ベクトル幾何学および多項式表現による6リンク・マニピュレータの逆問題解法

佐々木 忍*・篠原 慶邦*

Inverse Kinematic Solutions for a Six-Link Manipulator
via Vector-Geometrical and Polynomial Approach

Shinobu SASAKI* and Yoshikuni SHINOHARA*

1. はじめに

本報では、マニピュレータの運動学および逆問題の解法について、リンク機構を構成する各関節の局所的な関係を幾何学的、物理的、かつ直感的に取り扱うために、各座標系の単位ベクトル（以下、基ベクトルとも呼ぶ）のスカラー積や外積などの簡単なベクトル演算と平面幾何の性質を組み合わせることにより、既報¹⁾と異なる方法で、直接関節解を誘導する。取り扱ったマニピュレータの解析解を得ることは無理なため、導出したリンクの関係を1変数 θ_6 の多項式で統合化し、その根から姿勢のすべてを再現する厳密な関節解を導き出した。

2. リンク間の解析的表現と関節解の誘導

本報に示す方法の基本的な考え方は一般のマニピュレータに対しても適用できるが、具体的な解析対象として、Fig. 1 に示すマニピュレータとその座標系をもとに以下に説明する。関節上に固定した直交座標系 $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i=0, 6$) の X_i, Y_i, Z_i 各軸に沿う単位ベクトルを n_i, o_i, a_i とし、指先 (x_h, y_h, z_h) のそれを n, o, a とする。ただし、 $n_0=n_1=(1, 0, 0)^T$, $o_0=o_1=(0, 1, 0)^T$, $a_0=a_1=(0, 0, 1)^T$ と約束しておく。また成分で表わしたベクトルを $n_i=(n_{ix}, n_{iy}, n_{iz})^T$, $a=(a_x, a_y, a_z)^T$ などと記す。T は転置記号で、ほかに $\sin \theta_i = s_i$, $\cos \theta_i = c_i$, $\sin(\theta_i + \theta_j) = s_{ij}$, $\cos(\theta_i + \theta_j) = c_{ij}$ と略記する。

2.1 第5関節の位置表示

まず最初に、指先 F とこれに隣接する関節について、基準座標系（以下、 Σ_0 と記す）からみたそれぞ

Fig. 1 Six-link manipulator and link co-ordinates

れの方余弦行列を基ベクトルを使って

$$M = [n, o, a], \quad N = [n_6, o, a_6]$$

とした場合、Fig. 1 のマニピュレータに対しては、 N をベクトル o (すなわち、 y_6 -軸) のまわりに θ_6 だけ回転すると M が得られるので、逆に M を o のまわりに $-\theta_6$ だけ回転すれば N が得られる ($o_6=o$).

$$\left. \begin{aligned} n_{6x} &= n_x c_6 + a_x s_6, & a_{6x} &= a_x c_6 - n_x s_6 \\ n_{6y} &= n_y c_6 + a_y s_6, & a_{6y} &= a_y c_6 - n_y s_6 \\ n_{6z} &= n_z c_6 + a_z s_6, & a_{6z} &= a_z c_6 - n_z s_6 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

つぎに、 Σ_0 に対する指先、第6、第5関節の位置を順に (P_x, P_y, P_z) , (x_6, y_6, z_6) , (x_5, y_5, z_5) ; 位置ベクトルを P, P_6, P_5 と記すと、 $P_6 = P - l_6 a$, $P_5 = P_6 - l_5 a_6$ から、第5関節 D の位置が決る。すなわち、

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x - l_6 a_x - l_5 (a_x c_6 - n_x s_6) \\ P_y - l_6 a_y - l_5 (a_y c_6 - n_y s_6) \\ P_z - l_6 a_z - l_5 (a_z c_6 - n_z s_6) \end{bmatrix} \quad (2)$$

2.2 関節解の表示

さて、Fig. 1 に示した根元0から第5関節Dまでの機構は θ_1 のみで決定される同一平面を形成する。つまり、軸 OA を中心とする回転と二つの旋回 A, B

* 日本原子力研究所東海研究所 茨城県那珂郡東海村白方白根 2-4

* Tokai Research Establishment, Japan Atomic Energy Research Institute, Naka-gun, Ibaraki (Received September 28, 1987)

Key Words: inverse kinematics, geometrical approach, polynomial expression, six-link manipulator

とてつくられた回転体とDを中心、半径 l_{34} の球面が交叉した状況に対して、関節 B が直線 AD に関して二つの異なった姿勢—2通りの θ_2 (また θ_3) の解—の存在を示している。解析の便宜上、上記平面の内 Fig. 2 に示すような A を原点とする $\triangle ABD$ について考える。

反時計方向を正と定めた角度に対して、同図に示す θ_2, θ_3 が同一方向の場合

$$\theta_2 + \alpha_1 = \omega_1, \quad \theta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (3)$$

となり (B が AD に対して反対側すなわち、 θ_2, θ_3 の符号が逆の場合、 $\theta_2 = \omega_1 + \alpha_1$, $-\theta_3 = \alpha_1 + \alpha_2$)、 θ_2, θ_3 の和 θ_{23} として

$$\theta_{23} = \omega_1 \pm \alpha_2 \quad (4)$$

が定まる。 ω_1 は Z_2 軸と辺 AD との交角とする。

ところで、Fig. 2 に記した説明から、(2)で求めた点 D の座標は、 $x_5 = (l_2 s_2 + l_{34} s_{23}) s_1$, $y_5 = -(l_2 s_2 + l_{34} s_{23}) c_1$, $z_5 - l_1 = l_2 c_2 + l_{34} c_{23}$ とも書けることがわかり、 $\tan \omega_1$, $\tan \theta_1$ などがこの図から容易に求まる。すなわち、

$$\tan \omega_1 = \sqrt{x_5^2 + y_5^2} / (z_5 - l_1) = (-y_5 / c_1) / (z_5 - l_1) \quad (5)$$

$$\tan \theta_1 = -x_5 / y_5 \quad (6)$$

また、(3)式の θ_2, θ_3 に含まれた α_1, α_2 は、簡単な計算の結果、つぎの(7)から求められる。

$$\begin{aligned} \tan \alpha_1 &= h / x_1 = 4H / (L^2 + a), \\ \tan \alpha_2 &= h / x_2 = 4H / (L^2 - a) \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} 4H &= \sqrt{4L^2 l_2^2 - (L^2 + a)^2}, \\ L^2 &= x_3^2 + y_3^2 + (z_5 - l_1)^2, \\ a &= l_2^2 - l_{34}^2, l_{34} = l_3 + l_4 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$\theta_1 \sim \theta_3$ の決定後、こんどは 4 ~ 6 軸間の基ベクトル

Fig. 2 Geometrical illustration of links between joints 2 and 5

の性質として $n_5 \perp a_4$, $n_5 \perp o$ がわかる。

したがって、 n_5 を o と a_4 の外積に平行な単位ベクトルとして、 $o \times a_4 / |o \times a_4|$ を計算すると

$$n_5 = [(c_{23} o_y + c_1 s_{23} o_z) n_0 + (s_1 s_{23} o_z - c_{23} o_x) o_0 + (-s_1 s_{23} o_y - c_1 s_{23} o_x) a_0] / P_a \quad (9)$$

$$P_a = |o \times a_4| = \sqrt{1 - \{s_{23}(s_1 o_x - c_1 o_y) + c_{23} o_z\}^2}$$

と記述する。 a_4 は Fig. 2 に描いた CD 方向の単位ベクトルを Z_1, X_1, Y_1 軸へ射影させて求める。

$$a_4 = (a_{4x}, a_{4y}, a_{4z})^T = (s_1 s_{23}, -c_1 s_{23}, c_{23})^T \quad (10)$$

ベクトル n_5 が定まると第 4 関節について、

$$c_4 = n_4 \cdot n_5 = n_2 \cdot n_5 = \{s_{23} o_x + c_{23}(c_1 o_y - s_1 o_x)\} / P_a$$

が引き出せる (ただし、 $n_2 = (c_1, s_1, 0)^T$)。

さらに、 $(n_2 \times n_5, a_4) = s_4$ であることから、

$$s_4 = -(c_1 o_x + s_1 o_y) / P_a$$

が定まる。よって、 θ_4 は次式で決定する。

$$\tan \theta_4 = s_4 / c_4 \quad (11)$$

続いて、ベクトル $a_5 (= a_4)$ と n_5 のベクトル外積 $o_5 = a_4 \times n_5$ を求めてから、つぎの 2 式

$$c_5 = o_5 \cdot o = [1 - \{s_{23}(s_1 o_x - c_1 o_y) + c_{23} o_z\}^2] / P_a$$

$$s_5 = o \cdot a_4 = s_{23}(s_1 o_x - c_1 o_y) + c_{23} o_z \quad (\triangleq f)$$

を基にして、 θ_5 が θ_{23}, θ_1 の関数として導き出せる。

$$\tan \theta_5 = s_5 / c_5 = f / \sqrt{1 - f^2} \quad (12)$$

2.3 関節解を与える代数方程式 $F(t) = 0$ の確立

前節(3), (5), (6), (7) から $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ が、また (11), (12) から θ_4, θ_5 が θ_6 を含む形で表現できた。残る問題は指定された指先位置・姿勢とリンク機構の関係を結ぶ θ_6 の閉じた方程式を確立することである。

まず、(9)で求めたベクトル n_5 は a_6 に垂直なので、すなわち、

$$\begin{aligned} n_5 \cdot a_6 &= [(c_{23} o_y + c_1 s_{23} o_z)(a_x c_6 - n_x s_6) \\ &\quad + (s_1 s_{23} o_z - c_{23} o_x)(a_y c_6 - n_y s_6) \\ &\quad - (s_1 s_{23} o_y + c_1 s_{23} o_x)(a_z c_6 - n_z s_6)] / P_a = 0 \end{aligned}$$

に対して、 $c_6 = (1 - t^2) / (1 + t^2)$, $s_6 = 2t / (1 + t^2)$ と置き換え、つぎに導入する便宜的なパラメータ

$$N_j = n_j + 2a_j t - a_j t^2 \quad (j = x, y, z) \quad (13)$$

と付録の(A.3)から $T_{23} = \tan \theta_{23}$ を求める。

$$T_{23} = Y N_z / \{(X N_x + Y N_y) c_1\} \quad (14)$$

この T_{23} は(4)の正接からも計算できる。すなわち、

$$\pm \tan \alpha_2 = \tan (\theta_{23} - \omega_1) \quad (15)$$

右辺を展開して(14)と付録の(A.3)を代入後、さらに 2 乗した整理式が次式である。

$$\tan^2 \alpha_2 = \frac{(X N_x + Y N_y + Z N_z)^2 (X^2 + Y^2)}{\{Z(X N_x + Y N_y) - (X^2 + Y^2) N_z\}^2} \quad (16)$$

(16)の右辺を簡略化し、左辺に(7)を適用して 8 次の $t (= \tan \theta_6 / 2)$ に関する代数方程式 $F(t) = 0$ を得る。詳

細は付録に記載する。この方程式の実根を各関節角表示式に代入すれば拘束条件内の解がすべて得られる。

3. おわりに

本解析におけるマニピュレータの空間姿勢は、視察により Fig. 2 に示した関節 B の 2 通りの解に加え、 θ_1 を 180° 進めて θ_2 を $-\theta_2$ としても解の可能性となり、また (9) の n_5 に対する逆向きのケースなどが幾何学的な考察から解の候補として発見されるが、(B. 13) で誘導した多項式はこれらすべてを組み合わせた解を与えるもので、既報の結果と精度、多値性に関して完全に一致していることが確認できた。

参 考 文 献

- 1) 佐々木忍: 多項式表現を用いた 6 リンク・マニピュレータの逆問題計算法, 計測自動制御学会論文集, 23-5 485/490 (1987)

《付 録》

A. 関節 D における座標の表示

(2) で求めた第 5 軸の位置座標を, $\tan(\theta_6/2) = t$ を利用して, t のみで表現する。それらは,

$$\left. \begin{aligned} x_5 &= \{X_n + 2l_5 n_x t + X_p t^2\} / (1+t^2) = X / (1+t^2) \\ y_5 &= \{Y_n + 2l_5 n_y t + Y_p t^2\} / (1+t^2) = Y / (1+t^2) \\ z_5 - l_1 &= \{Z_n + 2l_5 n_z t + Z_p t^2\} / (1+t^2) = Z / (1+t^2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 1})$$

ただし,

$$\begin{aligned} XX &= P_x - l_6 a_x, X_n = XX - l_5 a_x, X_p = XX + l_5 a_x, \\ YY &= P_y - l_6 a_y, Y_n = YY - l_5 a_y, Y_p = YY + l_5 a_y, \\ ZZ &= P_z - l_6 a_z - l_1, Z_n = ZZ - l_5 a_z, Z_p = ZZ + l_5 a_z, \\ X &= (1+t^2) \{XX - l_5(a_x c_6 - n_x s_6)\}, \\ Y &= (1+t^2) \{YY - l_5(a_y c_6 - n_y s_6)\}, \\ Z &= (1+t^2) \{ZZ - l_5(a_z c_6 - n_z s_6)\} \end{aligned} \quad (\text{A. 2})$$

上の表示から, ω_1, θ_1 は, つぎのように記述できる。

$$\tan \omega_1 = -Y / (Z c_1), \quad \tan \theta_1 = -X / Y \quad (\text{A. 3})$$

B. 代数方程式の誘導

ここで, (16) の右辺の簡略化を行った後, リンク関係を表す多項式 $F(t) = 0$ を誘導する。

まず, (16) の分子の $XN_x + YN_y + ZN_z$ ($\triangleq J_1$) に関して付録の (A. 2), (13) およびつぎの定義 (B. 1) を使って,

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= n_x XX + n_y YY + n_z ZZ, \\ R_2 &= a_x XX + a_y YY + a_z ZZ, \\ R_3 &= o_x XX + o_y YY + o_z ZZ \end{aligned} \right\} \quad (\text{B. 1})$$

$$J_1 = (1+t^2) \{XXN_x + YYN_y + ZZN_z\}$$

$$= (1+t^2) \Psi_1(t) \quad (\text{B. 2})$$

を導く。ただし,

$$\Psi_1(t) = R_1 + 2R_2 t - R_1 t^2 \quad (\text{B. 3})$$

つぎに, (16) の分母にある $Z(XN_x + YN_y) - (X^2 + Y^2)N_z$ ($\triangleq J_2$) はまず,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (1+t^2) \Psi_2(t) \quad (\text{B. 4})$$

と書けるから, ただし,

$$\left. \begin{aligned} \Psi_2(t) &= e_0 + e_1 t + e_2 t^2 \\ e_0 &= R_1^2 + (R_2 - l_5)^2 + R_3^2, \\ e_1 &= 4l_5 R_1, \quad e_2 = R_1^2 + (R_2 + l_5)^2 + R_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B. 5})$$

$$\begin{aligned} J_2 &= Z \{(1+t^2) \Psi_1 - ZN_z\} - (X^2 + Y^2) N_z \\ &= (1+t^2) \{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\} \end{aligned} \quad (\text{B. 6})$$

となり, (16) をつぎの (B. 7) で表現しなおす。

$$\tan^2 \alpha_2 + 1 = [\Psi_1^2 (X^2 + Y^2) / \{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\}^2] + 1 \quad (\text{B. 7})$$

ところで, 左辺は, $\tan \alpha_2$ に対する (7) 式から,

$$\tan^2 \alpha_2 + 1 = 4L^2 l_{34}^2 / (L^2 - a)^2 \quad (\text{B. 8})$$

を得る。L は, (8), (A. 1), (B. 4) を利用して,

$$L^2 = (X^2 + Y^2 + Z^2) / (1+t^2) = \Psi_2(t) / (1+t^2)$$

と表わすと, (B. 8) はつぎのような t の有理関数となる。

$$\tan^2 \alpha_2 + 1 = \frac{4(1+t^2) \Psi_2 l_{34}^2}{\{\Psi_2 - a(1+t^2)\}^2} \quad (\text{B. 9})$$

一方, (B. 7) の右辺の分子を J_3 とすると,

$$\begin{aligned} J_3 &= \Psi_1^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) + \Psi_2 N_z (\Psi_2 N_z - 2\Psi_1 Z) \\ &= \Psi_1^2 (1+t^2) \Psi_2 + \Psi_2 N_z (\Psi_2 N_z - 2\Psi_1 Z) \\ &= \Psi_1^2 (1+t^2) \Psi_2 + \Psi_2 N_z (1+t^2) \Psi_3 \\ &= \Psi_2 (1+t^2) \{\Psi_1^2 + \Psi_3 N_z\} \end{aligned} \quad (\text{B. 10})$$

を得る。ここに,

$$\begin{aligned} \Psi_3 &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \\ b_0 &= W + U, \quad b_1 = 2\{a_x S - 2R_2 ZZ\}, \\ b_2 &= -W + U \\ S &= R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2, \quad W = S n_z - 2R_1 ZZ, \\ U &= 2l_5(a_x R_1 - n_x R_2) \end{aligned} \quad (\text{B. 11})$$

また, Ψ_2 はつぎの形で使用する。

$$\Psi_2 = (1+t^2) \{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2 - 2l_5(R_2 c_6 - R_1 s_6)\}$$

以上で, 因数 $\Psi_2(1+t^2)$ が (B. 7), (B. 9) から (B. 10) を通して除去することができ, 最終的に

$$\frac{4l_{34}^2}{\{\Psi_2 - a(1+t^2)\}^2} = \frac{\Psi_1^2 + \Psi_3 N_z}{\{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\}^2} \quad (\text{B. 12})$$

を得る。これを整理して t に関する 8 次の代数方程式

$$F(t) = \sum_{i=0}^8 k_i t^i = 0 \quad (\text{係数 } k_i \text{ の説明は省略}) \quad (\text{B. 13})$$

となる (ここに $t = \tan(\theta_6/2)$)。