入出力間直結経路をもたないシステムの繰返し制御[†]

池田 雅夫*・高野 誠**

Repetitive Control for Systems with Nonzero Relative Degree

Masao IKEDA* and Makoto TAKANO**

The repetitive control is considered for linear time-invariant systems with nonzero relative degrees. For this purpose, the class of repetitive reference signals is restricted to exclude those which the systems can never follow as long as the control inputs are bounded. Then, a sufficient condition is presented for synthesis of a feedback system which tracks such reference signals. That is, when a plant is strictly positive real, we have a repetitive compensator which guarantees that the L_2 norm of the tracking error computed with respect to the repetitive period goes to zero. Under this condition, it is shown that the restricted class of reference signals is the set of all bounded repetitive signals with bounded derivatives.

Key Words: repetitive control, nonzero relative degree, strict positive real property, hyperstability

1. はじめに

周期的な参照入力信号に高精度で追従するサーボ系として繰返し制御系が井上、中野ら¹⁾により提案され、原、山本らによりその理論的解明がなされつつある。その結果、繰返し制御系において追従誤差が0に収束するためには、制御対象の伝達関数の分母と分子の次数差が0、すなわち入出力間に直結経路をもつことが一般に必要なことが明らかになった^{2), 3)}。このように制御対象に厳しい制約が課せられるのは、参照入力信号のクラスとして一定周期をもつすべての信

号を対象としているからである。このクラスにはたとえば矩形波のように、無限に高い周波数の成分を1/周波数のオーダーでもつ信号も含まれており、入出力間直結経路をもたない制御対象は低域ろ波特性をもつので、有界入力を用いる限り、そのような信号には追従しえない。

また、これまで追従誤差の議論の前提とされてきた安定性解析においても、入出力間直結経路をもたない制御対象の場合は、困難な問題が生じる。制御系の安定性を示すには繰返し補償器のむだ時間を含むループのゲインを高周波帯域で小さくする必要があるが、こうすると追従誤差は0に収束しない^{4), 5)}。

さて、制御対象が入出力間直結経路をもたないとき、参照入力としてそれが応答できないような無限に高い周波数成分を1/周波数のオーダーでもつ(急激な変化を伴う)信号まで考えることは、もともと無理な要求である。つまり、このような制御対象に対する繰返し制御を考えると、参照入力信号のクラスを周期関数の全体とするのは問題設定として不適当である。しかも、工学的見地に立つと、矩形波に追従することを要求するより、滑らかな信号を参照入力として与えるほうが総合的には望ましい動作が得られることも多い⁶⁾。したがって、参照入力信号のクラスを周期関数の全体とする必要性は必ずしもない。

本論文ではこの考えに基づいて、参照入力信号のクラスを制御対象にとって無理なく追従することのできるものに制限する。そして、入出力間直結経路をもたないような制御対象の場合でも、追従誤差が繰返し周期の L_2 ノルムの意味で0に収束するような制御系が構成できることを示し、そのための条件を与える。

なお、本論文においては、制御対象のクラスを明確にする目的で、下の(1)式のように、入力から出力への直結経路をまったくもたない制御対象を考える。しかし、本論文の議論は

† 第30回システムと制御研究発表講演会で一部発表(昭和61・5)

* 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町 1-1

** 日本電信電話(株)通信網総合研究所 横須賀市武 1-2356

* Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe

** NTT Telecommunication Networks Laboratories, Yokosuka

(Received November 24, 1987)

(Revised February 15, 1988)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

のような、直結経路 (D は正則であるとは限らない) をもつ対象にも、変更を加えることなく適用できる。

2. 参照入力信号のクラス

制御対象として、安定な (または、なんらかの方法ですでに安定化されている) m 入力 m 出力線形時間不変システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1)$$

を考える。ここに、 $x(t) \in R^n$, $u(t), y(t) \in R^m$ はそれぞれ状態, 入力, 出力である。 A, B, C は定数行列で、 $\text{rank } B = \text{rank } C = m$, (A, B) の組は可制御, (C, A) の組は可観測とする。そして、この制御対象の伝達関数行列を $G(s)$ で表わす。すなわち、

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2)$$

とする。

この制御対象の出力 $y(t)$ が追従すべき参照入力信号 $r(t) \in R^m$ のクラスとして、周期 L をもち (1) 式の制御対象にとって無理のない周波数成分をもつ信号を考える。具体的には、Fig. 1 のように、周期 L をもつ任意の有界な繰返し信号をローパス・フィルタを通して得られるもので、制御対象の追従が困難な高周波成分を減衰させたものである。このローパス・フィルタとしては、前章で議論したことからわかるように、制御対象と同じ特性のものをを用いるのが、妥当である。このとき、Fig. 1 のシステムはつぎのように記述できる。

$$\dot{z}(t) = Az(t) + B\gamma(t)$$

$$r(t) = Cz(t)$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(t), & 0 \leq t < L \\ \gamma(t-L), & L \leq t \end{cases} \quad (3)$$

ここに、 $z(t) \in R^n$, $\gamma(t), r(t) \in R^m$ はそれぞれフィルタの状態, 入力, 出力であり、 $\gamma_0(t)$, $(0 \leq t < L)$ はむだ時間要素 $e^{-Ls}I$ の有界な m 次元初期関数である。われわれは、適当な $\gamma_0(t)$ に対して、このフィルタが定常状態に至ったのちの出力 $r(t)$ として表わせる周期関数に限り、参照入力信号とする。

所望の参照入力信号 $r(t)$ が与えられたとき、それがこのような関数であるかという判定はつぎのように

Fig. 1 Characterization of reference input signal $r(t)$

すればよい。この問題は、与えられた周期 L の時間関数 $r(t)$ に対して (3) 式を満たす有界な周期関数 $\gamma(t)$ が存在するかという問題である。したがって、 $r(t)$ のラプラス変換を $f(s)$ としたとき、 $G^{-1}(s)f(s)$ の逆ラプラス変換が周期 L の有界関数と 0 に減衰する関数の和であればよい。そのとき、その周期関数部分を L の整数倍の時刻から長さ L だけ切り出して、初期関数 $\gamma_0(t)$ とすると、定常状態において、(3) 式のフィルタの出力は所望の $r(t)$ である。

以上で述べたことは、参照入力信号 $r(t)$ を Fig. 1 のシステムで生成するという意味ではない。Fig. 1 は本論文で対象とする $r(t)$ のクラスを規定するために用いただけである。追従すべき時間関数 $r(t)$ が与えられたとき、それが Fig. 1 のシステムで生成できること、つまり、(3) 式を満たすことがわかれれば、それをどのような形で生成して繰返し制御系に加えるかは任意である。

本章では、制御対象が出入力間直結経路をもたない安定なシステムであるというだけで、それ以上の条件を課していない。そのため、参照入力信号のクラスを上で述べた形式でしか規定できなかった。しかし、のちに定理 1 で与えるように、繰返し制御系が構成できるためには制御対象はある条件を満たさなければならぬ。そのとき、参照入力信号のクラスは非常に簡単に表現できる。それは 4 章で与える。

3. 繰返し制御系の構成可能条件

繰返し制御系が構成できるための条件は Popov の超安定性理論⁷⁾ を援用して導く。そのために、Anderson⁸⁾ によって与えられた解釈から得られる安定定理を述べよう。証明は付録に与える。

【補題】 Fig. 2 のフィードバック系において、つぎの二つの条件が成立するならば、任意の初期条件に対して、制御対象 (plant) の状態 $x(t)$ は有界かつ L_2 関数となる。

(1) 制御対象が強正実、すなわち、その伝達関数行列 $G(s)$ がすべての実数 ω について、

$$G(i\omega) + G^T(-i\omega) > 0 \quad (4)$$

を満たす。

(2) 補償器 (compensator) が超安定ブロック、すなわち、Popov の積分不等式、

Fig. 2 Zero-input feedback system

$$\int_0^t u^T(\tau)e(\tau)d\tau \geq -\kappa_0^2, \quad \forall t \geq 0 \quad (5)$$

が任意の入力 $e(t)$ とそれに対する出力 $u(t)$ について成立する。ただし、 κ_0^2 はこのブロックの入力や状態の初期条件によって定まる有界な非負数である。

この補題を用いて、(3)式を満たす周期的な参照入力信号 $r(t)$ に、(1)式の制御対象の出力 $y(t)$ が追従するような繰返し制御系を構成しよう。制御系の構成としては、入出力間直結経路をもつ制御対象の場合と同様、Fig. 3 のように、むだ時間のループからなる繰返し補償器を含む形を考える。これは、内部モデル原理²⁾を根拠としている。つぎの定理が本論文の主な結果である。

《定理 1》 Fig. 3 の制御系において、参照入力信号 $r(t)$ は(3)式を満たすとする。このとき、制御対象が強正実ならば追従誤差 $e(t) = r(t) - y(t)$ は有界で、繰返し周期の意味でとったその L_2 ノルムは 0 に収束する。すなわち、ある正数 α に対して、

$$\|e(t)\| \leq \alpha < \infty, \quad 0 \leq t \quad (6)$$

が成立し、

$$\int_{(k-1)L}^{kL} \|e(t)\|^2 dt \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad (7)$$

となる。

(証明) まず、(7)式が成立するためには、 $e(t)$ が L_2 関数であれば十分であることに注意しよう。なぜなら、

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|e(\tau)\|^2 d\tau \\ &= \int_0^L \|e(\tau)\|^2 d\tau + \int_L^{2L} \|e(\tau)\|^2 d\tau \\ &+ \cdots + \int_{(k-1)L}^{kL} \|e(\tau)\|^2 d\tau + \int_{kL}^t \|e(\tau)\|^2 d\tau, \\ & \quad kL < t \leq (k+1)L \quad (8) \end{aligned}$$

と表わせるから、左辺が $t \rightarrow \infty$ のとき有界（つまり、 $e(t)$ が L_2 関数）であるためには、少なくとも(7)式が成立していなければならないからである。この事実より、ここでは、 $e(t)$ が有界であることと L_2 関数であることを示す。

Fig. 3 Repetitive control system

さて、Fig. 3 の制御系全体は、

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ u(t) &= \begin{cases} e(t) + u_0(t), & 0 \leq t < L \\ e(t) + u(t-L), & L \leq t \end{cases} \\ e(t) &= r(t) - y(t) \end{aligned} \quad (9)$$

と表わせる。ただし、 $u_0(t)$, ($0 \leq t < L$) は、補償器 (compensator) のむだ時間要素 $e^{-Ls}I$ の有界な m 次元初期関数ベクトルである。ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= y(t) - r(t) = -e(t) \\ \tilde{x}(t) &= x(t) - z(t) \\ \tilde{u}(t) &= u(t) - \gamma(t) \end{aligned} \quad (10)$$

で定義される変数 $\tilde{y}(t)$, $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$ を導入しよう。

(3)式と(9)式より、これらの変数は

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= C\tilde{x}(t) \\ \tilde{u}(t) &= \begin{cases} e(t) + \tilde{u}_0(t), & 0 \leq t < L \\ e(t) + \tilde{u}(t-L), & L \leq t \end{cases} \\ e(t) &= -\tilde{y}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

を満たすことがわかる。ただし、

$$\tilde{u}_0(t) = u_0(t) - \gamma_0(t) \quad (12)$$

である。こうして導かれた(11)式は、Fig. 4 のフィードバック系を表わしていると考えることができる。Fig. 4 は Fig. 3 と同じ構成だが、参照入力信号が零である点が異なっている。しかし、Fig. 4 の $e(t)$ のふるまいは Fig. 3 の追従誤差 $e(t)$ とまったく同じであることを注意しよう。

さて、Fig. 4 において、 S_2 は定理の条件より強正実である。したがって、 S_1 が超安定ブロックであれば、この制御系は補題の条件を満たす。 S_1 が超安定ブロックであることを示すには、このブロックだけを取り出し、入力 $e(t)$ としては有限時刻では有界な任意の関数、むだ時間要素の初期関数 $\tilde{u}_0(t)$ としては任意の有界関数を考えなければならない。そして、(11)式の関係は使わず、 S_1 の入出力関係

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} e(t) + \tilde{u}_0(t), & 0 \leq t < L \\ e(t) + \tilde{u}(t-L), & L \leq t \end{cases} \quad (13)$$

だけを用いなければならない。

まず、 $0 < t \leq L$ の場合から考えよう。この場合は、

Fig. 4 Error system equivalent to Fig. 3

簡単に,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \tilde{u}^T(\tau) e(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^t [e(\tau) + \tilde{u}_0(\tau)]^T e(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^t \left[e(\tau) + \frac{1}{2} \tilde{u}_0(\tau) \right]^T \left[e(\tau) + \frac{1}{2} \tilde{u}_0(\tau) \right] d\tau \\
 &\quad - \frac{1}{4} \int_0^t \tilde{u}_0^T(\tau) \tilde{u}_0(\tau) d\tau \\
 &\geq -\frac{1}{4} \int_0^L \tilde{u}_0^T(\tau) \tilde{u}_0(\tau) d\tau \quad (14)
 \end{aligned}$$

と計算できる。つぎに、 $L < t$ の場合は、

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \tilde{u}^T(\tau) e(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^t \tilde{u}^T(\tau) [\tilde{u}(\tau) - \tilde{u}(\tau - L)] d\tau \\
 &\quad - \int_0^L \tilde{u}^T(\tau) \tilde{u}_0(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^t \tilde{u}^T(\tau) [\tilde{u}(\tau) - \tilde{u}(\tau - L)] d\tau \\
 &\quad - \int_0^L [e(\tau) + \tilde{u}_0(\tau)]^T \tilde{u}_0(\tau) d\tau \quad (15)
 \end{aligned}$$

と変形しよう。ここでは、 $\tilde{u}(\tau) = 0$, $\tau < 0$ であることを使った。この右辺第 1 項は、 $\tilde{u}(\tau)$ を時刻 t で打ち切った関数 $\tilde{u}_t(\tau)$ のフーリエ変換 $\hat{\tilde{u}}_t(i\omega)$ を使って、パーセバルの公式により、

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \tilde{u}^T(\tau) [\tilde{u}(\tau) - \tilde{u}(\tau - L)] d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_t^T(\tau) [\tilde{u}_t(\tau) - \tilde{u}_t(\tau - L)] d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\tilde{u}}_t^T(-i\omega) [I - e^{-i\omega L} I] \hat{\tilde{u}}_t(i\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} [1 - e^{-i\omega L}] \hat{\tilde{u}}_t^T(-i\omega) \hat{\tilde{u}}_t(i\omega) d\omega \quad (16)
 \end{aligned}$$

と表わすことができる。明らかに $\hat{\tilde{u}}_t^T(-i\omega) \hat{\tilde{u}}_t(i\omega) \geq 0$, $\operatorname{Re}(1 - e^{-i\omega L}) \geq 0$ であるから、この式より、(15)式が

$$\int_0^t e^T(\tau) \tilde{u}(\tau) d\tau \geq -\int_0^L [e(\tau) + \tilde{u}_0(\tau)]^T \tilde{u}_0(\tau) d\tau \quad (17)$$

を意味することがいえる。したがって、

$$\begin{aligned}
 \kappa_0^2 &= \max \left\{ \frac{1}{4} \int_0^L \tilde{u}_0^T(\tau) \tilde{u}_0(\tau) d\tau, \right. \\
 &\quad \left. \left| \int_0^L [e(\tau) + \tilde{u}_0(\tau)]^T \tilde{u}_0(\tau) d\tau \right| \right\} \quad (18)
 \end{aligned}$$

について、 S_1 の入出力関係は Popov の積分不等式を満たしている。

以上のように、 S_1 は超安定ブロック、 S_2 は強正実

であるから、Fig. 4 のフィードバック系は補題の条件を満足する。したがって、 $x(t)$ は有界かつ L_2 関数であり、その結果(11)式より $\tilde{y}(t)$, $e(t)$ も同様であることがいえる。ゆえに、Fig. 3 においても追従誤差 $e(t)$ は有界で L_2 関数である。したがって、この証明の最初に述べたことにより、定理 1 が成立することが示された。(証明終)

次章で述べるように、この定理の条件は入出力間直結経路をもたない制御対象でも満たすことができる。この事実は、正則ゲインをもつ入出力間直結経路の必要性を示した文献 2) の結果と矛盾するようにみえるかもしれない。しかし、両者を詳しく比較するとけっして矛盾しない。文献 2) で示されたことは、繰返し制御系が漸近安定（その極が開左半面に存在し、虚軸からある一定の距離以上は離れている）であるための入出力間直結経路の必要性である。繰返し制御系が漸近安定であれば、周期 L の任意の参照入力に対して追従誤差の絶対値が 0 に収束する。それに対して、定理 1 は制御系の漸近安定性を述べてはいない。保証していることは、追従誤差は有界で、繰返し周期の意味でとったその L_2 ノルムが 0 に収束することである。しかも、それは参照入力信号のクラスを制限していったことであり、その絶対値が 0 に収束することは保証されていない。

本論文の結果では制御系は漸近安定でないが、不安定というわけではない。詳しくは述べないが、極は開左半面に存在する（もし、そうでなければ、追従誤差の有界性に矛盾する）。それが虚軸に無限に近づくように分布しているため、漸近安定ではないのである。虚軸へ近づくのは大きな虚数部をもつ極であり、そのため、Fig. 4 のシステムにおいて各信号の高周波成分の減衰がいえない。そのため、追従誤差 $e(t)$ の絶対値が 0 に収束することが示されていないのである。ただ、制御対象が低域ろ波特性をもつため、その出力部では高周波成分も減衰していると期待することもでき、追従誤差の絶対値が 0 に収束することを証明できる可能性もある。そのためには、より精密な議論が必要であろう。

これまでの議論では、入力の収束性について何も述べなかった。 $e(t) = u(t) - u(t - L)$ であるから、繰返し周期ごとの入力の変化分は、偏差と同様に収束する。しかし、現状では、これ以上のことはいえない。この問題は、追従誤差が絶対値の意味でも収束するののかという問題とも関連があると考えられる。

4. 強正実な制御対象のクラス

定理1で与えた繰返し制御系の構成可能条件(強正実性)は, 入出力間直結経路をもたない

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + u \\ y &= x\end{aligned}\quad (19)$$

のようなシステムでも満たすことができる. 実際, このシステムの場合,

$$G(i\omega) + G(-i\omega) = 2/(1 + \omega^2) > 0 \quad (20)$$

である. したがって, 繰返し制御ができる対象は確かに広がっている. その広がった制御対象のクラスをより明確に把握するために, 強正実なシステムの性質を少し詳しく見よう.

よく知られた正実性の補題⁹⁾によれば, $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ が強正実であるとき, 十分に小さい $\delta > 0$ に対して,

$$\begin{aligned}(A + \delta I)^T P + P(A + \delta I) &= -JJ^T \\ PB &= C^T\end{aligned}\quad (21)$$

が成立するような対称正定行列 $P > 0$ と適当な行列 J が存在する⁹⁾. この第2式を用いれば,

$$CB = B^T P B > 0 \quad (22)$$

であるから, 制御対象の係数行列 C と B の積は対称行列で, 正定でなければならない. したがって, 当然, CB は正則であり, $G(s)$ は最大個数, つまり $n-m$ 個の零点をもつ伝達関数行列ということになる. 1入力1出力システムの場合, これは相対次数(分母と分子の多項式の次数差)が1であることを意味する. 入出力間直結経路があるシステムの伝達関数の相対次数は0であるから, 定理1は繰返し制御系を構成できる制御対象のクラスをこれまでより相対次数にして1だけ上げたことになる.

(21)式からはつぎの式も導かれる.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sI - A^T & C^T \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2(\sigma + \delta)P + JJ^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (23)$$

ただし, $\sigma = \operatorname{Re} s$ である. いま, (1)式のシステムが複素閉右半面に零点 $z (\operatorname{Re} z \geq 0)$ をもったとしよう. この z に対して,

$$\begin{bmatrix} zI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (24)$$

が成立するような n 次元ベクトル ξ と m 次元ベクトル η が存在する¹⁰⁾. (1)式のシステムが可観測, B は列最大階数をもつとの仮定より, これらのベクトルはいずれも非零でなければならない. そこで, $s = z$ とおいて(23)式の全体に左から $[\xi^T \ \eta^T]$ を, 右から

$[\xi^T \ \eta^T]^T$ を掛ける. すると, その左辺は0, 右辺は正となって矛盾が生じる. したがって, (1)式の制御対象が強正実であるためには, その零点は複素閉右半面にあってはならない. すなわち, 制御対象は少なくとも最小位相(零点はすべて複素閉左半面に存在するという強い意味で)でなければならない.

それでは, 逆に, 最小位相で積 CB が対称正定なシステムは強正実かという, そうとは限らない. たとえば, 零点が -1 で, $CB = 1$ の

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1] x\end{aligned}\quad (25)$$

の場合,

$$\begin{aligned}G(i\omega) + G(-i\omega) \\ = 2(1 - 0.5\omega^2)/(1 - 1.75\omega^2 + \omega^4)\end{aligned}\quad (26)$$

だから, 強正実ではない. したがって, 本論文の方法をそのまま適用したのでは, 繰返し制御系は構成できない.

このような強正実でないシステムが制御対象の場合, プロパーで安定な直列補償やフィードバック補償をほどこすことによって, 強正実にすることができるであろうか. 最小位相でないシステムがそのような補償によって最小位相になることはないから, 非最小位相システムを強正実にすることはできない. また, 正則でない積 CB をそのような補償によって正則にする(相対次数2以上のものを1にする)こともできないから, CB が非正則なシステムを強正実にすることもできない. したがって, 強正実にすることができる可能性があるのは最小位相で, 正則な積 CB をもつシステムだけである.

そのようなシステムに対しては, Fig. 5 のように, 前置補償器として

$$K(s) = G^{-1}(s)/(s+1) \quad (27)$$

を用いて, $G(s)K(s)$ を強正実にすることができる. ここに, $G(s)$ は安定, 最小位相かつその相対次数は1だから, $K(s)$ が安定でプロパーであることは保証される. また, $K(s)$ の逆行列も安定でプロパーである. ゆえに, $G^{-1}(s)f(s)$ の逆ラプラス変換が周期 L の有界関数と0に減衰する関数の和であれば, $[G(s)K(s)]^{-1}f(s)$ についても同様であり, その逆も成立す

Fig. 5 A compensation for strict positive realness

る。その結果、追従する参照入力信号のクラスが、制御対象自身によって決まる 2 章で述べたものであることに変わりはない。

このように、制御対象が安定かつ最小位相で、積 CB が正則ならば、繰返し制御系を構成することができることがわかった。そのための補償として (27) 式の形の前置補償器を用いることが適切か、もっと適切な補償がありうるのかは今後の課題として考えていくべき問題である。

定理 1 の条件が満たされ、制御対象自身が強正実であるとき、当然 $G^{-1}(s)f(s)$ と $[G(s)K(s)]^{-1}f(s)$ の逆ラプラス変換について上で述べた関係が成立する。したがって、与えられた $r(t)$ が参照入力信号としうるものかという判定は、 $(s+1)f(s)$ の逆ラプラス変換を調べることによって、一般性を失うことなく、実行できるのである。 $f(s)$ の逆ラプラス変換 $r(t)$ はもともと周期 L の有界関数だから、この事実は、結局 $sf(s)$ の逆ラプラス変換 $\dot{r}(t)$ も有界周期関数であれば、 $r(t)$ を参照入力信号としてよいことを意味している。

以上の議論をまとめて、定理とする。

《定理 2》 定理 1 の意味で繰返し制御系が構成できるための参照入力信号のクラスは、有界な時間微分をもつ周期 L の任意の関数である。また、制御対象のクラスは、Fig. 3 の制御系に Fig. 5 のように前置補償器を用いることまで考えると、安定（または、すでに安定化されている）かつ最小位相で、 CB が正則な任意のシステムである。

5. 速応性の改善

定理 1 では、制御対象 $G(s)$ が強正実ならば、繰返し制御系が構成できることを述べた。その制御系の速応性を改善するには補償器のゲインを大きくすることが考えられるが、本章では、そうしても追従誤差の収束が乱されないことを示す。

《定理 3》 Fig. 6 の制御系において、参照入力信号 $r(t)$ は (3) 式を満たすとする。このとき、

- (1) 制御対象が強正実、かつ
- (2) K が対称正定行列

ならば追従誤差 $e(t)$ は有界で、繰返し周期の意味で

Fig. 6 Repetitive control system with tuning gain

Fig. 7 Error system equivalent to Fig. 6

とったその L_2 ノルムは 0 に収束する。

(証明) 定理 1 の場合と同様に、Fig. 6 の制御系の追従誤差 $e(t)$ のふるまいは、Fig. 7 の $e(t)$ とまったく同じであることがわかる。したがって、Fig. 7 の S_1 が超安定ブロックであることを示せば、定理 3 は証明できたことになる。 S_1 が超安定ブロックであることの証明も定理 1 の場合と同様で、

$$\kappa_0^2 = \max \left\{ \frac{1}{4} \int_0^L \tilde{u}_0^T(\tau) K^{-1} \tilde{u}_0(\tau) d\tau, \left| \int_0^L [K e(\tau) + \tilde{u}_0(\tau)]^T K^{-1} \tilde{u}_0(\tau) d\tau \right| \right\} \quad (28)$$

について、 S_1 が Popov の積分不等式を満たすことを示すことができる。(証明終)

この定理の意味するところは、制御対象が強正実でありさえすれば、Fig. 6 の制御系においてゲイン行列 K を対称正定の範囲で変えても、出力は参照入力に追従するということである。この K の自由度を速応性の改善に使うことができる。実際、のちの例題で示すように K を大きくすることにより、それは可能である。

6. 外乱に対する考察

定理 1, 3 からわかるように、Fig. 3 および Fig. 6 の繰返し制御系は、制御対象の特性が変化してもそれが強正実である限り、参照入力に追従する。この意味で、通常のサーボ系と同様にロバストである。また、制御対象の入力と出力に外乱が加わっても、それらの外乱がつぎの定理で与えられるクラスに属していれば、やはりロバストであることを示すことができる。

《定理 4》 Fig. 8 の制御系において、参照入力信号 $r(t)$ は (3) 式を満たすとする。このとき外乱 $d_1(t)$ 、

Fig. 8 Repetitive control system under disturbances.

$d_2(t)$ のクラスがそれぞれ

d_1 : 周期 L の有界な繰返し関数のクラス

d_2 : 参照入力信号 $r(t)$ と同じクラス

であれば, 定理3の条件のもとで, 追従誤差 $e(t)$ は有界かつ繰返し周期の意味でとったその L_2 ノルムは0に収束する.

この定理の証明は, 定理3の証明と同様であるから省略する. 外乱の影響は繰返し補償器の初期関数の変化として等価的に扱える.

7. シミュレーション

伝達関数

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} \quad (29)$$

をもつ1入力1出力の制御対象を考える.

$$G(i\omega) + G(-i\omega) = \frac{12+8\omega^2}{\omega^4+13\omega^2+36} \quad (30)$$

であるから, このシステムは強正実である.

この制御対象への参照入力信号 $r(t)$ として,

$$r_0(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad (31)$$

を1周期とする, 周期 $L=2$, 高さ1の三角波の繰返し信号が指定されたとしよう. この信号の微分は

$$\dot{r}_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad (32)$$

を1周期とする矩形波だから, 4章で述べたように, 参照入力信号としての資格を有する.

この参照入力信号を(29)式を制御対象とする Fig. 6の制御系に加え, 直列ゲイン K の大きさを変えて行った2種のシミュレーション結果を Fig. 9, 10に示す. ただし, 制御対象と繰返し補償器の初期状態はいずれも0とした. この結果からわかるように, ゲイン K を大きくすることによって, 速応性が改善さ

Fig. 9 Simulation result: tuning gain $K=1$

Fig. 10 Simulation result: tuning gain $K=5$

れている.

8. おわりに

入出力間直結経路をもたない制御対象に対して, 追従誤差が有界かつ繰返し周期の意味でとったその L_2 ノルムが0に収束するような制御系が構成できるための条件を与えた. そこで用いた基本的考えは, 有界な入力による限り制御対象の出力に発生しえない信号を参照入力信号のクラスから除いておくというものである. これは, 実際に物理システムを制御する場合, 当然のことで, なんら制約とはならない. こうすることによって, 強正実な制御対象の場合に, 繰返し制御系が構成できることが明らかになった.

本研究に関して有益なご議論をいただいた東京工業大学原 辰次氏, 京都大学山本 裕氏, 大阪大学藤井隆雄氏に心より感謝します. また, 親切なご指摘をしてくださった校関係員の方々に感謝します.

参考文献

- 1) 井上, 中野, 久保, 松本, 馬場: 陽子シンクロtron電磁石電源の繰返し運転における高精度制御, 電気学会論文誌C, **100-7**, 234/240 (1980)
- 2) 山本, 原: 繰返し制御系の内部モデル原理と安定化可能性, 計測自動制御学会論文集, **22-8**, 830/834 (1986)
- 3) 原 辰次: 繰返し制御, 計測と制御, **25-12**, 1111/1119 (1986)
- 4) 原, 小俣, 中野: 繰返し制御系の安定条件と設計法, 計測自動制御学会論文集, **22-1**, 36/42 (1986)
- 5) 原, 山本: 多変数繰返し制御系の安定性—安定条件と安定化補償器のクラス—, 計測自動制御学会論文集, **22-12**, 1256/1261 (1986)
- 6) 平井, 池田, 上月, 柏木, 高野, 中川: ロボットアームの加減速制御, システムと制御, **29-4** (別冊), 27/30 (1985)
- 7) V.M. Popov: Hyperstability of Control Systems, Springer-Verlag (1973)
- 8) B.D.O. Anderson: A Simplified Viewpoint of Hyperstability, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-**

13-3, 292/294 (1968)

- 9) B.D.O. Anderson: A System Theory Criterion for Positive Real Matrices, SIAM J. Control, 5-2, 171/182 (1967)

- 10) 須田信英: 極と零点 II, 計測と制御, 17-8, 622/635 (1978)

《付録》 補題の証明

$G(s)$ が強正実であるから, 4 章で述べたように, 十分に小さな $\delta > 0$ に対して,

$$P(A + \delta I) + (A + \delta I)^T P = -JJ^T$$

$$PB = C^T \quad (\text{A. 1})$$

となるような, 正定行列 $P = P^T > 0$ と適当な行列 J が存在する⁹⁾. この P を用いて,

$$V = x^T P x \quad (\text{A. 2})$$

なる正定関数を考えよう. 制御対象のふるまい, つまり (1) 式について $\dot{V}$ を時間微分し, (A. 1) 式を代入すると,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -2\delta x^T P x - x^T J J^T x + 2u^T C x \\ &\leq -2\delta V + 2u^T y \end{aligned} \quad (\text{A. 3})$$

を得る. この両辺を積分し,

$$W(t) = \int_0^t V(\tau) d\tau, \quad V(t) = \dot{W}(t) \quad (\text{A. 4})$$

とおくと,

$$0 \leq V(t) = \dot{W}(t)$$

$$\leq -2\delta W(t) + 2 \int_0^t u^T(\tau) y(\tau) d\tau + V(0) \quad (\text{A. 5})$$

となる. そして, (5) 式と $e(t) = -y(t)$ から得られる

$$\int_0^t u^T(\tau) y(\tau) d\tau \leq \kappa_0^2, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{A. 6})$$

を用いて,

$$0 \leq V(t) = \dot{W}(t) \leq -2\delta W(t) + 2\kappa_0^2 + V(0) \quad (\text{A. 7})$$

を得る.

さて, (A. 7) 式は $V(t)$ が有界であることを保証している. 行列 P が正定であるから, (A. 2) 式より, これは $x(t)$ が有界であることを意味する. つぎに, (A. 7) 式を解くと,

$$\begin{aligned} W(t) &\leq e^{-2\delta t} W(0) + \int_0^t e^{-2\delta(t-\tau)} [2\kappa_0^2 + V(0)] d\tau \\ &= e^{-2\delta t} W(0) + (1 - e^{-2\delta t}) [2\kappa_0^2 + V(0)] / 2\delta \end{aligned} \quad (\text{A. 8})$$

が得られる. これより $W(t)$ は有界だから, やはり行列 P の正定性と (A. 2), (A. 4) 式より, $x(t)$ は L_2 関数である. (証明終)