamma(k-1) \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}(k-1)} \left(\frac{1}{2} \varepsilon^2(k) \right) \\ &= \hat{\theta}(k-1) - \mu_0(k) \Gamma(k-1) \zeta(k) \varepsilon(k) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Gamma(k) = \Gamma'(k) / \lambda_1(k) \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(-1) &> 0, \quad \Gamma^{-1}(-1) > 0, \\ 0 &< \lambda_1(k) \leq 1, \quad 0 \leq \lambda_2(k) < \infty \\ \frac{\lambda_2(k)}{2 + \lambda_2(k) \zeta^T(k) \Gamma(k-1) \zeta(k)} &< \mu_0(k) \\ &\leq \frac{1}{\zeta^T(k) \Gamma(k-1) \zeta(k)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ただし、

$$e(k) = \zeta^T(k) \hat{\theta}(k-1) - s(k) \quad (9)$$

$$\Gamma'(k) = \Gamma(k-1) - \frac{\lambda_2(k) \Gamma(k-1) \zeta(k) \zeta^T(k) \Gamma(k-1)}{\lambda_1(k) + \lambda_2(k) \zeta^T(k) \Gamma(k-1) \zeta(k)} \quad (10)$$

(証明)

(6),(7)式は、それぞれつぎのように書き換えら

† 第8回適応制御シンポジウムで発表(昭63・1)

* キヤノン(株)情報システム研究所 東京都大田区下丸子 2-9-4

* Information Systems Research Center, Canon Inc., Ohta-ku, Tokyo

(Received November 28, 1987)

(Revised January 23, 1988)

れる。

$$\phi(k) = \phi(k-1) - \frac{\mu_0(k)}{1 - \mu_0(k)\zeta^T(k)\Gamma(k-1)\zeta(k)} \times \Gamma(k-1)\zeta(k)\varepsilon(k) \quad (11)$$

$$\Gamma^{-1}(k) = \lambda_1(k)\Gamma^{-1}(k-1) + \lambda_2(k)\zeta(k)\zeta^T(k) \quad (12)$$

(8), (12)式より明らかなように $\Gamma^{-1}(k) \geq 0$ であるので, $V(k) = \phi^T(k)\Gamma^{-1}(k)\phi(k)$ は非負関数となる。また, その増分 $\Delta V(k) = V(k) - V(k-1)$ は, (11), (12)式を用いると以下のように整理される。

$$\begin{aligned} \Delta V(k) = & -(2\mu_0(k)/(1 - \mu_0(k)\zeta^T(k)\Gamma(k-1)\zeta(k)) \\ & - \lambda_2(k))\varepsilon^2(k) - \Delta\phi^T(k)\Gamma^{-1}(k-1)\Delta\phi(k) \\ & - (1 - \lambda_1(k))\phi^T(k)\Gamma^{-1}(k-1)\phi(k) \end{aligned} \quad (13)$$

ただし,

$$\Delta\phi(k) = \phi(k) - \phi(k-1) = \hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1) \quad (14)$$

(8), (13)式より明らかなように $\Delta V(k) \leq 0$ である。ここで, $V(k) \geq 0$, $V(-1) < \infty$ なることを考慮すると, これは $\lim_{k \rightarrow \infty} V(k) = \text{const}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta V(k) = 0$ を意味する。したがって, (13)式の右辺各項は $k \rightarrow \infty$ で 0 となる。同式第 1 項より $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0$ を得る。■

(6)~(8)式の調整則は, 上の証明より明らかなように, (2)式の性質に加えて, (3)~(5)式のものを含む以下の性質を有する。

[系 1]

$$(a) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} V(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\tilde{\lambda}_1(k)\phi^T(k)\Gamma^{-1}(-1)\phi(k) + J(\phi(k))) = \text{const} \quad (15)$$

ただし,

$$\tilde{\lambda}_1(k) = \prod_{i=0}^k \lambda_1(i) \quad (16)$$

$$J(\phi(k)) = \sum_{i=0}^k \left(\prod_{j=i+1}^k \lambda_1(j) \right) \lambda_2(i) (\zeta^T(i)\phi(k))^2 \quad (17)$$

$$(b) \quad \phi^T(k)\Gamma^{-1}(k)\phi(k) \leq \phi^T(-1)\Gamma^{-1}(-1)\phi(-1) < \infty \quad (18)$$

$$(c) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\phi^T(k)\Gamma^{-1}(k-1)\Delta\phi(k) = 0 \quad (19)$$

$$(d) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \lambda_1(k))\phi^T(k)\Gamma^{-1}(k-1)\phi(k) = 0 \quad (20)$$

[系 2]

$$(a) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k) = \phi = \text{const} \quad \text{ならば} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} J(\phi(k)) = J = \text{const} \quad (21)$$

$$(b) \quad \Gamma^{-1}(k) \geq \delta I; \delta > 0 \quad \text{ならば} \quad \|\phi(k)\|^2 \leq \phi^T(-1)\Gamma^{-1}(-1)\phi(-1)/\delta < \infty \quad (22)$$

$$(c) \quad \Gamma^{-1}(k) \geq \delta I; \delta > 0 \quad \text{ならば} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\phi(k) = 0 \quad (23)$$

このとき, $\zeta(k)$ が P. S. ならば

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k) = 0 \quad (24)$$

$$(d) \quad \Gamma^{-1}(k) \geq \delta I; \delta > 0 \quad \text{であり, かつ, } 1 - \lambda_1(k) < \delta'; \delta' > 0, k \geq k' \quad \text{となるような } k' \text{ が存在しなければ} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k) = 0 \quad (25) \blacksquare$$

(6)~(8)式の汎一般化調整則は, 従来のほとんどすべての調整則を包含するという高い一般性をもつ。次章にこれを示す。

3. 一般性

3.1 一般化調整則

重み係数 $\mu_0(k)$ を

$$\mu_0(k) = \mu_1(k)/(1 + \mu_1(k)\zeta^T(k)\Gamma(k-1)\zeta(k)) \quad (26)$$

と選定する場合には, (6)~(8)式の調整則は, 文献 3) に提示されたつぎの一般化調整則に帰着される。

(一般化調整則)

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - \frac{\mu_1(k)\Gamma(k-1)\zeta(k)}{1 + \mu_1(k)\zeta^T(k)\Gamma(k-1)\zeta(k)} e(k) \quad (27)$$

$$\Gamma(k) = \Gamma'(k)/\lambda_1(k) \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} & \Gamma(-1) > 0, \Gamma^{-1}(-1) > 0 \\ & 0 < \lambda_1(k) \leq 1, 0 \leq \lambda_2(k) < 2\mu_1(k) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

(27)~(29)式の調整則は, 十分な一般性を持ち, 以下のような各種形式の一般化調整則を包含する。

重み係数 $\mu_1(k)$ を

$$\mu_1(k) = \lambda_2(k)/\lambda_1(k)$$

と選定する場合には, (27)~(29)式の調整則は, 評価指数 $J(\phi(k))$ を最小とする逐次形式の最小 2 乗法形調整則となる。すなわち,

(最小 2 乗法形一般化調整則)

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - \frac{\lambda_2(k)\Gamma(k-1)\zeta(k)}{\lambda_1(k) + \lambda_2(k)\zeta^T(k)\Gamma(k-1)\zeta(k)} e(k) \quad (30)$$

$$\Gamma(k) = \Gamma'(k)/\lambda_1(k) \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} & \Gamma(-1) > 0, \Gamma^{-1}(-1) > 0 \\ & 0 < \lambda_1(k) \leq 1, 0 < \lambda_2(k) < \infty \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

重み係数 $\mu_1(k)$ を

$$\mu_1(k) = \mu_1 = \text{const} < \infty$$

と選定する場合には, (27)~(29)式の調整則はランダウらにより一般化された調整則に帰着される。すなわち,

(ランダウ形一般化調整則)

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - \frac{\Gamma(k-1)\zeta(k)}{1 + \zeta^T(k)\Gamma(k-1)\zeta(k)} e(k) \quad (33)$$

$$\Gamma(k) = \Gamma'(k)/\lambda_1(k) \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} & \Gamma(-1) > 0, \Gamma^{-1}(-1) > 0 \\ & 0 < \lambda_1(k) \leq 1, 0 \leq \lambda_2(k) < 2 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

重み係数 $\mu_1(k)$ を

$$\mu_1(k) = \infty$$

と選定する場合には、(27)～(29)式の調整則より、 $\varepsilon(k) = 0$; $\forall k$ とするような、一般化された極限形調整則を得ることができる。すなわち、

(極限形一般化調整則)

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - \frac{\Gamma'(k-1)\zeta(k)}{\zeta^T(k)\Gamma'(k-1)\zeta(k)} e(k) \quad (36)$$

$$\Gamma'(k) = \Gamma'(k)/\lambda_1(k) \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma'(-1) > 0, \Gamma'^{-1}(-1) > 0 \\ 0 < \lambda_1(k) \leq 1, 0 \leq \lambda_2(k) < \infty \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

以上説明した各調整則においては、行列ゲイン $\Gamma(k)$ を形成する重み係数 $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ の選定により、更に数多くの具体的な調整則を導くことができる。 $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ の選定法は、 $\Gamma'(k)$ を一定に保つ固定ゲイン方式と $\Gamma(k)$ を時変させる時変ゲイン方式に大別される。特色ある時変ゲイン方式としては、漸減ゲイン、固定忘却ゲイン、固定トレースゲイン、上限トレースゲイン、下限トレースゲイン、両限トレースゲインの各方式がある⁴⁾。

3.2 固定ゲイン方式における汎一般化調整則

(6)～(8)式の調整則において、重み係数 $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ を $\lambda_1(k) = 1$, $\lambda_2(k) = 0$ と選定することにより、つぎのような固定ゲイン方式の汎一般化調整則を得ることができる。

(固定ゲイン汎一般化調整則)

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - \mu_0(k)\Gamma\zeta(k)e(k) \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma > 0, \Gamma^{-1} > 0 (\Gamma = \text{const}) \\ 0 < \mu_0(k) \leq 1/(\zeta^T(k)\Gamma\zeta(k)) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

上の調整則において、 $\Gamma = I$ と選定する場合には、一般性の高いプロジェクトンアルゴリズムが得られる。このときには、パラメータ誤差は単調に縮小し、 $\|\phi(k)\| \leq \|\phi(k-1)\|$; $\forall k$ が保証される。

また、(39), (40)式の調整則が、次式に代表される各種の確率近似アルゴリズム¹⁾ を包含しうること明らかにあらう。

(確率近似アルゴリズム)

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - \frac{\alpha\zeta(k)}{\rho(k)} e(k) \quad (41)$$

$$\rho(k) = \rho(k-1) + \zeta^T(k)\zeta(k) \quad (42)$$

$$\rho(-1) > 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (43)$$

(39), (40)の調整則において、 $\mu_0(k)$ を

$$\mu_0(k) = \mu_1(k)/(1 + \mu_2(k)\zeta^T(k)\Gamma\zeta(k))$$

と選定する場合には、文献3)で提示されたつぎの調整則が得られる。

(固定ゲイン一般化調整則)

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - \frac{\mu_1(k)\Gamma\zeta(k)}{1 + \mu_2(k)\zeta^T(k)\Gamma\zeta(k)} e(k) \quad (44)$$

$$\Gamma > 0, \Gamma^{-1} > 0, 0 < \mu_1(k) \leq \mu_2(k) \quad (45)$$

(44), (45)式に示した調整則は、以下に示すように、固定ゲイン方式の調整則としては、まだ十分な一般性を有する。

(i) 重み係数 $\mu_1(k)$, $\mu_2(k)$ を $\mu_1(k) = \mu_2(k)$ と選定する場合には、これは、(27)～(29)式に示した一般化調整則の固定ゲイン方式のものに帰着される。

(ii) $\Gamma = I$, $\alpha(k) = \mu_1(k)/\mu_2(k)$, $\mu_2(k) \rightarrow \infty$

と選定する場合には、これは、学習アルゴリズムとも呼ばれるつぎのナグモ・ノダルアルゴリズム⁵⁾に帰着される。

(ナグモ・ノダルアルゴリズム)

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - \frac{\alpha(k)\zeta(k)}{\zeta^T(k)\zeta(k)} e(k) \quad (46)$$

$$0 < \alpha(k) \leq 1 \quad (47)$$

4. あとがき

以上、種々の一般化調整則をはじめ従来のほとんどすべての調整則を無理なく包含しうる汎一般化調整則を示し、これらの共通の性質および相互の関連を統一的に明らかにした。適応システムの本格的実用段階を迎えた今日、本論文はシステムの合理的設計に資するものと思う。

参考文献

- 1) 計測自動制御学会編：自動制御ハンドブック（基礎編），701/733，オーム社（1983）
- 2) 鈴木，新中，田中：一般化適応則の証明と固定トレースアルゴリズムの諸性質，計測自動制御学会論文集，18-11，1074/1079（1982）
- 3) 新中，鈴木：一般化パラメータ適応則の拡張とその性質，計測自動制御学会論文集，19-11，881/888（1983）
- 4) 新中，鈴木：適応システムのためのパラメータ調整アルゴリズム，計測自動制御学会論文集，21-7，691/697（1985）
- 5) 新中，鈴木：周期時変系に対する離散時間適応制御，計測自動制御学会論文集，22-7，733/738（1986）
- 6) 新中，川又，鈴木：マルチレートハイブリッド方式による適応極配置系の設計，電子通信学会論文誌，J69-A-1，54/62（1986）
- 7) S. Shinnaka, K. Tanaka and T. Suzuki: A Simple Order-Determination Method Based on a Generalized Adaptive Law, International J. Control, 41-4, 1037/1050（1985）
- 8) J. Nagumo and A. Noda: A Learning Method for System Identification, IEEE Trans. Automatic Control, AC-12-3, 232/237（1967）