予見制御系の性質について†

河 村 仁*・土 谷 武 士*

On the Properties of Preview Control System

Hitoshi KAWAMURA* and Takeshi TSUCHIYA*

A synthesis method for digital optimal control system with preview feedforward compensation has been already proposed. This paper shows the closed loop transfer function matrix of this preview control system, and investigates its asymptotic properties with respect to the weight on the control effort in the quadratic performance index.

Key Words: preview control system, optimal servosystem

1. はじめに

現在時刻から一定未来時刻までの目標値信号・外乱信号を利用するディジタル予見サーボ系の構成法が提案されている(たとえば文献1)~3)), 文献2), 3)の構成法による制御系は, エラーシステムに基づくディジタル最適サーボ系を予見フィードフォワード補償を含む制御系に拡張したものである. 本報告では, この予見制御系のパルス伝達関数行列を示し, 2次形式評価関数において制御入力にかかる重み行列を零に近づける場合の予見制御系の漸近的性質を予見動作なしの場合と比較しながら考察する.

2. 予見制御系の構成

予見制御系の構成法は文献2), 3)に詳しく報告されている. ここでは全状態フィードバックが可能であり, 演算時間が無視できる場合を考える.

次式で表わされる線形離散時間系を考える.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{E}\mathbf{d}(k) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (2)$$

ただし,

$\mathbf{x}(k)$: 状態変数 ($n \times 1$), $\mathbf{u}(k)$: 入力変数 ($m \times 1$)

$\mathbf{d}(k)$: 外乱信号 ($s \times 1$), $\mathbf{y}(k)$: 出力変数 ($m \times 1$)
上式の制御対象は可制御・可観測であるものとする. また, $\mathbf{R}(k)$ を目標値信号 ($m \times 1$) とし, 誤差信号をつぎのように定義する.

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{R}(k) - \mathbf{y}(k) \quad (3)$$

ここでつぎのようなエラーシステムを構成する. ただし, Δ は一階差分動作を表わすものとする.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(k+1) \\ \Delta \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(k) \\ \Delta \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\mathbf{C}\mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{R}(k+1) \\ &+ \begin{bmatrix} -\mathbf{C}\mathbf{E} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{d}(k) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{e}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(k) \\ \Delta \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} \quad (5)$$

(4), (5)式をつぎのように表わすことにする.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0(k+1) &= \Phi \mathbf{X}_0(k) + \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}(k) + \mathbf{G}_R \Delta \mathbf{R}(k+1) \\ &+ \mathbf{G}_d \Delta \mathbf{d}(k) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{C}_0 \mathbf{X}_0(k) \quad (7)$$

この拡大系の可制御条件は原系が可制御かつ $z=1$ に不変零点をもたないことであり, 可観測条件は原系が可観測かつ $\mathbf{A}$ が正則であることである.

ここで, つぎのような評価関数を導入する.

$$J(k_0) = \sum_{j=k_0-M}^{\infty} [\mathbf{X}_0^T(j) \mathbf{Q} \mathbf{X}_0(j) + \Delta \mathbf{u}^T(j) \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}(j)] \quad (8)$$

ただし,

$\mathbf{Q}$: 半正定行列, $\mathbf{H}$: 正定行列

$(\mathbf{Q}^{1/2}, \Phi)$ は可観測であるとする.

$M = \max[M_R, M_d]$

M_R : 目標値信号の予見ステップ数

M_d : 外乱信号の予見ステップ数

最適レギュレータ問題の手法に従って制御入力 $\Delta \mathbf{u}(k)$ を求めるとつぎようになる(文献3)参照).

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}(k) &= \mathbf{F} \mathbf{X}_0(k) + \sum_{j=1}^{M_R} \mathbf{F}_R(j) \Delta \mathbf{R}(k+j) \\ &+ \sum_{j=0}^{M_d} \mathbf{F}_d(j) \Delta \mathbf{d}(k+j) \end{aligned} \quad (9)$$

† 第20回計測自動制御学会北海道支部学術講演会で発表(昭63・2)

* 北海道大学工学部 札幌市北区北13条西8

* Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo

(Received March 7, 1988)

(Revised May 9, 1988)

Fig. 1 Preview control system structure

ここで,

$$F = -[H + G^T P G]^{-1} G^T P \Phi \quad (10)$$

$$F_R(j) = -[H + G^T P G]^{-1} G^T [(\Phi + G F)^T]^{j-1} P G_R \quad (11)$$

$$F_d(j) = -[H + G^T P G]^{-1} G^T [(\Phi + G F)^T]^j P G_d \quad (12)$$

$$P = Q + \Phi^T P \Phi - \Phi^T P G [H + G^T P G]^{-1} G^T P \Phi \quad (13)$$

初期値が零かあるいは前制御区間での定常値であるとして(9)式の z 変換を求める。

$$u(k) = F_e' \frac{1}{1-z^{-1}} e(k) + F_x x(k) + F_{PR}(z) R(k) + F_{PD}(z) d(k) \quad (14)$$

ただし,

$$F = [F_e \ F_x] \quad (15)$$

$$F_{PR}(z) = F_R(1)z + F_R(2)z^2 + \dots + F_R(M_R)z^{M_R} \quad (16)$$

$$F_{PD}(z) = F_d(0) + F_d(1)z + \dots + F_d(M_d)z^{M_d} \quad (17)$$

制御系構成図を Fig. 1 に示す。通常の最適サーボ系に予見フィードフォワード補償が付加された構造となっていることがわかる。

3. 予見制御系の漸近的性質

予見制御系のパルス伝達関数行列はつぎのとおりである。

- 目標値 $R(k)$ -制御量 $y(k)$ 間

$$(TF)_{R-y} = C_y [zI - (\Phi + G F)]^{-1} [zG_R + G F_{PR}(z)] \quad (18)$$

- 外乱 $d(k)$ -制御量 $y(k)$ 間

$$(TF)_{d-y} = C_y [zI - (\Phi + G F)]^{-1} [G_d + G F_{PD}(z)] \quad (19)$$

ただし, $C_y = [0 \ C]$ とする。

行列 F_e , CB が正則である場合, (18), (19)式に $z=1$ を代入すると, $(TF)_{R-y} = I$ および $(TF)_{d-y} = 0$ が得られる。

なお, 予見動作なしの場合はつぎのとおり。

$$(TF)_{R-y} = z C_y [zI - (\Phi + G F)]^{-1} G_R \quad (20)$$

$$(TF)_{d-y} = C_y [zI - (\Phi + G F)]^{-1} G_d \quad (21)$$

評価関数の重み行列に関するパルス伝達関数行列の漸近的性質を最適レギュレータの漸近特性を用いて求め

る。ここでは, $Q = C_0^T C_0$, $H = \rho I$, $\rho \rightarrow 0$ の場合について考察する。

以下, 制御対象は最小位相系であり, 行列 CB は正則であるものとする。

- (1) 予見フィードフォワード補償なしの場合

制御対象が最小位相系で行列 CB が正則である場合 $Q = C_0^T C_0$, $H = \rho I$, $\rho \rightarrow 0$ とするときフィードバック係数行列 F はつぎの行列に漸近する (以下 “*” は漸近値を表わすものとする)。

$$F^* = -(C_0 G)^{-1} C_0 \Phi \quad (22)$$

(最適レギュレータの漸近特性^{4),5)}より)

なお, $C_0 G = -CB$ であるので, CB が正則であれば $C_0 G$ も正則となる。

(22)式より次式が得られる。

$$F^* = [(CB)^{-1} - (CB)^{-1} CA] \quad (23)$$

これより,

$$F_e^* = (CB)^{-1} \quad (24)$$

$$F_x^* = -(CB)^{-1} CA \quad (25)$$

という漸近値が得られる。

(23)式より(26)式が導かれる。

$$\Phi + G F^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B(CB)^{-1} & L \end{bmatrix} \quad (26)$$

ここで,

$$L = A - B(CB)^{-1} CA \quad (27)$$

L の固有値は, 1 個の零固有値および原系の不変零点からなる。

(26)式を(20), (21)式に代入して次式を得る。

$$(TF)_{R-y}^* = z^{-1} I \quad (28)$$

$$(TF)_{d-y}^* = (z^{-1} - z^{-2}) C E \quad (29)$$

- (2) 予見フィードフォワード補償ありの場合

制御対象が最小位相系で行列 CB が正則である場合 $Q = C_0^T C_0$, $H = \rho I$, $\rho \rightarrow 0$ としたときの Riccati 方程式(13)の解は $P = C_0^T C_0$ となる⁵⁾。これと(22)式とを(11), (12)式に代入することにより, フィードフォワード補償 $F_{PR}(z)$, $F_{PD}(z)$ の漸近値が求められる。

$$F_{PR}(z)^* = (CB)^{-1} z \quad (30)$$

$$F_{PD}(z)^* = -(CB)^{-1} C E \quad (31)$$

(30)式は1ステップ未来の目標値信号のみをフィードフォワードすることを示している。また(31)式は現在時刻の外乱信号だけを用いることを表わしている。

(23), (30), (31)式を(18), (19)式に代入することにより, パルス伝達関数行列の漸近値が求められる。

$$(TF)_{R-y}^* = I \quad (32)$$

$$(TF)_{d-y}^* = 0 \quad (33)$$

以上の結果よりつぎのことがいえる。予見フィードフォワード補償なしの場合の $(TF)_{R-y}^*$ には制御対象

- (1) $(TF)=z^{-1}$: without preview feedforward compensation
 (2) $(TF)=1$: with preview feedforward compensation

Fig. 2 Bode diagrams of $(TF)_{R-y}^*$

の相対次数 (**CB** が正則であるという仮定より相対次数は(1)に相当する遅れが残るのに対して, 予見フィードフォワード補償ありの場合にはその遅れが回復する. このとき, 未来目標値としては1ステップ未来の値だけが用いられる. また, $(TF)_{d-y}^*$ に関してはフィードフォワード補償ありの場合に $(TF)_{d-y}=0$ の状態に漸近する.

例として1入力1出力系の $(TF)_{R-y}$ のボード線図を考える. $\rho \rightarrow 0$ とする場合, 予見動作なしの場合には $(TF)=z^{-1}$ の特性に漸近するが, 予見動作ありの場合には $(TF)=1$ の特性に漸近する (Fig. 2 参照).

4. 例題

次式で表わされる連続時間系を考える. なお, これは他励直流電動機の世界制御系を表わしており, 予見制御系を構成した場合のシミュレーション結果・実験結果が文献3)に報告されている.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau_{m0} & K_T/J \\ -K_e/L_a & -1/\tau_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A/L_a \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -1/J \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \quad (34)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (35)$$

(変数・パラメータについては文献3)参照)

$T=15$ ms でサンプリングを行い入力を零次ホールドしたときの離散時間系は最小位相系であり行列 **CB** は正則である. この離散時間系に対して予見制御系を構成し, その周波数応答をしてみることにする.

Fig. 3 に $(TF)_{R-y}$ のボード線図の一例を示す. 同図において前述の漸近的傾向が現れているのが確認できる (なお, 図において " $\rho \rightarrow 0$ " というのは前述の漸

(a) Preview steps=0

(b) Preview steps=30

Fig. 3 Bode diagrams of $(TF)_{R-y}$

近値の特性を表わしている). また, 予見動作ありの場合には予見動作なしの場合に比べて位相特性が改善される傾向があるのがわかる.

5. あとがき

本報告では, 文献2), 3)の構成法に基づく予見制御系の漸近的性質について若干の考察を行った. 離散時間制御対象が非最小位相系である場合の漸近的性質, あるいは予見ステップ数に関する性質^{3), 6)}などについて考察を進めることが今後の課題である.

参考文献

- 1) T. Katayama, et al.: Design of Optimal Controller for a Discrete Time System Subject to Previewable Demand, Int. J. Control, **41**-3, 677/699 (1985)
- 2) 土谷, 江上: 多入力多出力ロバスト予見制御系構成法, 計測自動制御学会論文集, **22**-8, 823/829 (1986)
- 3) 江上, 品田, 土谷: 予見フィードフォワード補償を含む部分状態フィードバック制御系構成法, 計測自動制御学会論文集, **23**-12, 1260/1267 (1987)
- 4) 石原, 伊東, 竹田: 美多のディジタル最適サーボ系の周波数特性, 計測自動制御学会論文集, **23**-10, 1046/1052 (1987)
- 5) U. Shaked: Explicit Solution to the Singular Discrete-Time Stationary Linear Filtering Problems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC**-30-1 34/47 (1985)
- 6) 愛田, 北森: 最適予見サーボ法の性質, 計測自動制御学会論文集, **23**-4 358/363 (1987)