様相概念に基づくファジィ選好関係の拡張とその性質[†]

乾 口 雅 弘*・市 橋 秀 友*・田 中 英 夫*

The Extension of Fuzzy Preference Relation Based on the Modal Concept and Its Properties

Masahiro INUIGUCHI*, Hidetomo ICHIHASHI* and Hideo TANAKA*

Fuzzy decision method deals with the ambiguous decision problems applying fuzzy sets theory. It is an important issue for fuzzy decision making to define the preference relation between outcomes represented by fuzzy sets.

In this paper, based on the model concept such as possibility and necessity, fuzzy preference relation between elements is extended to six relations between fuzzy sets. The preference relation extended by Orlovsky and Baldwin and Guild is a special case of these relations. The proposed relations are corresponding to the rankings of fuzzy numbers proposed by Dubois and Prade when the fuzzy preference relation is the large and small relation. The properties of these six preference relations are investigated. These relations preserve the properties between possibility and necessity, which is satisfied in modal logic, for the fuzzy sets whose membership functions attain 1. Since the preference relations extended in this paper are all based on the modal concept, it is possible to obtain the decision procedures reflecting the various modalities of decision maker.

Key Words: possibility, necessity, fuzzy preference relation

1. はじめに

ファジィ意思決定問題には、意思決定者の選好態度のあいまいさを扱うものと、起こりうる結果のあいまいさあるいは、代替案の評価のあいまいさを扱うもの

に大別できる。

前者は、さらに意思決定者の目標や制約に対する希求水準のあいまいさをファジィ目標、ファジィ制約として表わすもの¹⁾と、意思決定者の選好判断のあいまいさをファジィ選好関係として表わすもの^{2), 3)}とに分類できる。しかし、ファジィ目標、ファジィ制約は条件付のファジィ選好関係と考えることができ、これらはいずれもファジィ選好関係を有する意思決定問題とみなすことができる。

後者には、起こりうる結果のあいまいさを可能性分布として表わし、可能性分布間の選好を考えるもの^{4)~6)}と、効用関数にファジィパラメータを導入し、各代替案の効用値をファジィ数として与え、その大小関係を考えるもの^{7)~9)}とがある。可能性分布は一種のファジィ集合と考えることができ、これらはいずれもファジィ集合間の選好を考える問題とみなすことができる。

また、後者にはファジィ選好関係を考慮したもの^{10), 11)}もあり、これらは一般的なファジィ意思決定問題と考えられる。一般的なファジィ意思決定問題では、要素間に与えられたファジィ選好関係をファジィ集合間の関係へ拡張することが重要である。

Orlovsky¹⁰⁾ および Baldwin と Guild¹¹⁾ は、拡張原理と同様な考え方により、要素間のファジィ選好関係をファジィ集合間の関係へ拡張している。また、1次元実数空間上の大小関係について、Dubois と Prade⁴⁾ は Zadeh¹²⁾ の可能性理論に様相概念を導入し、四つの立場からファジィ数の大小関係を定義している。通常、様相概念は、真理様相、認識様相、規範様相、存在様相に分類される¹³⁾が、ここでいう様相概念は存在様相によるものである。したがって、ここでいう可能性、必然性は、様相論理における可能性、必然性に対応するばかりでなく、述語論理における存在性、全称性に対応している。

† 第3回ファジィ・システム・シンポジウムで発表 (昭 62・6)

* 大阪府立大学工学部 堺市百舌鳥梅町4丁 804

* College of Engineering, University of Osaka Prefecture, Sakai

(Received August 14, 1987)

(Revised January 18, 1988)

1 次元実数空間上で、ファジィ選好関係が通常の大小関係である場合には、実数の閉区間の大小関係を四つの立場から定義することができる⁴⁾が、Orlovsky および Baldwin と Guild による拡張では一つの立場しか考慮されておらず、多様な意思決定者の態度を表わすモデルとしては不十分である。また、Dubois と Prade の方法は、1 次元実数空間上のファジィ集合の大小関係による順序付けに適していることが報告されている¹⁴⁾が、多属性意思決定問題を取り扱うためには、任意の空間上のファジィ集合およびファジィ選好関係が取り扱えるように拡張する必要がある。

本研究では、ファジィ意思決定問題の基礎的研究として、Dubois と Prade の方法に則し、要素間のファジィ選好関係をファジィ集合間の関係へ拡張する。また、拡張された関係の性質を調べ、様相論理における可能性と必然性あるいは、述語論理における存在性と全称性の関係の保存について検討する。

2. 様相概念によるファジィ選好関係の拡張

2.1 通常の集合および通常の選好関係の場合

いま、全体集合 U の任意の要素 x, y について、通常の選好関係 $\mathcal{P}$ (以後 $\mathcal{P}(x, y)$ と記し、 x を y より選好することを示す) が与えられているとする。このとき、選好関係 $\mathcal{P}(x, y)$ を U の任意の集合 A, B の選好関係に拡張する。

以下では、選好関係 $\mathcal{P}$ の特性関数を $\chi_{\mathcal{P}}$ と記し、集合 A, B の特性関数を χ_A, χ_B と記す。

まず、 U のある要素 x とある部分集合 B との選好関係の成立を議論すると、つぎの四つの場合が考えられる。

(a) $\chi_{\mathcal{P}}(x, y)=1$ となる B の要素 y が存在する。すなわち、 x を B より選好することは可能である。特性関数を用いて示せば、

$$\sup \{\chi_B(y) \wedge \chi_{\mathcal{P}}(x, y)\} = 1 \quad (2.1)$$

となる。ただし、 $\wedge$ は min を表わす。

(b) B のすべての要素 y に対して、 $\chi_{\mathcal{P}}(x, y)=1$ となる。すなわち、 x を B より選好することは必然である。特性関数を用いて示せば、

$$\inf_y \{(1 - \chi_B(y)) \vee \chi_{\mathcal{P}}(x, y)\} = 1 \quad (2.2)$$

となる。ただし、 $\vee$ は max を表わす。

(c) $\chi_{\mathcal{P}}(y, x)=1$ となる B の要素 y が存在する。すなわち、 B を x より選好することは可能である。特性関数を用いて示せば、

$$\sup_y \{\chi_B(y) \wedge \chi_{\mathcal{P}}(y, x)\} = 1 \quad (2.3)$$

となる。

(d) B のすべての要素 y に対して、 $\chi_{\mathcal{P}}(y, x)=1$ となる。すなわち、 B を x より選好することは必然である。特性関数を用いて示せば、

$$\inf_y \{(1 - \chi_B(y)) \vee \chi_{\mathcal{P}}(y, x)\} = 1 \quad (2.4)$$

となる。

以上の議論より、 U の任意の要素 x と任意の部分集合 B との選好関係を特性関数を用いて、それぞれ、つぎのように定義できる。

$$\chi_{\Diamond \mathcal{P}}(x, B) \triangleq \sup_y \{\chi_B(y) \wedge \chi_{\mathcal{P}}(x, y)\} \quad (2.5)$$

$$\chi_{\Box \mathcal{P}}(x, B) \triangleq \inf_y \{(1 - \chi_B(y)) \vee \chi_{\mathcal{P}}(x, y)\} \quad (2.6)$$

$$\chi_{\Diamond \mathcal{P}}(B, x) \triangleq \sup_y \{\chi_B(y) \wedge \chi_{\mathcal{P}}(y, x)\} \quad (2.7)$$

$$\chi_{\Box \mathcal{P}}(B, x) \triangleq \inf_y \{(1 - \chi_B(y)) \vee \chi_{\mathcal{P}}(y, x)\} \quad (2.8)$$

(2.5)～(2.8)式は、それぞれ、“ x を B より可能的に選好する関係”、“ x を B より必然的に選好する関係”、“ B を x より可能的に選好する関係”、“ B を x より必然的に選好する関係”と考えられる。また、 B を固定して考えると、(2.5)～(2.8)式は、それぞれ、“ B より可能的に選好する集合”、“ B より必然的に選好する集合”、“ B に可能的に選好される集合”、“ B に必然的に選好される集合”の特性関数と考えることもできる。

つぎに、これらの選好関係を用いて U の二つの部分集合 A, B の選好関係の成立を議論すると、つぎの六つの場合が考えられる。

(e) $\chi_{\Diamond \mathcal{P}}(x, B)=1$ となる A の要素 x が存在する ($\chi_{\Diamond \mathcal{P}}(A, y)=1$ となる B の要素 y が存在する)。すなわち、 A を B より可能的に選好することは可能である (B が A に可能的に選好されることは可能である)。特性関数を用いて示せば、

$$\begin{aligned} & \sup_x \{\chi_A(x) \wedge \chi_{\Diamond \mathcal{P}}(x, B)\} \\ &= \sup_x \{\chi_A(x) \wedge \sup_y \{\chi_B(y) \wedge \chi_{\mathcal{P}}(x, y)\}\} \\ &= \sup_{x, y} \{\chi_A(x) \wedge \chi_B(y) \wedge \chi_{\mathcal{P}}(x, y)\} \\ &= \sup_y \{\chi_B(y) \wedge \sup_x \{\chi_A(x) \wedge \chi_{\mathcal{P}}(x, y)\}\} \\ &= \sup_y \{\chi_B(y) \wedge \chi_{\Diamond \mathcal{P}}(A, y)\} = 1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる。

(f) $\chi_{\Box \mathcal{P}}(x, B)=1$ となる A の要素 x が存在する。すなわち、 A を B より必然的に選好することは可能である。特性関数を用いて示せば、

$$\begin{aligned} & \sup_x \{\chi_A(x) \wedge \chi_{\Box \mathcal{P}}(x, B)\} \\ &= \sup_x \{\chi_A(x) \wedge \inf_y \{(1 - \chi_B(y)) \vee \chi_{\mathcal{P}}(x, y)\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_x \inf_y \{ \chi_A(x) \wedge \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \} \} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{2.10}$$

となる。

(g) A のすべての要素 x に対して, $\chi_{\oplus \mathcal{F}}(x, B) = 1$ となる。すなわち, A を B より可能的に選好することは必然である。特性関数を用いて示せば,

$$\begin{aligned}
&\inf_x \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \chi_{\oplus \mathcal{F}}(x, B) \} \\
&= \inf_x \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \sup_y \{ \chi_B(y) \wedge \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \} \} \\
&= \inf_x \sup_y \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \{ \chi_B(y) \wedge \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \} \} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{2.11}$$

となる。

(h) A のすべての要素 x に対して, $\chi_{\sqcap \mathcal{F}}(x, B) = 1$ となる (B のすべての要素 y に対して, $\chi_{\sqcap \mathcal{F}}(A, y) = 1$ となる)。すなわち, A を B より必然的に選好することは必然である (B が A に必然的に選好されることは必然である)。特性関数を用いて示せば,

$$\begin{aligned}
&\inf_x \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \chi_{\sqcap \mathcal{F}}(x, B) \} \\
&= \inf_x \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \inf_y \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \} \} \\
&= \inf_{x, y} \{ (1 - \chi_A(x)) \vee (1 - \chi_B(y)) \vee \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \} \\
&= \inf_y \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \inf_x \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \} \} \\
&= \inf_y \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \chi_{\sqcap \mathcal{F}}(A, y) \} = 1
\end{aligned} \tag{2.12}$$

となる。

(i) B のすべての要素 y に対して, $\chi_{\oplus \mathcal{F}}(A, y) = 1$ となる。すなわち, B が A に可能的に選好されることは必然である。特性関数を用いて示せば,

$$\begin{aligned}
&\inf_y \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \chi_{\oplus \mathcal{F}}(A, y) \} \\
&= \inf_y \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \sup_x \{ \chi_A(x) \wedge \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \} \} \\
&= \inf_y \sup_x \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \{ \chi_A(x) \wedge \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \} \} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{2.13}$$

となる。

(j) $\chi_{\sqcap \mathcal{F}}(A, y) = 1$ となる B の要素 y が存在する。すなわち, B が A に必然的に選好されることは可能である。特性関数を用いて示せば,

$$\begin{aligned}
&\sup_y \{ \chi_B(y) \wedge \chi_{\sqcap \mathcal{F}}(A, y) \} \\
&= \sup_y \{ \chi_B(y) \wedge \inf_x \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_y \inf_x \{ \chi_B(y) \wedge \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \} \} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{2.14}$$

となる。

以上の議論より, U の任意の部分集合 A, B の選好関係をそれぞれ, つぎのように定義できる。

$$\begin{aligned}
\chi_{\oplus \oplus \mathcal{F}}(A, B) &= \chi_{\oplus \oplus \mathcal{F}}(A, B) \\
&\triangleq \sup_{x, y} \{ \chi_A(x) \wedge \chi_B(y) \wedge \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\chi_{\oplus \sqcap \mathcal{F}}(A, B) \triangleq \sup_x \inf_y \{ \chi_A(x) \wedge \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \} \} \tag{2.16}$$

$$\chi_{\sqcap \oplus \mathcal{F}}(A, B) \triangleq \inf_x \sup_y \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \{ \chi_B(y) \wedge \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \} \} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{\sqcap \sqcap \mathcal{F}}(A, B) &= \chi_{\sqcap \sqcap \mathcal{F}}(A, B) \\
&\triangleq \inf_{x, y} \{ (1 - \chi_A(x)) \vee (1 - \chi_B(y)) \vee \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\chi_{\sqcap \oplus \mathcal{F}}(A, B) \triangleq \inf_y \sup_x \{ (1 - \chi_B(y)) \vee \{ \chi_A(x) \wedge \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \} \} \tag{2.19}$$

$$\chi_{\oplus \sqcap \mathcal{F}}(A, B) \triangleq \sup_y \inf_x \{ \chi_B(y) \wedge \{ (1 - \chi_A(x)) \vee \chi_{\mathcal{F}}(x, y) \} \} \tag{2.20}$$

(2.15)~(2.20)式はそれぞれ, “ A を B より可能的に選好することが可能である関係”, “ A を B より必然的に選好することが可能である関係”, “ A を B より可能的に選好することが必然である関係”, “ A を B より必然的に選好することが必然である関係”, “ B が A に可能的に選好されることが必然である関係”, “ B が A に必然的に選好されることが可能である関係”と考えることができる。

2.2 ファジィ集合およびファジィ選好関係の場合

同様に, ファジィ選好関係 $\tilde{\mathcal{F}}(x, y)$ を U の任意のファジィ集合, $\tilde{A}, \tilde{B}$ の関係に拡張すると, メンバシップ関数が特性関数に対応していることから, (2.5)~(2.8)式および(2.15)~(2.20)式において特性関数 $\chi_A, \chi_B, \chi_{\mathcal{F}}$ をそれぞれ, メンバシップ関数 $\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}, \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}$ に置き換えればよい。したがって, それぞれつぎのように定義できる。

$$\mu_{\oplus \oplus \tilde{\mathcal{F}}}(x, \tilde{B}) \triangleq \sup_y \{ \mu_{\tilde{B}}(y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y) \} \tag{2.21}$$

$$\mu_{\oplus \sqcap \tilde{\mathcal{F}}}(x, \tilde{B}) \triangleq \inf_y \{ (1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y) \} \tag{2.22}$$

$$\mu_{\sqcap \oplus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, x) \triangleq \sup_y \{ \mu_{\tilde{B}}(y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(y, x) \} \tag{2.23}$$

$$\mu_{\sqcap \sqcap \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, x) \triangleq \inf_y \{ (1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(y, x) \} \tag{2.24}$$

$$\mu_{\oplus \oplus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\oplus \oplus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B})$$

$$\triangleq \sup_{x,y} \{ \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \wedge \mu_{\tilde{\Phi}}(x,y) \} \quad (2.25)$$

$$\mu_{\Diamond\Box\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \triangleq \sup_x \inf_y \{ \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \{ (1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \mu_{\tilde{\Phi}}(x,y) \} \} \quad (2.26)$$

$$\mu_{\Box\Diamond\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \triangleq \inf_x \sup_y \{ (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \vee \{ \mu_{\tilde{B}}(y) \wedge \mu_{\tilde{\Phi}}(x,y) \} \} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Box\Box\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \mu_{\Box\Box\tilde{\Phi}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \\ &\triangleq \inf_{x,y} \{ (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \vee (1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \mu_{\tilde{\Phi}}(x,y) \} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\mu_{\Box\Diamond\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \triangleq \inf_x \sup_y \{ (1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \{ \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{\Phi}}(x,y) \} \} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Diamond\Box\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &\triangleq \sup_y \inf_x \{ \mu_{\tilde{B}}(y) \wedge \{ (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \vee \mu_{\tilde{\Phi}}(x,y) \} \} \\ &\quad (2.30) \end{aligned}$$

(2.25) 式は, Orlovsky¹⁰⁾ および, Baldwin と Guild¹¹⁾ によって拡張された関係に一致している. また, $\tilde{A}, \tilde{B}$ をファジィ数(注1)に限定し, (2.25), (2.27)式でファジィ選好関係を通常の大小関係 $\geq$ つまり,

$$\mu_{\tilde{\Phi}}(x,y) = \begin{cases} 1; & x \geq y \\ 0; & x < y \end{cases} \quad (2.31)$$

としたものおよび, (2.26), (2.28)式でファジィ選好関係を通常の大小関係 $>$ つまり,

$$\mu_{\tilde{\Phi}}(x,y) = \begin{cases} 1; & x > y \\ 0; & x \leq y \end{cases} \quad (2.32)$$

としたものは, Dubois と Prade⁴⁾ によって定義されたファジィ数の四つの大小関係に一致している.

ここで, (2.25)~(2.30)式を可能性測度と必然性測度を用いて解釈する. $\tilde{A}$ のもとでの $\tilde{B}$ の可能性測度および必然性測度は, それぞれ, つぎのように定義される¹⁵⁾.

$$\text{POS}(\tilde{B}/\tilde{A}) = \sup_x \{ \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) \} \quad (2.33)$$

$$\text{NES}(\tilde{B}/\tilde{A}) = \inf_x \{ (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) \} \quad (2.34)$$

先に述べたように, (2.21)~(2.24)式は $\tilde{B}$ を固定して考えると, それぞれ, “ $\tilde{B}$ より可能的に選好する集合”, “ $\tilde{B}$ より必然的に選好する集合”, “ $\tilde{B}$ に可能的に選好される集合”, “ $\tilde{B}$ に必然的に選好される集合”

(注1) ファジィ数 $\tilde{A}$ とは1次元実数空間上のファジィ集合で, そのメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{A}}$ がつぎの条件を満足するものをいう.

(i) $\mu_{\tilde{A}}$ は上半連続である.

(ii) $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$ となる x が存在する.

(iii) 任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対して

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}}(y) \text{ となる.}$$

のメンバシップ関数と考えられる. これらの集合をそれぞれ $\Diamond\tilde{\Phi}_{\tilde{B}}, \Box\tilde{\Phi}_{\tilde{B}}, \Diamond\tilde{\Phi}_{\tilde{B}}, \Box\tilde{\Phi}_{\tilde{B}}$ と示すと,

$$\begin{aligned} \mu_{\Diamond\Diamond\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \text{POS}(\Diamond\tilde{\Phi}_{\tilde{B}}/\tilde{A}) \\ &= \text{POS}(\Diamond\tilde{\Phi}_{\tilde{A}}/\tilde{B}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\mu_{\Diamond\Box\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \text{POS}(\Box\tilde{\Phi}_{\tilde{B}}/\tilde{A}) \quad (2.36)$$

$$\mu_{\Box\Diamond\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \text{NES}(\Diamond\tilde{\Phi}_{\tilde{B}}/\tilde{A}) \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Box\Box\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \text{NES}(\Box\tilde{\Phi}_{\tilde{B}}/\tilde{A}) \\ &= \text{NES}(\Box\tilde{\Phi}_{\tilde{A}}/\tilde{B}) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\mu_{\Box\Diamond\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \text{NES}(\Diamond\tilde{\Phi}_{\tilde{A}}/\tilde{B}) \quad (2.39)$$

$$\mu_{\Diamond\Box\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \text{POS}(\Box\tilde{\Phi}_{\tilde{A}}/\tilde{B}) \quad (2.40)$$

が成立する. したがって, (2.25)式は “ $\tilde{A}$ を $\tilde{B}$ より可能的に選好する可能性” あるいは “ $\tilde{B}$ が $\tilde{A}$ に可能的に選好される可能性”, (2.26)式は “ $\tilde{A}$ を $\tilde{B}$ より必然的に選好する可能性”, (2.27)式は “ $\tilde{A}$ を $\tilde{B}$ より可能的に選好する必然性”, (2.28)式は “ $\tilde{A}$ を $\tilde{B}$ より必然的に選好する必然性” あるいは “ $\tilde{B}$ が $\tilde{A}$ に必然的に選好される必然性”, (2.29)式は “ $\tilde{B}$ が $\tilde{A}$ に可能的に選好される必然性”, さらに, (2.30)式は “ $\tilde{B}$ が $\tilde{A}$ に必然的に選好される可能性” と考えることができる.

3. 諸 性 質

3.1 様相的な性質

(2.21)~(2.30)式で定義したファジィ関係の様相的な性質について述べる. すなわち, 様相論理における可能性と必然性あるいは, 述語論理における存在性と全称性に関する性質の保存について吟味する.

[命題1]

$$\mu_{\Box\Box\tilde{\Phi}}(x, \tilde{B}) = \mu_{\sim\Diamond\sim\tilde{\Phi}}(x, \tilde{B}) \quad (3.1)$$

$$\mu_{\Box\Diamond\tilde{\Phi}}(\tilde{B}, x) = \mu_{\sim\Diamond\sim\tilde{\Phi}}(\tilde{B}, x) \quad (3.2)$$

$$\mu_{\Box\Box\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\sim\Diamond\sim\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.3)$$

$$\mu_{\Box\Diamond\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\sim\Diamond\sim\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.4)$$

$$\mu_{\Diamond\Box\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\sim\Diamond\sim\tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.5)$$

が成立する. ただし, $\sim\tilde{\Phi}(x,y)$ は $\tilde{\Phi}(x,y)$ の否定関係であり, 次式で定義される.

$$\mu_{\sim\tilde{\Phi}}(x,y) = 1 - \mu_{\tilde{\Phi}}(x,y) \quad (3.6)$$

証明は省略する.

これらの関係は, 様相論理における

$$\Box A = \sim\Diamond\sim A \quad (3.7)$$

$$\Box\Box A = \sim\Diamond\Diamond\sim A \quad (3.8)$$

$$\Box\Diamond A = \sim\Diamond\Box\sim A \quad (3.9)$$

の関係あるいは, 述語論理における

$$\forall x P(x) = \sim\exists x \sim P(x) \quad (3.10)$$

$$\forall x \forall y P(x,y) = \sim\exists x \exists y \sim P(x,y) \quad (3.11)$$

$$\forall x \exists y P(x,y) = \sim\exists x \forall y \sim P(x,y) \quad (3.12)$$

の関係に対応している. ここで, A は任意の命題であ

り, P は任意の述語である. すなわち, (2.21)~(2.30)式で定義された関係は, 可能性と必然性あるいは, 存在性と全称性の双対な関係を保存している.

(3.1)~(3.5)式および $\mu_{\sim\mathcal{P}}(x, y) = \mu_{\mathcal{P}}(x, y)$ より, つぎの関係が成立する.

$$\mu_{\mathcal{P}}(x, \tilde{B}) = \mu_{\sim\mathcal{P}}(x, \tilde{B}) \quad (3.13)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, x) = \mu_{\sim\mathcal{P}}(\tilde{B}, x) \quad (3.14)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\sim\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.15)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\sim\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.16)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\sim\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.17)$$

[命題 2]

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.18)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.19)$$

が成立する.

(証明) U の任意の要素 x, y について,

$$\inf_z \{(1 - \mu_{\tilde{B}}(z)) \vee \mu_{\mathcal{P}}(x, z)\}$$

$$\leq (1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \mu_{\mathcal{P}}(x, y),$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq (1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \mu_{\tilde{A}}(x)$$

が成立するから, U の任意の要素 x, y について,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \inf_z \{(1 - \mu_{\tilde{B}}(z)) \vee \mu_{\mathcal{P}}(x, z)\}$$

$$\leq \{(1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \mu_{\tilde{A}}(x)\} \wedge$$

$$\{(1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \mu_{\mathcal{P}}(x, y)\}$$

$$= (1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\mathcal{P}}(x, y)\}$$

が成立する. したがって, U の任意の要素 y について,

$$\sup_x \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \inf_z \{(1 - \mu_{\tilde{B}}(z)) \vee \mu_{\mathcal{P}}(x, z)\}\}$$

$$\leq \sup_x \{(1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\mathcal{P}}(x, y)\}\}$$

となる. ゆえに,

$$\sup_x \inf_z \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \{(1 - \mu_{\tilde{B}}(z)) \vee \mu_{\mathcal{P}}(x, z)\}\}$$

$$\leq \inf_y \sup_x \{(1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\mathcal{P}}(x, y)\}\}$$

が成立し, (3.18)式が証明された. (3.19)式についても同様に証明できる. (証明終)

(3.18), (3.19)式は, 述語論理における関係

$$\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y) \quad (3.20)$$

に対応し, (3.20)式の一般化となっている. ただし, $\rightarrow$ は含意記号である. このことは, $\rightarrow$ が集合の包含関係に対応していることと, ファジィ集合の包含関係 $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ が $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$ によって定義されることから理解できる.

[命題 3] $\sup_y \mu_{\tilde{B}}(y) = 1$ となるファジィ集合 $\tilde{B}$ に対して,

$$\mu_{\mathcal{P}}(x, \tilde{B}) \leq \mu_{\mathcal{P}}(x, \tilde{B}) \quad (3.21)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, x) \leq \mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, x) \quad (3.22)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.23)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.24)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \leq \mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (3.25)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \leq \mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (3.26)$$

が成立する.

証明は省略する.

[命題 4] $\sup_y \mu_{\tilde{B}}(y) \leq 0.5$ となるファジィ集合 $\tilde{B}$ に対して,

$$\mu_{\mathcal{P}}(x, \tilde{B}) \leq \mu_{\mathcal{P}}(x, \tilde{B}) \quad (3.27)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, x) \leq \mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, x) \quad (3.28)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.29)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.30)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \leq \mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (3.31)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \leq \mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (3.32)$$

が成立する.

証明は省略する.

命題 3 より, $\sup_y \mu_{\tilde{B}}(y) = 1$ なるファジィ集合 $\tilde{B}$ に対して, 必然的なものが可能的なものより強く, そのメンバシップ値が低いことがわかる. すなわち, 様相論理における

$$\Box A \rightarrow \Diamond A \quad (3.33)$$

の関係に一致している. しかし, $\sup_y \mu_{\tilde{B}}(y) \neq 1$ なるファジィ集合に対しては, 必ずしも (3.33)式に対応するとは限らない. さらに, 命題 4 より $\sup_y \mu_{\tilde{B}}(y) \leq 0.5$ なるファジィ集合 $\tilde{B}$ に対しては, 常に可能的なものが必然的なものより強くなり, 可能性と必然性の関係が逆転することがわかる.

[命題 5] $\tilde{A}$ が上半連続なメンバシップ関数をもつ有界なファジィ集合であり, $\tilde{A}, \tilde{B}$ のいずれかが正規であるとする. このとき, ファジィ選好関係 $\mathcal{P}(x, y)$ が上半連続なメンバシップ関数を持ち, U 上のある全順序関係 $\mathcal{Q}(x, y)$ に関して, 条件

(i) $\chi_{\mathcal{Q}}(x, z) = 1$ かつ $\chi_{\mathcal{Q}}(w, y) = 1$ なる U の任意の要素 x, y, z, w について, $\mu_{\mathcal{P}}(x, y) \geq \mu_{\mathcal{P}}(z, w)$ となる.

あるいは,

(ii) $\chi_{\mathcal{Q}}(z, x) = 1$ かつ $\chi_{\mathcal{Q}}(y, w) = 1$ なる U の任意の要素 x, y, z, w について, $\mu_{\mathcal{P}}(x, y) \geq \mu_{\mathcal{P}}(z, w)$ となる.

を満足すれば,

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\mathcal{P}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.34)$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, \tilde{A}) = \mu_{\mathcal{P}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (3.35)$$

が成立する. ただし, ファジィ集合 $\tilde{A}$ が有界であるとは, 任意の $h \in (0, 1]$ に対して弱 h -レベル集合 $[\tilde{A}]_h = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq h\}$ が有界であることをいう. ま

た、 $\tilde{A}$ が正規であるとは、 $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$ となる要素 x が存在することである。

証明をする前に、命題 6 の条件 (i), (ii) を解釈する。説明を容易にするため、 U を 1 次元実数空間とし、全順序関係 $\mathcal{G}(x, y)$ を通常の大小関係 $\geq$ とすると、(2.31) 式より、条件 (i) (ii) はそれぞれ、

(i) $x \geq z$ かつ $w \geq y$ なる U の任意の要素 x, y, z, w について、 $\mu_{\tilde{A}}(x, y) \geq \mu_{\tilde{A}}(z, w)$ となる。

(ii) $z \geq x$ かつ $y \geq w$ なる U の任意の要素 x, y, z, w について、 $\mu_{\tilde{A}}(x, y) \geq \mu_{\tilde{A}}(z, w)$ となる。

となる。条件 (i) については、大小関係に関して、 $x \geq z$ かつ $w \geq y$ であるので、 $x - y \geq z - w \geq z - w$ が成立する。また、 $\mu_{\tilde{A}}(x, y)$ は x を y より選好する度合いと考えることができるので、 $\mu_{\tilde{A}}(x, y) \geq \mu_{\tilde{A}}(z, w)$ および $x - y \geq z - w$ より、 $\tilde{\Phi}(x, y)$ において比較する x と y の差が大きければ大きいほど選好する度合いが大きくなることを表わしている。同様に、条件 (ii) は $\tilde{\Phi}(x, y)$ において比較する x と y の差が小さければ小さいほど選好する度合いが大きくなることを表わしている。

(証明) (3.34), (3.35) 式は同様に証明できるので、ここでは、(3.34) 式を証明する。

命題 2 より、 $\mu_{\diamond \square \tilde{A}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\square \diamond \tilde{A}}(\tilde{A}, \tilde{B})$ が成立するので、逆の不等号を示す。これを示すには、 $\forall h \in [0, 1]$ に対して、 $\mu_{\square \diamond \tilde{A}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq h \rightarrow \mu_{\diamond \square \tilde{A}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq h$ を示せばよい。 $\tilde{\Phi}(x, y)$ が条件 (i) を満足する場合について示す。

$h=0$ のときは明らかである。 $h>0$ に対して、

$$\inf_y \sup_x \{(1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}}(x, y)\}\} \geq h$$

が成り立つとすると、 $1 - \mu_{\tilde{B}}(y) < h$ なる y が存在するならば、そのようなすべての y に対して、

$$\sup_x \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}}(x, y)\} \geq h$$

となる。 $\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{A}}$ の上半連続性より換言すると、 $(\tilde{B})_{1-h} \triangleq \{y / \mu_{\tilde{B}}(y) > 1-h\} \neq \emptyset$ であるならば、 $(\tilde{B})_{1-h}$ の任意の要素 y に対して、 $\mu_{\tilde{A}}(x, y) \geq h$ なる $[\tilde{A}]_h$ の要素 x が存在する。ここで、 $[\tilde{A}]_h \neq \emptyset$ であることに注意されたい。なぜならば、 $[\tilde{A}]_h = \emptyset$ とすると $\mu_{\square \diamond \tilde{A}}(\tilde{A}, \tilde{B}) < h$ となり、矛盾するからである。いま、 $\tilde{A}$ は有界なファジィ集合であるから、 $[\tilde{A}]_h$ には全順序関係 $\mathcal{G}(x, y)$ に関する下限 $\inf [\tilde{A}]_h$ と上限 $\sup [\tilde{A}]_h$ が存在する。明らかに、 $[\tilde{A}]_h$ の任意の要素 x について、 $\chi_{\mathcal{G}}(\sup [\tilde{A}]_h, x) = 1$ であり、全順序関係 $\mathcal{G}(x, y)$ の反射性より、 U の任意の要素 y について、 $\chi_{\mathcal{G}}(y, y) = 1$ となる。条件 (i) より、 $[\tilde{A}]_h$ の任意の要素 x および U の任意の要素 y について、 $\mu_{\tilde{A}}(\sup [\tilde{A}]_h,$

$y) \geq \mu_{\tilde{A}}(x, y)$ が成立する。したがって、 $(\tilde{B})_{1-h}$ の任意の要素 y に対して、 $\mu_{\tilde{A}}(\sup [\tilde{A}]_h, y) \geq \mu_{\tilde{A}}(x, y) \geq h$ が成立する。 $\mu_{\tilde{A}}$ は上半連続であるから、 $\sup [\tilde{A}]_h \in [\tilde{A}]_h$ が成立する。ゆえに、 $[\tilde{A}]_h$ の要素 x の中に、 $(\tilde{B})_{1-h}$ の任意の要素 y に対して、 $\mu_{\tilde{A}}(x, y) \geq h$ なるものが存在する。すなわち、

$$\sup_x \inf_y \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \{(1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \mu_{\tilde{A}}(x, y)\}\} \geq h$$

が成立する。

$\tilde{B}$ が正規なファジィ集合でないときには、 $(\tilde{B})_{1-h} = \emptyset$ ($1 - \mu_{\tilde{B}}(y) < h$ なる y が存在しない) 場合がある。この場合には、命題の仮定より $\tilde{A}$ は正規なファジィ集合である。したがって、 $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq h$ なる x が存在し、

$$\sup_x \inf_y \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \{(1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \mu_{\tilde{A}}(x, y)\}\} \geq h$$

が成立する。

条件 (ii) の成立を仮定する場合も同様に証明することができる。(証明終)

命題 5 は、命題 2 において大小関係が明らかにになった $\mu_{\diamond \square \tilde{A}}(\tilde{A}, \tilde{B})$ と $\mu_{\square \diamond \tilde{A}}(\tilde{A}, \tilde{B})$, $\mu_{\square \diamond \tilde{A}}(\tilde{A}, \tilde{B})$ と $\mu_{\diamond \square \tilde{A}}(\tilde{A}, \tilde{B})$ が等しくなる十分条件を示している。

また、(3.18) 式および (3.19) 式が述語論理で成立する (3.20) 式の一般化であることより、命題 5 は特殊な場合として、(3.20) 式の逆の関係

$$\forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \quad (3.36)$$

が成立するために、述語 $P(x, y)$ がもつべき十分条件も示している。

特に、 $\tilde{A}, \tilde{B}$ がファジィ数で、ファジィ選好関係 $\tilde{\Phi}(x, y)$ が通常の大小関係 $\geq$ である場合には、全順序関係 $\mathcal{G}(x, y)$ も通常の大小関係 $\geq$ とすると、命題 5 の仮定を満足し、常に (3.34) 式、(3.35) 式が成立する。この場合、(2.25) ~ (2.30) 式の六つの関係は 4 種類となり、Dubois と Prade によるファジィ数の四つの大小関係⁴⁾ と対応している。Dubois と Prade は、ファジィ数の四つの大小関係を大小関係 $\geq$ を拡張したものと、大小関係 $>$ を拡張したものを混せて定義し、6 種類のうち 4 種類を選んだ理由として、 $\tilde{A}$ および $\tilde{B}$ のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}$ のいずれかが、 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ と $1 - \mu_{\tilde{B}}(x)$ の大小が逆転する点において連続であれば、(3.34) 式、(3.35) 式に対応するものが成立することを挙げている⁴⁾。しかし、命題 6 より、大小関係 $\geq$ を拡張したものだけで定義すれば、ファジィ数の大小関係は常に 4 種類しか存在しないことがわかる。

3.2 関係としての性質

本節では、(2.21) ~ (2.30) 式で定義される関係の逆関係に関する性質と、否定関係と逆関係の類似性を検

討する。

[命題 6]

$$\mu_{\Phi\Phi}(\tilde{B}, x) = \mu_{\Phi\Phi'}(x, \tilde{B}) \quad (3.37)$$

$$\mu_{\Phi\Phi}(\tilde{B}, x) = \mu_{\Phi\Phi'}(x, \tilde{B}) \quad (3.38)$$

$$\mu_{\Phi\Phi\Phi}(\tilde{B}, \tilde{A}) = \mu_{\Phi\Phi\Phi'}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.39)$$

$$\mu_{\Phi\Phi\Phi}(\tilde{B}, \tilde{A}) = \mu_{\Phi\Phi\Phi'}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.40)$$

$$\mu_{\Phi\Phi\Phi}(\tilde{B}, \tilde{A}) = \mu_{\Phi\Phi\Phi'}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.41)$$

$$\mu_{\Phi\Phi\Phi}(\tilde{B}, \tilde{A}) = \mu_{\Phi\Phi\Phi'}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.42)$$

$$\mu_{\Phi\Phi\Phi}(\tilde{B}, \tilde{A}) = \mu_{\Phi\Phi\Phi'}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.43)$$

$$\mu_{\Phi\Phi\Phi}(\tilde{B}, \tilde{A}) = \mu_{\Phi\Phi\Phi'}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.44)$$

が成立する。ただし、 $\Phi'(x, y)$ は $\Phi(x, y)$ の逆関係であり、つぎのように定義される。

$$\mu_{\Phi'}(x, y) = \mu_{\Phi}(y, x) \quad (3.45)$$

証明は省略する。

(3.37)~(3.44)式における左辺は $\Phi(x, y)$ の逆関係 $\Phi'(x, y)$ を拡張したものであり、右辺は $\Phi(x, y)$ を拡張したものである。すなわち、命題 6 は $\Phi(x, y)$ の逆関係 $\Phi'(x, y)$ を拡張したものは、 $\Phi(x, y)$ を拡張したもので表現できることを示している。

[命題 7] 全体集合 U の $x \neq y$ なる任意の要素 x, y について、ファジィ選好関係 $\Phi(x, y)$ が、

$$\mu_{\Phi}(x, y) + \mu_{\Phi}(y, x) = 1 \quad (3.46)$$

を満足し、任意の x に対して、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{\Phi}(x, x_i) \leq \mu_{\Phi}(x, x) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{\Phi}(x, x_i) \quad (3.47)$$

となる x に収束する点列 $\{x_i\}$ が存在するとき、下半連続なメンバシップ関数をもつファジィ集合 $\tilde{B}$ に対して、

$$\mu_{\Phi\Phi}(x, \tilde{B}) = \mu_{\sim\Phi\Phi}(\tilde{B}, x) \quad (3.48)$$

$$\mu_{\Phi\Phi}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\sim\Phi\Phi}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (3.49)$$

$$\mu_{\Phi\Phi}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\sim\Phi\Phi}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (3.50)$$

が成立する。また、任意の x に対して、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{\Phi}(x, x_i) \leq \mu_{\Phi}(x, x) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{\Phi}(x, x_i) \quad (3.51)$$

となる x に収束する点列 $\{x_i\}$ が存在するとき、下半連続なメンバシップ関数をもつファジィ集合 $\tilde{B}$ に対して、

$$\mu_{\Phi\Phi}(\tilde{B}, x) = \mu_{\sim\Phi\Phi}(x, \tilde{B}) \quad (3.52)$$

$$\mu_{\Phi\Phi}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\sim\Phi\Phi}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (3.53)$$

$$\mu_{\Phi\Phi}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\sim\Phi\Phi}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (3.54)$$

が成立する。

(証明) (3.48)式について証明する。

U の要素 x に対する (3.47)式を満足する点列 $\{x_i\}$ とする。 μ_{Φ} の下半連続性より、

$$\mu_{\Phi}(x) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{\Phi}(x_i)$$

なる $\{x_i\}$ の部分点列 $\{x_i^*\}$ が存在する。(3.48)式より、部分点列 $\{x_i^*\}$ に対しても、

$$\mu_{\Phi}(x, x) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{\Phi}(x, x_i^*)$$

が成立する。したがって、

$$\mu_{\Phi}(x) \wedge \mu_{\Phi}(x, x) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \{\mu_{\Phi}(x_i^*) \wedge \mu_{\Phi}(x, x_i^*)\}$$

となる。同様にして、 $\{x_i\}$ のある部分点列 $\{x_i^*\}$ に対して、

$$\mu_{\Phi}(x) \wedge (1 - \mu_{\Phi}(x, x)) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \{\mu_{\Phi}(x_i^*) \wedge (1 - \mu_{\Phi}(x_i^*, x))\}$$

が成立する。ゆえに、(3.46)式より、

$$\begin{aligned} \mu_{\Phi\Phi}(x, \tilde{B}) &= \sup_y \{\mu_{\Phi}(y) \wedge \mu_{\Phi}(x, y)\} \\ &= \sup_{y \neq x} \{\mu_{\Phi}(y) \wedge \mu_{\Phi}(x, y)\} \\ &= \sup_{y \neq x} \{\mu_{\Phi}(y) \wedge (1 - \mu_{\Phi}(y, x))\} \\ &= \sup_y \{\mu_{\Phi}(y) \wedge (1 - \mu_{\Phi}(y, x))\} \\ &= 1 - \inf_y \{(1 - \mu_{\Phi}(y)) \vee \mu_{\Phi}(y, x)\} \\ &= \mu_{\sim\Phi\Phi}(\tilde{B}, x) \end{aligned}$$

(3.49), (3.50)式および (3.52)~(3.54)式も同様に証明できる。 (証明終)

命題 7 のファジィ集合 $\tilde{B}$ のメンバシップ関数の下半連続性を、つぎの条件 (i) で置き換えても命題 7 は成立する。

(i) U の任意の要素 x および x に収束する任意の点列 $\{x_i\}$ について、 $\mu_{\Phi}(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{\Phi}(x_i^*)$ なる $\{x_i\}$ の部分点列 $\{x_i^*\}$ が存在する。

特に、 U が 1 次元実数空間であるとき、条件 (i) は μ_{Φ} が U の任意の点において右連続または左連続であることを表わしている。

(3.46)式は、 $x \neq y$ に対して

$$\mu_{\sim\Phi}(x, y) = \mu_{\Phi'}(x, y) \quad (3.55)$$

が成立することを示し、(3.48)~(3.50)式および (3.52)~(3.54)式を書き換えると、それぞれ、

$$\mu_{\Phi\Phi}(x, \tilde{B}) = \mu_{\Phi\Phi'}(x, \tilde{B}) \quad (3.56)$$

$$\mu_{\Phi\Phi}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\Phi\Phi'}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.57)$$

$$\mu_{\Phi\Phi}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\Phi\Phi'}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.58)$$

$$\mu_{\Phi\Phi'}(x, \tilde{B}) = \mu_{\Phi\Phi}(x, \tilde{B}) \quad (3.59)$$

$$\mu_{\Phi\Phi}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\Phi\Phi'}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.60)$$

$$\mu_{\Phi\Phi}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\Phi\Phi'}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.61)$$

となる。つまり、命題 7 は否定関係と逆関係の関係を示している。

U を 1 次元実数空間とし、 $\Phi(x, y)$ を通常の大小関係 $\geq$ とすると、

$$\mu_{\tilde{\Phi}}(x, y) = \begin{cases} 1; & x \geq y \\ 0; & x < y \end{cases} \quad (3.62)$$

となり、その否定関係および逆関係は、

$$\mu_{\sim\tilde{\Phi}}(x, y) = \begin{cases} 0; & x \geq y \\ 1; & x < y \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\mu_{\tilde{\Phi}'}(x, y) = \begin{cases} 1; & x \leq y \\ 0; & x > y \end{cases} \quad (3.64)$$

となる。つまり、 $\sim\tilde{\Phi}(x, y)$, $\tilde{\Phi}'(x, y)$ は、それぞれ、通常の大小関係 $<$, $\leq$ を表わしている。明らかに $\tilde{\Phi}(x, y)$ は、(3.46)式、(3.47)式の仮定、(3.51)式の仮定を満足するので、(3.48)～(3.50)式および(3.52)～(3.54)式（あるいは(3.56)～(3.61)式）が成立する。

したがって、命題7は $\tilde{B}$ が下半連続なメンバシップ関数をもつ限りにおいて、大小関係 $<$ を拡張したものと、大小関係 $\leq$ を拡張したものが一致することを保証している。たとえば、1次元実数空間上の二つの開区間について、大小関係 $<$ と大小関係 $\leq$ が一致する。

4. おわりに

様相概念に基づき、ファジィ選好関係をファジィ集合間の関係へ拡張した。ここで拡張された関係は、Orlovsky および Baldwin と Guild による拡張を含んでいる。特に、ファジィ選好関係が通常の大小関係である場合には、Dubois と Prade によるファジィ数の大小関係に一致している。また、拡張された関係の性質を調べ、様相論理における可能性と必然性あるいは、述語論理における存在性と全称性の関係の保存について検討し、 $\sup_y \mu_{\tilde{B}}(y) = 1$ なるファジィ集合 $\tilde{B}$ についてそれらの関係が保存されることを示した。さらに、六つに拡張される関係が四つになる十分条件を示し、ファジィ数について、大小関係 $\geq$ を拡張したものは常に4種類しか存在しないことが確かめられた。

本研究で拡張された選好関係を用いることにより、意思決定者の微妙な様相に応じた種々の決定方式を得ることができ、ファジィ意思決定問題、ファジィ数理

計画問題の大部分を統一的に解釈することができる¹⁶⁾。

参考文献

- 1) R.E. Bellman and L.A. Zadeh: Decision-Making in a Fuzzy Environment, *Management Sci.*, **17B-4**, 141/164 (1970)
- 2) S.A. Orlovsky: Decision-Making with a Fuzzy Preference Relation, *Fuzzy Sets and Syst.*, **1** 155/167 (1978)
- 3) 中村和男: 多属性 Fuzzy 選好に基づく非劣関係に関する一考察, 計測自動制御学会論文集, **22-5**, 549/556 (1986)
- 4) D. Dubois and H. Prade: Ranking Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory, *Inform. Sci.*, **30**, 183/224 (1983)
- 5) 乾口, 市橋, 田中: 様相概念に基づく意思決定方式とそのファジィ多目的線形計画問題への応用, *J. Oper. Res. Soc. Jpn.*, **30-4**, 449/471 (1987)
- 6) 乾口, 市橋, 田中: 多属性価値関数を用いたファジィ線形計画法, *J. Oper. Res. Soc. Jpn.*, **31-1**, 121/142 (1988)
- 7) 田中, 和多田, 浅居: ファジィ集合による多属性代替案の評価, システムと制御, **27-6**, 403/409 (1983)
- 8) S.R. Watson, J.J. Weiss and M.L. Donnell: Fuzzy Decision Analysis, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, **9-1**, 1/9 (1979)
- 9) D. Dubois and H. Prade: Decision-Making under Fuzziness, in M.M. Gupta, R.K. Ragade and R. Yager (eds.), *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, 279/303, North Holland (1979)
- 10) S.A. Orlovsky: On Formulation of a General Fuzzy Mathematical Problem, *Fuzzy Sets and Syst.*, **3**, 311/321 (1980)
- 11) J.F. Baldwin and N.C.F. Guild: Comparison of Fuzzy Sets on the Same Decision Space, *Fuzzy Sets and Syst.*, **2**, 213/231 (1979)
- 12) L.A. Zadeh: Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, *Fuzzy Sets and Syst.*, **1**, 3/28 (1978)
- 13) 永井, 斎藤: 現代の哲学的論理学, 東海大学出版会 (1969)
- 14) G. Bortolan and R. Degani: A Review of Some Methods for Ranking Fuzzy Subsets, *Fuzzy Sets and Syst.*, **15**, 1/19 (1985)
- 15) H. Prade: Modal Semantics and Fuzzy Set Theory, in R.R. Yager (ed.), *Fuzzy Sets and Possibility Theory*, Pergamon Press (1982)
- 16) 乾口, 市橋, 田中: ファジィ数理計画問題の様相論的構成, 第3回ファジィ・システム・シンポジウム講演論文集, 77/82 (1987)