線形零点が不安定な場合の非線形モデル追従形制御[†]

大久保 重 範*

Nonlinear Model Following Control Systems with Unstable Zero Points of the Linear Part

Shigenori OKUBO*

In model following control systems, it is assumed that zero points of a linear part are stable because zero points of a linear part of a controlled object become poles of a closed loop system. This situation is same also in case of nonlinear model following control systems, but it happens that boundedness of inner states of a closed loop is assured depending on nonlinear properties. A nonlinear system is stable when the convergent degree of a nonlinear part is stronger than the divergent degree of a linear part.

We will discuss nonlinear model following control systems in case of the above mentioned situation in this paper.

In case that unstable zeros are controllable and observable poles of a nonlinear closed loop system, a linear output feedback which stabilizes an unstable part of an object system exists implicitly. This operation is to take out a linear part from a nonlinear part and construct an output feedback. As this operation is a theoretical one, no operations are necessary in actuality. This theoretical operation is possible when an inner product of a nonlinear function vector $f(v)$ satisfies a inequality condition and a transfer function from $f(v)$ to v in a closed loop system is positive real in the mean of weakness. Weakly positive real is not necessary to satisfy equality conditions but satisfies inequality conditions. These conditions relieve conventional positive real conditions, so the concept is useful for design of general linear systems.

We show a simulation of nonlinear model following control system which has the third

order polynomial and two inputs and two outputs in order to assure the effectiveness of a design theory of this paper.

Key Words: nonlinear model following control system, unstable zero, output feedback, closed loop system, positive real

1. は し が き

モデル追従形制御系 (Model Following Control System; MFCS) では制御対象の線形部の零点が閉ループの極になる. この性質は非線形モデル追従形制御系 (Nonlinear Model Following Control System; NMFCS) の場合でも同じである. したがって零点の安定性を仮定しなければならない. しかし制御対象が非線形である場合, 線形項の発散よりオーダの大きい収束項が存在すれば, 線形部の零点が不安定でも系全体が有界になる. たとえば $\dot{x}=ax(a>0)$ は発散するが, $\dot{x}=ax-cx^3(a>0, c>0)$ の解は有界である. この原理を NMFCS に使い, 零点の安定性を仮定しない NMFCS の設計およびその条件について述べる. 非線形要素は制御系の設計を困難にすると考えられているが, 本手法は非線形要素の性質を積極的に使った制御系の設計法である.

本論文はつぎのように構成されている. 2章は問題の設定であり, 制御対象の多入出力特性, 非線形要素の性質, 外乱の条件について述べる. 3章は非線形モデル追従形制御系の設計で, スカラー多項式演算による制御入力決定アルゴリズムおよび物理的実現のための多項式条件を述べる. 4章は制御系の状態空間表示とその性質で非線形要素 $f(v(t))$ から $v(t)$ への線形伝達関数 $H(p)$ の内容とその正実性, および $H(p)$ の不等式条件による正実化について述べる. この正実化条件は従来の正実性の条件を等式条件から不等式条件に緩和し拡張したもので, 本内容の設計法に限らず, 広く制御系の解析および設計のための有用な手法にな

[†] 第15回制御理論シンポジウムで発表 (昭61・6)

* 山形大学工学部 米沢市城南 4-3-16

* Faculty of Engineering, Yamagata University, Yonezawa

(Received February 13, 1988)

(Revised May 25, 1988)

る。5章は NMFCS の内部状態の有界性である。制御対象の線形部の不安定零点が $H(p)$ の可制御・可観測な特性根であること、 $H(p)$ の正実化に関する行列不等式が満たされること、および $v(t)$ と $f(v(t))$ の内積が $\|v(t)\|$ のある多項式オーダで負になることが成立する場合、有限発散時間は存在せず、内部状態の有界性を証明することができる。6章は数値例である。2入力2出力で線形部に不安定零点がある場合、本設計法による制御系が当初の制御目的どおり動作することを示す。

2. 問題の設定

制御対象は(1), (2), (3)式で与えられるとする。モデルは(4), (5)式とする。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_f f(v(t)) + d(t) \quad (1)$$

$$v(t) = C_f x(t) + d_v(t) \quad (2)$$

$$y(t) = Cx(t) + d_0(t) \quad (3)$$

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r_m(t) \quad (4)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t) \quad (5)$$

ここで $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^l$, $v(t) \in R^{l_f}$, $f(v(t)) \in R^{l_f}$, $d(t) \in R^n$, $d_0(t) \in R^l$, $d_v(t) \in R^{l_f}$, および $x_m(t) \in R^{n_m}$, $r_m(t) \in R^{l_m}$, $y_m(t) \in R^l$ とする。利用可能な状態は $y(t), v(t)$ であり、内部状態 $x(t)$ は利用不可とする。出力 $y(t)$ は制御量で、 $v(t)$ は測定出力である。 $f(\cdot)$ の関数形は既知であるとする。したがって $f(v(t))$ は利用可能とする。制御対象の線形部 (C, A, B) は可制御・可観測とする。 $C(pI - A)^{-1}B$ の零点は安定でなくともよい。非線形関数 $f(v(t))$ はつぎの条件を満足するものとする。

$$\|f(v(t))\| \leq \alpha + \beta \|v(t)\|^\gamma \quad (6)$$

ここで $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ であり、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムである。外乱 $d(t), d_0(t)$ は有界な線形外乱で(7)式を満たすものと仮定する。

$$D_a(p)d(t) = 0, D_a(p)d_0(t) = 0 \quad (7)$$

$D_a(p)$ は外乱の特性多項式であり、スカラー多項式である。ここで $\partial D_a(p) = n_a$, $\Gamma(D_a(p)) = 1$ である。また $d_v(t)$ は測定出力に入る外乱で有界な一般外乱とする。出力誤差は(8)式で与える。

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (8)$$

制御系の設計目的は内部状態がすべて有界で出力誤差 $e(t)$ が零に収束する制御則を求めることである。

3. 非線形モデル追従制御系の設計

制御入力 $u(t)$ は文献1)で述べた方法と同様に安定多項式 $T(p)D_m(p)$ の多項式演算(9)式を使い(10)式より計算すれば(11)式のように求まる。

$$T(p)D_m(p) = D_a(p)D(p)R(p) + S(p) \quad (9)$$

$$T(p)D_m(p)e(t) = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u(t) = & -N_r^{-1}Q(p)^{-1}\{R(p)D_a(p)N(p) \\ & -Q(p)N_r\}u(t) - N_r^{-1}Q(p)^{-1}S(p)y(t) \\ & - N_r^{-1}Q(p)^{-1}D_a(p)R(p)N_f(p)f(v(t)) \\ & + u_m(t) \end{aligned} \quad (11)$$

各多項式行列にはつぎの関係がある。

$$\begin{aligned} C(pI - A)^{-1}B &= N(p)/D(p), C(pI - A)^{-1}B_f = N_f(p)/D(p), \\ D(p) &= \det(pI - A), \partial_{r_i}N(p) = \sigma_i, \\ \Gamma_r(N(p)) &= N_r, |N_r| \neq 0, \partial_{r_i}N_f(p) = \sigma_{fi}, \partial_{r_i}N_m(p) = \sigma_{mi}, \end{aligned}$$

$T(p)$ は $\partial T(p) = \rho(\rho \geq n_a + 2n - n_m - 1 - \sigma_i)$, $\Gamma(T(p)) = 1$ の安定なスカラー多項式、 $Q(p)$ は $\partial_{r_i}(Q(p)) = \rho + n_m - n + \sigma_i$, $\Gamma_r(Q(p)) = I$ の安定な多項式行列である。外生信号 $u_m(t)$ は(12)式で与えられる。

$$u_m(t) = N_r^{-1}Q(p)^{-1}T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (12)$$

制御入力 $u(t)$ で信号の微分を使わないために次数についてつぎの制約があり、これらは満たされているものとする。

$$\begin{aligned} n_m - \sigma_{mi} &\geq n - \sigma_i (i=1 \sim l), \sigma_i \geq \sigma_{fi} (i=1 \sim l) \\ \rho &\geq n_a + 2n - n_m - 1 (i=1 \sim l) \end{aligned} \quad (13)$$

このとき $e(t)$ は(14)式を満たし、 $e(t)$ はゼロに収束する。

$$T(p)D_m(p)e(t) = 0 \quad (14)$$

$$e(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (15)$$

4. 制御系の状態空間表示とその性質

制御入力 $u(t)$ は内部状態を使って表わせばつぎのようになる。

$$\begin{aligned} u(t) = & -H_1\hat{\xi}_1(t) - E_2y(t) - H_2\hat{\xi}_2(t) - E_3f(v(t)) \\ & - H_3\hat{\xi}_3(t) + u_m(t) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\dot{\hat{\xi}}_1(t) = F_1\hat{\xi}_1(t) + G_1u(t) \quad (17)$$

$$\dot{\hat{\xi}}_2(t) = F_2\hat{\xi}_2(t) + G_2y(t) \quad (18)$$

$$\dot{\hat{\xi}}_3(t) = F_3\hat{\xi}_3(t) + G_3f(v(t)) \quad (19)$$

ただし $|pI - F_i| = |Q(p)| (i=1, 2, 3)$ である。また伝達関数とシステム行列との関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} Q(p)^{-1}\{D_a(p)R(p)N(p) - Q(p)N_r\} \\ = N_rH_1(pI - F_1)^{-1}G_1 \end{aligned} \quad (20)$$

$$Q(p)^{-1}S(p) = N_r\{E_2 + H_2(pI - F_2)^{-1}G_2\} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} Q(p)^{-1}D_a(p)R(p)N_f(p) \\ = N_r\{E_3 + H_3(pI - F_3)^{-1}G_3\} \end{aligned} \quad (22)$$

これらの結果まとめれば制御系全体の状態空間表示が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{\xi}_1(t) \\ \hat{\xi}_2(t) \\ \hat{\xi}_3(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (A-BE_2C) & -BH_1 & -BH_2 & -BH_3 \\ -G_1E_2C & (F_1-G_1H_1) & -G_1H_2 & -G_1H_3 \\ G_2C & 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_f - BE_3 \\ -G_1E_3 \\ 0 \\ G_3 \end{bmatrix} f(v(t)) + \begin{bmatrix} d(t) - BE_2d_0(t) + Bu_m(t) \\ -G_1E_2d_0(t) + G_1u_m(t) \\ G_2d_0(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$v(t) = C_f x(t) + d_v(t) \quad (24)$$

$$y(t) = Cx(t) + d_0(t) \quad (25)$$

系の内部状態の有界性に関する議論に必要な部分は $f(v(t))$ から $v(t)$ への伝達関数 $H(p)$ である。(23), (24)式をまとめれば (26), (27)式になる。

$$\dot{z}(t) = A_z z(t) + B_z f(v(t)) + d_z(t) \quad (26)$$

$$v(t) = C_z z(t) + d_v(t) \quad (27)$$

$A_z, B_z, C_z, d_z(t)$ は (23), (24)式の内容から明らかである。 $H(p)$ は (26), (27)式から (28)式のように求まる。(28)式は (14)式の条件を使えば (29)式になり、さらに逆行列のブロック変換の算法を使えば (30)式のように書ける。

$$H(p) = C_z(pI - A_z)^{-1}B_z = \underline{C}_2(pI - \underline{A}_{22})^{-1}\underline{B}_2 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} H(p) &= C_f(pI - A)^{-1}B_f \\ &\quad - C_f(pI - A)^{-1}B\{C(pI - A)^{-1}B\}^{-1} \\ &\quad \cdot C(pI - A)^{-1}B_f \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} H(p) &= [C_f \ 0] \begin{bmatrix} pI - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_f \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \underline{C}(p\underline{E} - \underline{A})^{-1}\underline{B} \end{aligned} \quad (30)$$

(28)式で $(\underline{C}_2, \underline{A}_{22}, \underline{B}_2)$ は (C_z, A_z, B_z) の可制御・可観測部分である。

また (30)式の $\underline{C}, \underline{E}, \underline{A}, \underline{B}$ はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} \underline{C} &= [C_f \ 0], \quad \underline{E} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \\ \underline{B} &= \begin{bmatrix} B_f \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

(30)式より $H(p)$ は descriptor 形式の伝達関数で表わすことができ、 $H(p)$ には以下の補題で述べるような性質がある。

【補題 1】

$H(p)$ は厳にプロパーな伝達関数で、その極は $C(pI - A)^{-1}B$ の零点の集合に含まれる。

(証明)

$H(p) = \underline{C}_2(pI - \underline{A}_{22})^{-1}\underline{B}_2$ と書けることから、厳にプロパーであることは明らかである。また $H(p)$ の極は

(30)式から

$$\begin{vmatrix} pI - A & -B \\ -C & 0 \end{vmatrix} = 0$$

の根に含まれるから、 $C(pI - A)^{-1}B$ の零点に含まれる。(証明終)

【補題 2】

descriptor 形式 $(\underline{E}, \underline{C}, \underline{A}, \underline{B})$ の動的次数を $k_1, C(pI - A)^{-1}B$ の零点の個数を k_q とすれば

$$k_1 = k_q \leq (n-l) \quad (32)$$

である。

(証明)

descriptor 形式 $(\underline{E}, \underline{C}, \underline{A}, \underline{B})$ は一般につきのように変換される。

$$U \underline{E} V = \begin{bmatrix} I_{k_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad U \underline{A} V = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & 0 \\ 0 & I_{k_2} \end{bmatrix},$$

$$\underline{C} V = [\hat{C}_1, \hat{C}_2], \quad U \underline{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix},$$

$$N = \text{diag}[N(t_1), \dots, N(t_s)],$$

$$N(t_i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{t_i \times t_i},$$

$$N^t = 0, \quad t = \max(t_i),$$

$$k_1 + k_2 = n + l \quad (33)$$

ここで U, V は正則行列である。 $C(pI - A)^{-1}B$ の零点多項式を $V_s(p)$ とすれば、

$$\begin{aligned} V_s(p) &= |p\underline{E} - \underline{A}| \\ &= |U^{-1}| \begin{vmatrix} pI_{k_1} - \hat{A}_1 & 0 \\ 0 & pN - I_{k_2} \end{vmatrix} |V^{-1}| \\ &= |U^{-1}| \cdot |pI_{k_1} - \hat{A}_1| \cdot |V^{-1}| (-1)^{k_2} \end{aligned} \quad (34)$$

よって $k_1 = k_q$ である。つぎに $k_q \leq (n-l)$ を示す。

$$C(pI - A)^{-1}B = N(p)/D(p) = V(p)^{-1}U(p) \quad (35)$$

(35)式で $V(p)^{-1}U(p)$ は左既約分解であり、 $D(p) = |pI - A|$, $\partial_{r,i} N(p) = \sigma_i$ である。また σ_i は $\sigma_i \leq n-1$ である。このとき

$$\begin{aligned} k_q &= \deg |U(p)| \\ &= \deg |N(p)| - nl + n \\ &= \sum_{i=1}^l \sigma_i - nl + n \leq n - l \end{aligned} \quad (36)$$

となる。

(証明終)

【補題 3】

$C(pI - A)^{-1}B$ の零点 λ が (37)式を満たすとき λ は $H(p)$ の可制御・可観測な極である。

$$\text{rank}[\lambda \underline{E} - \underline{A}, \underline{B}] = n + l$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda \underline{E} - \underline{A} \\ \underline{C} \end{bmatrix} = n + l \quad (37)$$

(証明)

補題 2 の結果を使えば

$$\begin{aligned} H(p) &= C(pE - A)^{-1}B \\ &= \underline{C}_2(pI - \underline{A}_{22})^{-1}\underline{B}_2 \\ &= \hat{C}_1(pI_{k_1} - \hat{A}_1)^{-1}\hat{B}_1 + \hat{C}_2(pN - I_{k_2})^{-1}\hat{B}_2 \\ &= \hat{C}_1(pI_{k_1} - \hat{A}_1)^{-1}\hat{B} - \sum_{j=0}^{l-1} (\hat{C}_2 N^j \hat{B}_2) p^j \\ &= \hat{C}_1(pI_{k_1} - \hat{A}_1)^{-1}\hat{B}_1 \end{aligned} \quad (38)$$

となる。(38)式で $\hat{C}_1(pI_{k_1} - \hat{A}_1)^{-1}\hat{B}_1$ は厳にプロパーな部分であり、第 2 項 $\hat{C}_2(pN - I_{k_2})^{-1}\hat{B}_2$ は定数項および非プロパーな部分である。補題 1 より $H(p)$ は厳にプロパーな伝達関数であるから、第 2 項はゼロである。 $(\hat{C}_1, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$ は可制御・可観測とは限らないが、 $H(p)$ の一つの実現である。(37)式より、つぎの結果を得る。

$$\begin{aligned} \text{rank} [\lambda \quad E - A, \quad B] \\ &= \text{rank} [\lambda \quad U \quad EV - U \quad AV, \quad U \quad B] \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I_{k_1} - \hat{A}_1 & 0 & \hat{B}_1 \\ 0 & \lambda N - I_{k_2} & \hat{B}_2 \end{bmatrix} \\ &= k_2 + \text{rank} [\lambda I_{k_1} - \hat{A}_1, \quad \hat{B}_1] = n + l \end{aligned} \quad (39)$$

これより

$$\text{rank} [\lambda I_{k_1} - \hat{A}_1, \quad \hat{B}_1] = n + l - k_2 = k_1 \quad (40)$$

である。同様な解析から (41) 式を得る。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I_{k_1} - \hat{A}_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = k_1 \quad (41)$$

よって λ は可制御・可観測な極である。(証明終)

つぎに出力フィードバックによる伝達関数の正実化条件について述べる。

[補題 4]

線形系 (C, A, B) に対して (i) が成立すれば、 (C, A, B) の可制御・可観測部分 $(\underline{C}_2, \underline{A}_{22}, \underline{B}_2)$ に対して (ii) が成立する。

$$(i) \quad PA + A^T P \leq q C^T C, \quad B^T P = C \quad (42)$$

である正定対称行列 P および実数 q が存在する。ここで q は正である必要はない。

$$(ii) \quad \underline{P} \underline{A}_{22} + \underline{A}_{22}^T \underline{P} \geq q \underline{C}_2^T \underline{C}_2, \quad \underline{B}_2^T \underline{P} = \underline{C}_2 \quad (43)$$

である正定対称行列 $\underline{P}$ および実数 q が存在する。ここで (i) と (ii) の q は同一である。

(証明)

(42) 式からつぎの式を満たす $Q (Q \geq 0)$ が存在する。

$$PA + A^T P - q C^T C = -Q \quad (44)$$

(C, A, B) に対して、Kalman の正準構造変換²⁾ を実行し、得られた行列を $(\underline{C}, \underline{A}, \underline{B})$ とすれば、(45) 式が成立する。

$$\hat{P} \underline{A} + \underline{A}^T \hat{P} - q \underline{C}^T \underline{C} = -\underline{Q} \quad (45)$$

そのときの変換行列を T とすれば $\hat{P} = T^T P T$, $\underline{A} =$

$T^{-1} A T$, $\underline{C} = C T$, $\underline{B} = T^{-1} B$, $\underline{Q} = T^T Q T$ の関係がある。これらの行列をそれぞれ 4 ブロックに分割すれば、その内容は (46) 式ようになる。

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{A}_{13} & \underline{A}_{14} \\ 0 & \underline{A}_{22} & 0 & \underline{A}_{24} \\ 0 & 0 & \underline{A}_{33} & \underline{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \underline{A}_{44} \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \\ \underline{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$\underline{C} = [0, \underline{C}_2, 0, \underline{C}_4]$$

そこで、 $\hat{P}$ について $\hat{P} = [\hat{P}_{ij}]$ (4 block $\times$ 4 block) と分解し、最初の 2 ブロックの行列からつぎの関係を得る。

$$\begin{aligned} \hat{P}_{11} \underline{A}_{11} + \underline{A}_{11}^T \hat{P}_{11} &= -\underline{Q}_{11}, \quad \hat{P}_{11} \underline{A}_{12} + \hat{P}_{12} \underline{A}_{22} \\ &+ \underline{A}_{11}^T \hat{P}_{12} = -\underline{Q}_{12}, \quad \hat{P}_{12} \underline{A}_{12} + \underline{A}_{12}^T \hat{P}_{12} + \hat{P}_{22} \underline{A}_{22} \\ &+ \underline{A}_{22}^T \hat{P}_{22} - q \underline{C}_2^T \underline{C}_2 = -\underline{Q}_{22} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\underline{B}_1^T \hat{P}_{11} + \underline{B}_2^T \hat{P}_{12} = 0, \quad \underline{B}_1^T \hat{P}_{12} + \underline{B}_2^T \hat{P}_{22} = \underline{C}_2 \quad (48)$$

したがって (48) 式を使えば (49) 式を得る。

$$P = (\hat{P}_{22} - \hat{P}_{12} \hat{P}_{11}^{-1} \hat{P}_{12}) > 0, \quad \underline{B}_2^T P = \underline{C}_2 \quad (49)$$

また (47) 式からつぎの関係式を得る。

$$\begin{aligned} \underline{P} \underline{A}_{22} + \underline{A}_{22}^T \underline{P} - q \underline{C}_2^T \underline{C}_2 \\ &= -[\hat{P}_{12}^T \hat{P}_{11}^{-1}, -I] \\ &\cdot \begin{bmatrix} \underline{Q}_{11} & \underline{Q}_{12} \\ \underline{Q}_{12}^T & \underline{Q}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{P}_{11}^{-1} \hat{P}_{12} \\ -I \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (50)$$

よって (43) 式が成立する。

(証明終)

[補題 5]

線形系 (C, A, B) , $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times l}$, $C \in R^{l \times n}$ が補題 4 の (i) の条件を満たすとする。このとき $\underline{A} = A - BR^{-1}C$ とすれば、つぎの伝達関数 $\underline{H}(p)$ は正実である。

$$\underline{H}(p) = C(pI - \underline{A})^{-1}B \quad (51)$$

ただし R^{-1} は $R^{-1} > qI$, $R^{-1} > 0$ を満たす正定対称行列にとるものとする。

(証明)

補題 4 より (C, A, B) の可制御・可観測部分 $(\underline{C}_2, \underline{A}_{22}, \underline{B}_2)$ に対して (52) 式が成立する。

$$\underline{P} \underline{A}_{22} + \underline{A}_{22}^T \underline{P} - q \underline{C}_2^T \underline{C}_2 + \underline{Q} = 0, \quad \underline{P} > 0, \quad \underline{Q} \geq 0 \quad (52)$$

ここで $\underline{B}_2^T \underline{P} = \underline{C}_2$ であること、および $R^{-1} > qI$, $R^{-1} > 0$ なる R^{-1} を使うことを考えれば (52) 式は (53) 式の Riccati 方程式になる。

$$\underline{P} \underline{A}_{22} + \underline{A}_{22}^T \underline{P} - \underline{P} \underline{B}_2 R^{-1} \underline{B}_2^T \underline{P} + \underline{C}_2^* \underline{C}_2^* = 0 \quad (53)$$

ただし

$$\begin{aligned} \underline{C}_2^* \underline{C}_2^* &= \underline{C}_2^T (R^{-1} - qI) \underline{C}_2 + \underline{Q} \\ &= (\underline{C}_2^T L_1^T, L_2^T) \cdot \begin{bmatrix} L_1 \underline{C}_2 \\ L_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$R^{-1} - qI = L_1^T L_1 > 0, \quad \det(L_1) \neq 0, \quad \underline{Q} = L_2^T L_2 \geq 0 \quad (54)$$

Fig. 1 Realization of a positive real transfer function by an output feedback

である。(53)式で (A_{22}, B_2) は可制御, (C_2^*, A_{22}) は可観測である。したがって $A_{22}^* = A_{22} - B_2 R^{-1} B_2^T P = A_{22} - B_2 R^{-1} C_2$ は Riccati 方程式の解を使ったフィードバック系のシステム行列であるから、安定なシステム行列である。

$\underline{H}(p)$ は (55) 式で与えられるので、これより (56) 式を得る。

$$\underline{H}(p) = C(pI - \underline{A})^{-1} B = \underline{C}_2(pI - \underline{A}_{22}^*)^{-1} \underline{B}_2 \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) + \underline{H}^T(-j\omega) \\ = B_2^T (-j\omega I - \underline{A}_{22}^*)^{-1} (C_2^* R^{-1} C_2 \\ + C_2^* C_2^T) (j\omega I - \underline{A}_{22}^*)^{-1} \underline{B}_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (56)$$

A_{22}^* が安定であるから $\underline{H}(p)$ は虚軸上に極をもたないことを併せて考えれば、 $\underline{H}(p)$ は正実である。

(証明終)

補題 5 は Fig. 1 に示すように $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$ の系が補題 4 の (i) を満たせば $u(t) = -R^{-1}y(t)$ により、閉ループ伝達関数 $\underline{H}(p) = C(pI - \underline{A})^{-1} B$ が正実になることを意味している。なお R^{-1} は実数 q に対して常に存在することに注意する。補題 4 は正実化可能条件であり、従来の等式で与えられる正実条件³⁾ を大幅に緩和したことになる。

5. 非線形 MFCS の内部状態の有界性

4 章の内容を使って内部状態の有界性を証明する。閉ループ系 (26), (27) 式のシステム行列 A_s の特性方程式を計算し、まとめれば (57) 式になる。

$$|pI - A_s| = |Q(p)|^2 T(p)^T D_m(p)^T V_s(p) \quad (57)$$

$V_s(p)$ は $C(pI - A)^{-1} B$ の零点多項式である。有界性の証明は非線形要素 $f(v(t))$ の指数 γ の大きさによって分けて扱わなければならない。 $0 \leq \gamma < 1$ の場合零点が安定であれば内部状態 $z(t)$ は有界になる。 $\gamma = 1$ の場合、零点が安定、 $\underline{H}(p)$ が正実、かつ $v(t)^T f(v(t)) \leq \alpha_2 - \beta_2 \|v(t)\|^{r_2}$ ($\alpha_2 \geq 0$, $\beta_2 > 0$, $r_2 > \gamma = 1$) であれば内部状態は有界になる。これらは文献 1) ですでに述べている事実である。 $0 \leq \gamma \leq 1$ の場合零点の安定性が条件として付く。零点の安定性を仮定しなくとも有界になる場合は $\gamma > 1$ の場合に起こりうる。

《定理 1》

非線形系 (58), (59) 式で (C, A, B) は可制御・可観

測とする。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(v(t)) + d(t) \quad (58)$$

$$v(t) = Cx(t) + d_v(t) \quad (59)$$

この系がつぎの 2 条件を満たすとき、内部状態 $x(t)$ は有界である。ここで $d(t), d_v(t)$ は有界な信号である。

$$(i) \quad PA + A^T P \leq qC^T C, \quad B^T P = C \quad (60)$$

を満たす正定対称行列 P および実数 q が存在する。

$$(ii) \quad \|f(v(t))\| \leq \alpha_1 + \beta_1 \|v(t)\|^\gamma \quad (61)$$

$$v(t)^T f(v(t)) \leq \alpha_2 - \beta_2 \|v(t)\|^{r+1} \quad (62)$$

ここで $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\beta_2 > 0$, $\gamma > 1$ とする。

(証明)

$$\underline{A} = A - BR^{-1}B^T P = A - BR^{-1}C(R^{-1} > qI, R^{-1} > 0)$$

とすれば $\underline{A}$ は補題 5 より安定なシステム行列で、かつ $\underline{H}(p)$ は正実である。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underline{A}x(t) + B\{R^{-1}v(t) + f(v(t))\} + d(t) \\ &= \underline{A}x(t) + Bf^*(v(t)) + d(t) \end{aligned} \quad (63)$$

ここで $f^*(v(t)) = R^{-1}v(t) + f(v(t))$ である。 $f^*(v(t))$ と $v(t)$ との関係は (64) 式になる。

$$\begin{aligned} v(t) &= C(pI - \underline{A})^{-1} Bf^*(v(t)) + \underline{d}_v(t) \\ &= \underline{H}(p)f^*(v(t)) + \underline{d}_v(t) \end{aligned} \quad (64)$$

ただし $\underline{d}_v(t) = C(pI - \underline{A})^{-1} d(t) + d_v(t)$ とする。 $\underline{A}$ が安定かつ、 $\|d(t)\| < \infty$, $\|d_v(t)\| < \infty$ であるから $\|\underline{d}_v(t)\| < \infty$ であることに注意する。 (64) 式に対して変数変換すれば、(65) 式になる。

$$\underline{v}(t) = \underline{H}(p)f(\underline{v}(t)) \quad (65)$$

ただし $\underline{v}(t) = v(t) - \underline{d}_v(t)$, $f(\underline{v}(t)) = f^*(v(t)) = R^{-1}v(t) + f(v(t))$ である。 (65) 式の状態空間表示を求めそれを (66) 式とする。 2 次形式 $V(t)$ を (67) 式に定義し、 $V(t)$ の時間微分を求めれば (68) 式になる。

$$\dot{z}(t) = \underline{A}z(t) + Bf(\underline{v}(t)), \quad \underline{v}(t) = Cz(t) \quad (66)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} z(t)^T P z(t), \quad P > 0 \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{1}{2} z(t)^T (P\underline{A} + \underline{A}^T P) z(t) + z(t)^T P B f(\underline{v}(t)) \\ &= -\frac{1}{2} z(t)^T (C^T R^{-1} C + \underline{C}^T \underline{C}) z(t) \\ &\quad + \underline{v}(t)^T f(\underline{v}(t)) \leq \underline{v}(t)^T f(\underline{v}(t)) \\ &\leq \alpha_3 - \beta_3 \|\underline{v}(t)\|^{r+1} \end{aligned} \quad (68)$$

ここで $\alpha_3 \geq 0$, $\beta_3 > 0$ となる。 (68) 式の誘導は多項式関数のノルム不等式を使った文献 1) の方法に準拠する。さらに文献 1) の方法により、有限発散時間 (finite escape time) が存在しないことを確認することができ、 $\|z(t)\| < \infty$, $\|\underline{v}(t)\| < \infty$ の結果を得る。これより $\|v(t)\| < \infty$, $\|f(v(t))\| < \infty$, $\|f^*(v(t))\| < \infty$, $\|x(t)\| < \infty$ の順で有界性が証明される。 (証明終)

定理1ではシステム行列 A の安定性が必ずしも仮定されていないことに注意しなければならない。

《定理2》

(58), (59) 式の非線形系で (C, A, B) は必ずしも可制御・可観測ではないが, $|\lambda I - A| = 0$ の不安定根 λ_{+i} ($i=1, 2, \dots, m_1$) がすべて可制御・可観測であるとする。このとき (C, A, B) に対して定理1の(i)および $f(v(t))$ に対して(ii)が成立すれば, $x(t), v(t)$ は有界である。

《証明》

(C, A, B) に対する可制御・可観測部を $(\underline{C}_2, \underline{A}_{22}, \underline{B}_2)$ とすれば不安定根 λ_{+i} は $\underline{A}_{22}$ の固有値である。正準構造 A の残りの特性根は $(\underline{A}_{11}, \underline{A}_{33}, \underline{A}_{44})$ の固有値になるから, これらはすべて安定である。 $x(t)$ の正準構造に関する分割状態を $(z_1^T(t), z_2^T(t), z_3^T(t), z_4^T(t))^T$ とすれば, $\|z_3(t)\| < \infty, \|z_4(t)\| < \infty$ であることは(46)式の A の構造から容易に示される。 $z_2(t)$ は定理1から有界であるから, これらの結果より, $\|z_1(t)\| < \infty$ を得る。よって $x(t), v(t)$ は有界である。《証明終》

《定理3》

(1), (2), (3) 式の系で $C(pI - A)^{-1}B$ の零点のうち不安定な零点を λ_{+i} ($i=1, \dots, m_1$) とし, これらが $H(p) = C_s(pI - A_s)^{-1}B_s$ の可制御・可観測な特性根であるとする。これは λ_{+i} が(69)式を満たすことと等価である。

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_{+i}I - A & -B & B_f \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} &= n+l, \\ \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_{+i}I - A & -B \\ -C & 0 \\ C_f & 0 \end{bmatrix} &= n+l (i=1, \dots, m_1) \end{aligned} \quad (69)$$

このとき $H(p)$ の一つの実現 $H(p) = \underline{C}_s(pI - \underline{A}_s)^{-1}\underline{B}_s$ の $(\underline{C}_s, \underline{A}_s, \underline{B}_s)$ について定理1の(i), $f(v(t))$ について(ii)が成立すれば, 内部状態 $x(t)$, および $v(t)$ は有界である。

《証明》

(26), (27) 式で $f(v(t))$ から $v(t)$ への伝達関数は4章で検討したように(70)式になる。

$$\begin{aligned} H(p) &= \underline{C}_s(pI - \underline{A}_s)^{-1}\underline{B}_s = \underline{C}_2(pI - \underline{A}_{22})^{-1}\underline{B}_2 \\ &= [\underline{C}_f \quad 0] \begin{bmatrix} pI - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_f \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \hat{C}_1(pI_{k1} - \hat{A}_1)^{-1}\hat{B}_1 \end{aligned} \quad (70)$$

$H(p)$ の極は $\begin{vmatrix} pI - A & -B \\ -C & 0 \end{vmatrix} = 0$ の根の一部である。この根 λ_{+i} ($i=1, \dots, m_1$) が(69)式を満たすことから, (69)式に(33)式の descriptor form 変換を行い, 可制御・可観測判定のランク条件(PBH テスト)を調べる。

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_{+i}I - A & -B & B_f \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \text{rank} [\lambda_{+i}E - A, \underline{B}] \\ &= \text{rank} [\lambda_{+i}UEV - U\hat{A}V, U\hat{B}] \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_{+i}I_{k1} - \hat{A}_1 & 0 & \hat{B}_1 \\ 0 & \lambda_{+i}N - I_{k2} & \hat{B}_2 \end{bmatrix} \\ &= k_2 + \text{rank} [\lambda_{+i}I_{k1} - \hat{A}_1, \hat{B}_1], \\ &= n+l \end{aligned} \quad (71)$$

すなわち

$$\text{rank} [\lambda_{+i}I_{k1} - \hat{A}_1, \hat{B}_1] = n+l-k_2 = k_1 \quad (72)$$

である。同様にして

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_{+i}I_{k1} - \hat{A}_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = k_1 \quad (73)$$

を得る。よって λ_{+i} ($i=1, \dots, m_1$) は可制御・可観測な特性根になる。この事実から定理2を使えば定理3を得る。《証明終》

定理3で $H(p)$ の実現を $\underline{C}_s(pI - \underline{A}_s)^{-1}\underline{B}_s$ とし $\underline{C}_s(pI - \underline{A}_s)^{-1}\underline{B}_s$ と別表現したのは(60)式の条件をチェックするときの計算を容易にするためである。 $(\underline{C}_s, \underline{A}_s, \underline{B}_s)$ が(60)式を満たせばこれと等価なシステムである (C_s, A_s, B_s) も満たすことは明らかである。

本論文では与えられた非線形系(1), (2), (3)式に対し設計前に (C, A, B, C_f, B_f) および $f(v(t))$ に対する条件をチェックしなければならない。 (C, A, B, C_f, B_f) に対して(60), (69)式, $f(v(t))$ に対して(61), (62)が成り立つことである。これらの条件が満たされれば零点が安定な場合の設計と同じになる。 $f(v(t))$ の選び方には自由度があり, 設計可能条件を満たすように工夫することができるが一般的議論は簡単でない。

6. 数 値 例

つぎの系に対して NMFCS を設計し, その応答を Fig. 2 に示す。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} f(v(t)) + \begin{bmatrix} d(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (74)$$

$$v(t) = (1 \quad 0 \quad 0)x(t) + d_v(t) \quad (75)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} d_0(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

非線形要素は

$$f(v(t)) = 1 + v(t) \sin(v(t)) - v(t)^3 \quad (77)$$

である。またモデルは

$$y_m(t) = \frac{1}{p+1} r_m(t) \quad (78)$$

Fig. 2 Output responses of nonlinear model following control system with unstable zeros in a controlled object

とする。この系では不安定零点 $p=1$ をもつが、これは (69) 式の PBH テストから可制御・可観測である。また (60) 式の正実化条件は満たされ、(77) 式の $f(v(t))$ について (61), (62) 式が成り立つことは明らかである。よって定理 3 より内部状態の有界性は保証される。応答は $d(t)$, $d_0(t)$ のステップ外乱が入る場合でもゼロに収束する。また $d_v(t)$ は一般外乱でよく出力には影響しないことがわかる。

7. あとがき

線形モデル追従形制御系では制御対象の零点が閉ループの極になるため、それらの零点の安定性を仮定し

なければならない。しかし非線形系では線形部が不安定でも非線形部がより安定になっていれば系全体として有界にできる。本論文では非線形部の安定性によって線形部の不安定を安定に変換する方法を使ったモデル追従形制御系について論じた。不安定零点が非線形閉ループでの可制御・可観測な極になる場合、非線形関数から線形フィードバックを引き出し、暗黙の操作で線形部を安定にする。この操作は理論上の操作であるから現実には何もしなくともよいが、非線形部分について二つの条件を満たさなければならない。それは非線形関数 $f(v)$ に対する内積条件と $f(v)$ から v の伝達行列が正実であることである。ここでの正実条件は従来の等式条件を緩和したもので、不等式条件で与えられる。本設計での安定化法は非線形系の特徴を積極的に使った方法である。このような考え方は非線形の応用上重要であり、他の制御系設計にも使えるものとする。

参 考 文 献

- 1) 大久保重範：外乱を考慮した非線形系のモデル追従形制御系の設計，計測自動制御学会論文集，**21**-8，792/799 (1985)
- 2) R. E. Kalman: Mathematical Description of Linear Dynamical Systems, SIAM J. on Control, **1**-2, 152/192 (1963)
- 3) B. O. D. Anderson and J. B. Moore: Algebraic Structure of Generalized Positive Real Matrices, SIAM J. on Control, **6**-4, 615/624 (1968)